

УДК 539.3

EDN: SCIMZG DOI: 10.31429/vestnik-21-2-70-79

К исследованию напряженно-деформируемого состояния упругого основания при наличии в нем вертикальных и горизонтальных инъекторов

И. С. Телятников¹✉, М. С. Капустин², А. В. Павлова², С. Е. Рубцов²

¹ Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, пр-кт Чехова, 41, Ростов-на-Дону, 344006, Россия

² Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Телятников Илья Сергеевич; ORCID 0000-0001-8500-2133; SPIN 5501-1491; e-mail: ilux_t@list.ru

Аннотация. При создании систем сейсмо- и виброгашения, а также при укреплении грунта с помощью геотехнических барьеров используются различного вида инъекторы. К недостаткам использования систем инъекторов в тех или иных целях можно отнести отсутствие полной теории расчета их параметров, которая позволила бы обосновывать оптимальный выбор геометрии и обеспечить оценку влияния инъекторов в грунте на волновую картину в целом. В работе рассмотрен метод расчета параметров напряженно-деформируемого состояния упругого основания при наличии в нем вертикальных и горизонтальных армирующих элементов. Рассчитаны распределения контактных напряжений под штампом, дана оценка влияния на них внутренних нагрузок в основании.

Ключевые слова: упругое основание, установившиеся колебания, поверхностная нагрузка, вертикальные армирующие элементы, горизонтальное включение, метод фиктивного поглощения.

Финансирование. Фрагменты работы выполнены в рамках ГЗ ЮНЦ РАН (00-24-13 № 122020100341-01).

Цитирование: Телятников И. С., Капустин М. С., Павлова А. В., Рубцов С. Е. К исследованию напряженно-деформируемого состояния упругого основания при наличии в нем вертикальных и горизонтальных инъекторов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 2. С. 70–79. EDN: SCIMZG. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-70-79

Поступила 21 мая 2024 г. После доработки 20 6-2024 г. Принято 24 июня 2024 г. Публикация 28 июня 2024 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

To the Study of the Stress-strain State of an Elastic Foundation in the Presence of Vertical and Horizontal Injectors

I. S. Telyatnikov¹✉, M. S. Kapustin², A. V. Pavlova², S. E. Rubtsov²

¹ Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Prospekt Chekhova, 41, Rostov-on-Don, 344006, Russia

² Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Ilya S. Telyatnikov; ORCID 0000-0001-8500-2133; e-mail: ilux_t@list.ru

Abstract. Various types of injectors are used in the creation of seismic and vibration damping systems, as well as when strengthening the soil with the help of geotechnical barriers. The disadvantages of using injector systems for one purpose or another include the lack of a complete theory for calculating their parameters, which would make it possible to justify the optimal geometry choice and provide an assessment for the influence of injectors in the ground on the wave pattern as a whole. The study is aimed at modeling the response of an elastic foundation to vibration loading of a surface object in the presence of various types of buried emitters. In this work, we considered a method for calculating the parameters of the stress-strain state of an elastic foundation in the presence of vertical and horizontal reinforcing elements in it. For a series of calculated dispersion parameters of the elastic foundation, we constructed the amplitude-frequency characteristics for the vertical component of the Rayleigh wave in the mid-frequency range. The fictitious absorption method was used to solve the integral equations of the considered mixed contact problems. Which allowed us to calculate the distribution of contact stresses under the stamp and assess the influence of internal loads in the foundation. The models presented in the work can be used to calculate wave fields in soil foundations in the presence of vertical and horizontal injectors. The characteristics of which are

crucial for the development of seismic and vibration damping systems as well as structural solutions for strengthening soil, etc.

Keywords: elastic foundation, steady oscillations, surface load, vertical reinforcing elements, horizontal inclusion, fictitious absorption method.

Funding. Parts of the work were carried out within the framework of the State Assignment of the Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (00-24-13 No. 122020100341-01).

Cite as: Telyatnikov, I. S., Kapustin, M. S., Pavlova, A. V., Rubtsov, S. E., To the study of the stress-strain state of an elastic foundation in the presence of vertical and horizontal injectors. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 70–79. DOI: 10.31429/vestnik-21-2-70-79

Received 21 May 2024. Revised 20 6-2024. Accepted 24 June 2024. Published 28 June 2024.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CCBY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Одна из прикладных проблем инженерно-сейсмологических исследований состоит в выяснении последствий воздействия колебаний на грунты и сооружения. Несмотря на многочисленные исследования роли вибраций в инженерной геологии, даже локальные их проявления еще не до конца ясны.

В настоящее время существуют различные подходы к смягчению воздействия колебаний грунта на защищаемый объект, а также вибрации объектов на грунтовую среду. Специальные системы позволяют защитить здания и сооружения от воздействия колебаний без конструктивного вмешательства и нарушения их целостности путем армирования грунтового массива и тем самым изменения его геотехнических характеристик. Сейсмоизолирующими системами могут служить вертикальные и горизонтальные экраны (барьеры), заглубленные в грунт [1–3]. Концепция вертикального барьера обычно предполагает устройство по периметру сооружения рядов скважин в грунте, отпрессованных уплотняющим раствором [2]. Горизонтальные барьеры, заполненные акустически более жестким, чем окружающий грунт [3], материалом, также применяются в целях вибрационной защиты объектов.

С другой стороны, техногенные вибрации, создаваемые различными объектами, могут приводить к возникновению возбужденной сейсмичности, изменяя тем самым сейсмический режим региона. В таких случаях встает проблема создания систем виброгашения, в качестве последних нередко используют различные типы инъекторов. При строительстве в сложных грунтовых условиях также применяются обеспечивающие устройство фундаментов дополнительные конструкции (геотехнические барьеры), в том числе различного вида армирование грунта, используется вертикальный, горизонтальный и наклонный способы установки инъекторов, при этом количество скважин, их направление и длина определяются в зависимости от свойств грунтов [4–6 и др.].

К недостаткам использования систем инъекторов в тех или иных целях можно отнести отсутствие на сегодняшний день общей теории расчета их параметров, которая позволила бы обосновывать оптимальный выбор геометрии и обеспечить оценку влияния инъекторов в грунте на волновую картину в целом. Для этого требуется детальное изучение процесса распространения волн в деформируемом основании, содержащем армирующие элементы (вертикальные и/или горизонтальные).

Исследование направлено на моделирование реакции упругого основания на вибрационное нагружение поверхностного объекта в присутствии различных типов заглубленных излучателей.

1. Модели систем вертикальных и горизонтальных инъекторов

Волны, генерируемые заглубленными объектами, в результате интерференции могут как усиливать, так и гасить колебания, возбуждаемые поверхностным излучателем. Настоящая работа посвящена исследованию результатов вибрационных воздействий на грунтовую среду

поверхностного источника при наличии различных типов инъекторов. Рассматривается случай, когда штамп, расположенный на поверхности упругой среды, окружен по периметру жесткими вертикальными колоннами, и случай наличия горизонтального включения под штампом.

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) решаются граничные задачи об установившихся относительно положения равновесия гармонических (с круговой частотой ω) колебаниях жесткого круглого штампа ($r \leq a, z = 0$), без трения контактирующего с упругим слоем ($-h \leq z \leq 0, 0 \leq r$), под действием приложенной к нему силы, изменяющейся по гармоническому закону $\text{Re}[p(r) \exp(-i\omega t)]$. Нижняя грань слоя жестко закреплена. Система вертикальных колонн, моделируемых нагруженными жесткими включениями длины l_0 , располагается по периметру, образуя окружность радиуса $r_0 \geq a, -l_0 \leq z \leq 0$. Компоненты объемной силы на вертикальных включениях заданы соотношениями: $X_{1b} = \text{Re}[\chi_{1b}(z, r) \exp(-i\omega t)]$, $\chi_{1b}(z, r) = f_{1b}(z) \delta(r - r_0)$, $b = r, z$. Составляющие локализованной объемной силы на горизонтальном включении радиуса r_1 , расположенным на глубине $z = -h_0$, описываются выражениями $X_{2b} = \text{Re}[\chi_{2b}(z, r) \exp(-i\omega t)]$, $\chi_{2b}(z, r) = f_{2b}(r) \delta(z + h_0)$, $0 \leq r \leq r_1$. Рассматриваемый установившийся характер колебаний позволяет перейти к решению задачи относительно комплексных амплитуд соответствующих функций:

$$(\lambda + 2\mu) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_{jr}}{\partial r} \right) - \frac{u_{jr}}{r^2} \right] + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial u_{jz}}{\partial z} \right] + \mu \frac{\partial^2 u_{jr}}{\partial z^2} + \omega^2 \rho u_{jr} = \chi_{jr}(r, z), \quad (1.1)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_{jz}}{\partial z^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_{jz}}{\partial r} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_{jr}) \right] + \omega^2 \rho u_{jz} = \chi_{jz}(r, z), \quad j = 1, 2; \quad (1.2)$$

$$\mu \left[\frac{\partial u_{jz}(r, 0)}{\partial r} + \frac{\partial u_{jr}(r, 0)}{\partial z} \right] = 0; \quad (1.3)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_{jz}(r, 0)}{\partial z} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_{jr}(r, 0)) = \begin{cases} p(r), & r \leq a, \\ 0, & r > a; \end{cases}$$

$$u_{jr}(r, -h) = u_{jz}(r, -h) = 0. \quad (1.4)$$

Здесь λ, μ — характеристики Ламе упругого основания, ρ — его плотность. В качестве условий излучения использован принцип предельного поглощения [7]. Индекс $j = 1$ указывает на наличие вертикальных колонн вокруг штампа, $j = 2$ — на наличие жесткого включения под штампом. Далее используется подход работы [8].

Применение интегральных преобразований Ханкеля

$$V_{B_n} u(r, z) \equiv U(\alpha, z) = \int_0^\infty u(r, z) J_n(\alpha r) r dr, \quad n = 0, 1,$$

к исходным уравнениям (1.1), (1.2) (1-го порядка к уравнению для радиальной составляющей смещения $u_{jr}(r, z)$ и 0-го порядка — для вертикальной составляющей $u_{jz}(r, z)$) и граничным условиям (1.3), (1.4) позволяет избавиться от производной по радиальной координате. Полученная в результате краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно интегральных характеристик компонент вектора смещений $U_{jr}(\alpha, z), U_{jz}(\alpha, z)$ решается известными методами, использованными, например, в [8]. Для получения характеристик волновых полей осуществляется обращение преобразований Ханкеля построенных трансформант с применением теории вычетов [9]

$$u_{jr}(r, z) = \int_\sigma U_{jr}(\alpha, z) \alpha J_1(\alpha r) d\alpha, \quad u_{jz}(r, z) = \int_\sigma U_{jz}(\alpha, z) \alpha J_0(\alpha r) d\alpha.$$

Здесь контур σ располагается вдоль вещественной полуоси комплексной полуплоскости α , обходя положительные вещественные полюса подынтегральной функции в соответствии принципом предельного поглощения [7].

При исследовании поведения лицевой поверхности основания важную роль играет определение характеристик волны Релея. Произведя процедуру разворота и замыкания контура в соответствии с леммой Жордана [9], интегралы заменяются суммой вычетов. При $r \rightarrow \infty$ ($z = 0$) для амплитуд волн Релея (случай вертикальных инъекторов) получены следующие выражения:

$$u_{1r}(r,0) = i \sum_{k=1}^m \sqrt{\frac{2\pi\zeta_k}{r}} \frac{Q_{1r}(\zeta_k) - Q_{2r}(\zeta_k)}{2\rho C_2^2 \bar{\Delta}(\zeta_k)} \exp[i(\zeta_k r - 3\pi/4)] + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty,$$

$$u_{1z}(r,0) = i \sum_{k=1}^m \sqrt{\frac{2\pi\zeta_k}{r}} \frac{Q_{1z}(\zeta_k) - Q_{2z}(\zeta_k)}{2\rho C_2^2 \bar{\Delta}(\zeta_k)} \exp[i(\zeta_k r - \pi/4)] + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty.$$

Здесь ζ_k определяются из решения уравнения $\Delta(\alpha) = 0$, где

$$\Delta(\alpha) = \sigma_1 \sigma_2 (s^2 + \alpha^4) \operatorname{ch}(\sigma_1 h) \operatorname{ch}(\sigma_2 h) - \alpha^2 (s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) \operatorname{sh}(\sigma_1 h) \operatorname{sh}(\sigma_2 h) - 2s\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2. \quad (1.5)$$

Также использованы обозначения: $\sigma_l = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_l^2}$, $s = \alpha^2 - 0,5\kappa_2^2$, $\kappa_l^2 = (\omega/c_l)^2$ ($l = 1, 2$), κ_l — волновое число продольной ($l = 1$) и поперечной ($l = 2$) волны, $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$.

Выражения $Q_{jb}(\alpha)$, $b = r, z$, $j = 1, 2$, приведены в работе [8],

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\alpha) = & \alpha \left((\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) (s^2 + \alpha^4) + 4\sigma_1 \sigma_2 (s + \alpha^2)) \operatorname{ch}(\sigma_1 h) \operatorname{ch}(\sigma_2 h) + \right. \\ & + h(\sigma_1 (s^2 + \alpha^4) - \alpha^2 \sigma_1^{-1} (s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2)) \operatorname{ch}(\sigma_1 h) \operatorname{sh}(\sigma_2 h) + \\ & + h(\sigma_2 (s^2 + \alpha^4) - \alpha^2 \sigma_2^{-1} (s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2)) \operatorname{sh}(\sigma_1 h) \operatorname{ch}(\sigma_2 h) - \\ & - 2(s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 2s\alpha^2 + \alpha^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)) \operatorname{sh}(\sigma_1 h) \operatorname{sh}(\sigma_2 h) - \\ & \left. - 4\sigma_1 \sigma_2 (s + \alpha^2) - 2s\alpha^2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \right). \end{aligned}$$

Для серии рассчитанных дисперсионных параметров упругого основания построены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) вертикальной компоненты волны Релея в средне-частотном диапазоне $\nu = 1 \div 20$ Гц для нескольких первых мод. В качестве примера взяты механические характеристики, соответствующих почве: $\rho = 1,4 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_1 = 0,2 \cdot 10^3$ м/с, $c_2 = 0,12 \cdot 10^3$ м/с. Толщина слоя — $h = 20$ м, функция нагрузки на вертикальных колоннах считается заданной и имеет вид $f_{z1}(z) = \varepsilon_2 (l_0 + z) + \exp(z - l_0) + (-z)^{1/2} + (z + l_0)^{1/2}$ или $f_{z1}(z) = 2l_0^{-1} (1 + \varepsilon_1)^{-1} [(1 - \varepsilon_1) z l_0^{-1} + 1]$, $\varepsilon_j = \operatorname{const}$ ($j = 1, 2$), $z \in [-l_0, 0]$. Функция нагрузки на горизонтальном включении — $f_{z2}(r) = 2r_1^{-1} (1 + \varepsilon_1)^{-1} [(1 - \varepsilon_1) r r_1^{-1} + 1]$, $r \in [0, r_1]$. В формулах $\omega = 2\pi\nu H_0 c_0^{-1}$, где ν — размерная частота в Гц, $H_0 = 1$ м, $c_0 = 10^3$ м/с.

На рис. 1 приведены примеры АЧХ для первой моды, иллюстрирующие влияние геометрических параметров модели (a , l_0 , r_0) и частоты на волновой процесс.

Как следует из вычислительных экспериментов, интерференционная картина волнового поля усложняется, когда увеличивается радиус расположения вертикальных армирующих элементов r_0 . Вертикальная составляющая амплитуды волны Релея для 1-й моды растет с увеличением площади приложения поверхностной нагрузки. Интерференционная картина усложняется с увеличением длины вертикальных армирующих элементов l_0 и возрастанием частоты колебаний. Изменение функции распределения нагрузки вдоль вертикальных элементов также усложняет интерференционную картину.

2. Решение интегральных уравнений граничных задач при армировании основания вертикальными и горизонтальными включениями

Описанные модели позволяют определить контактные напряжения под штампом. Заданные смешанные граничные условия на верхней грани среды приводят к интегральному уравнению

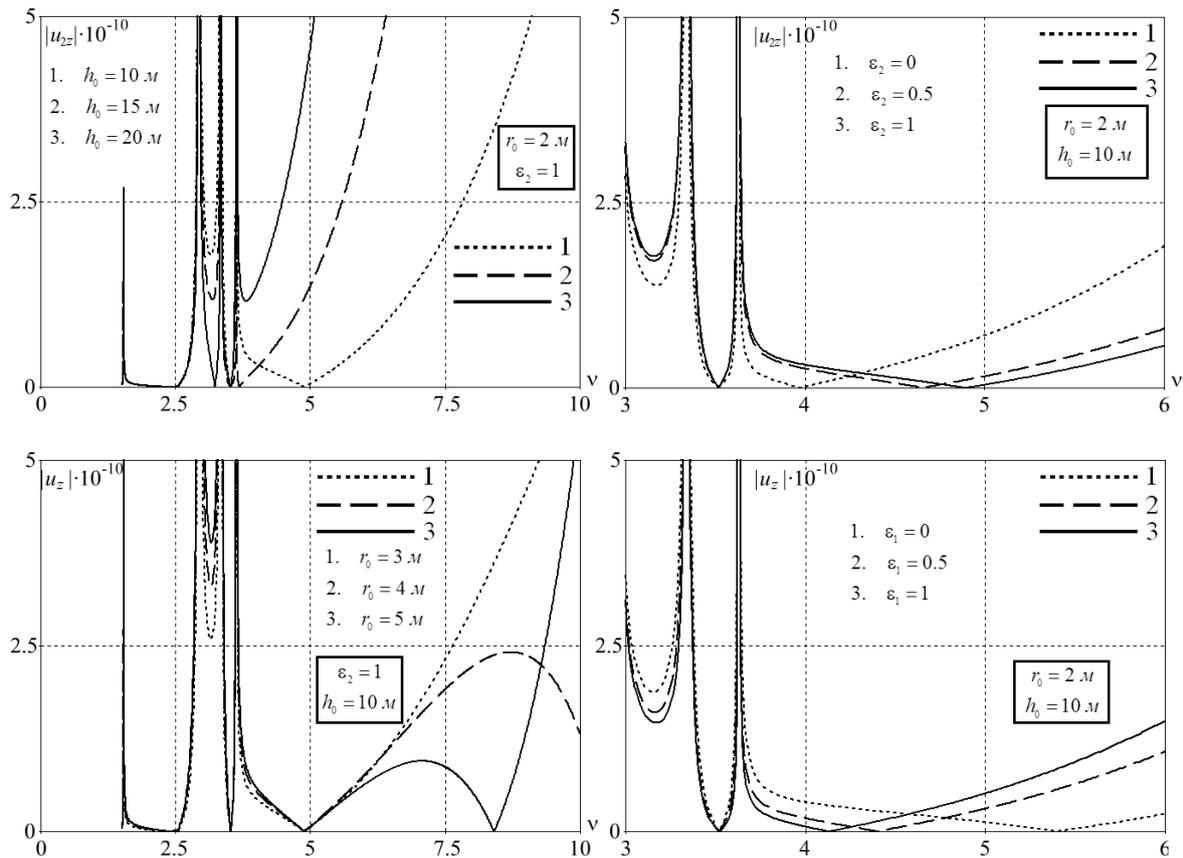


Рис. 1. Модуль вертикальной составляющей волны Релея для различной геометрии системы и видов нагрузок

Fig. 1. Rayleigh wave vertical component module for different system geometry and load types

(ИУ) первого рода относительно напряжения в области контакта штампа с упругой средой. Для обеих моделей ИУ можно представить в виде

$$\int_0^a k(r, \tau) q_j(\tau) d\tau = u_z(r, 0) - A_j(r), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (2.1)$$

$$k(r, \tau) = \int_{\sigma} K(\alpha) J_0(\alpha r) J_0(\alpha \tau) \alpha d\alpha, \quad A_j(r) = \int_{\sigma} U_{2j}(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha, \quad j = 1, 2,$$

здесь $q_j(r)$ — неизвестное контактное напряжение под штампом (при отсутствии в основании армирующих элементов обозначено $q(r)$), $u_z(r, 0)$ — вертикальная составляющая смещений в области штампа, $U_{2j}(\alpha)$ — преобразование Ханкеля перемещений поверхности, вызванных вибрацией инжекторов ($j = 1$ — для вертикальных, $j = 2$ — для горизонтального включения).

Символ ядра ИУ (2.1) $K(\alpha)$, четная мероморфная функция, представлен в [10–12].

Уравнение (2.1) может быть решено различными методами, авторы воспользовались полуаналитическим методом фиктивного поглощения (МФП), классический алгоритм которого описан в монографиях [11, 12], где представлено приближенное решение (2.1) с правой частью в виде функции Бесселя $J_0(\eta r)$, полученное с помощью методов решения статических задач для $K_0(\alpha) = (\alpha^2 + B^2)^{-1/2}$ [7]. Этот же вид K_0 был использован в модификации МФП, описанной применительно к различным задачам в работах [10, 13]. Решение (2.1) для правой

части $J_0(\eta r)$, которое служит вспомогательным для построения искомого решения, имеет вид [10]

$$q_\eta(r) = J_0(\eta r) K_0^{-1}(\eta) + \frac{i\pi a}{2} K_0^{-1} \sum_{l=1}^N \beta_l J_0(z_l r) G_1(\eta, z_l) - \frac{a\pi^2}{4} \sum_{k=1}^N g_k \sum_{l=1}^N \beta_l J_0(z_l r) G_2(z_l, p_k) +$$

$$+ b(\eta) \left(\frac{\exp(-B(a-r))}{\sqrt{a^2-r^2}} + i\pi \sqrt{\frac{a\varepsilon}{2}} \sum_{l=1}^N \beta_l H_0^{(1)}(z_l a) J_0(z_l r) \right) +$$

$$+ \left[i\sqrt{\frac{a\pi}{2}} \frac{\exp(-B(a-r))}{\sqrt{a^2-r^2}} - \frac{a\pi\sqrt{\pi\varepsilon}}{2} \sum_{l=1}^N \beta_l J_0(z_l r) H_0^{(1)}(z_l a) \right] \sum_{k=1}^N \frac{g_k}{\sqrt{B-ip_k}} H_0^{(1)}(p_k a)$$

с точностью до описывающего поведение функции $K(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ постоянного множителя. Здесь использованы обозначения, введенные в [9, 10]:

$$G_1(\eta, z) = \left[\eta J_1(\eta a) H_0^{(1)}(za) - z J_0(\eta a) H_1^{(1)}(za) \right] (\eta^2 - z^2)^{-1},$$

$$G_2(z, p) = \left[p H_1^{(1)}(pa) H_0^{(1)}(za) - z H_0^{(1)}(pa) H_1^{(1)}(za) \right] (z^2 - p^2)^{-1},$$

$$b(\eta) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \left[H_0^{(1)}(\eta a) \sqrt{B+i\eta} + H_0^{(2)}(\eta a) \sqrt{B-i\eta} \right], \quad \varepsilon = \frac{1}{B},$$

где $\beta_l = \prod_{k=1}^N (z_l^2 - p_k^2) \prod_{k=1, k \neq l}^N (z_l^2 - z_k^2)$, $H_0^{(j)}$ — функции Ханкеля ($j = 1, 2$), z_l, p_l — соответственно вещественные нули и полюсы функции, аппроксимирующей $K(\alpha)$ функции [7, 12].

Функции g_k включают неизвестные константы, вводимые в соответствии с алгоритмом МФП [13], алгебраическая система для их определения имеет вид

$$\sum_{k=1}^N g_k \left[\left(p_k H_1^{(1)}(ap_k) J_0(a\alpha) - \alpha H_0^{(1)}(ap_k) J_1(a\alpha) \right) (\alpha^2 - p_k^2)^{-1} - \right.$$

$$\left. - 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi(B-ip_k)}} H_0^{(1)}(ap_k) J_0(a\alpha) \right] =$$

$$= \frac{2}{i\pi} \frac{\sqrt{B^2 + \eta^2}}{\alpha^2 - \eta^2} \left[\eta J_1(a\eta) J_0(a\alpha) - \alpha J_1(a\alpha) J_0(a\eta) \right] - \frac{2}{i\pi} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{a}} J_0(a\alpha) b(\eta),$$

$$\alpha = z_l, \quad l = \overline{1, N}.$$

В силу линейности (2.1) представим его решение в виде

$$q_j(r) = q_1(r) + q_{2j}(r),$$

где первое слагаемое соответствует контактным напряжениям, создаваемым вибрирующим штампом, второе — нагруженными инъекторами.

Для построения аналитических выражений $q_{2j}(r)$ воспользуемся решением вспомогательного ИУ $q_\eta(r)$. Тогда для второго слагаемого

$$\int_0^a k(r, \tau) q_{2j}(\tau) \tau d\tau = - \int_\sigma U_{2j}(\eta) J_0(\eta r) \eta d\eta, \quad (2.2)$$

где $q_{2j}(\tau)$ — напряжения под штампом, создаваемые инъекторами $0 \leq \tau \leq a$, $U_{2j}(\alpha)$ — интегральная характеристика перемещений, обусловленных наличием включений,

$$q_{2j}(r) = - \int_\sigma q_\eta(r) U_{2j}(\eta) \eta d\eta. \quad (2.3)$$

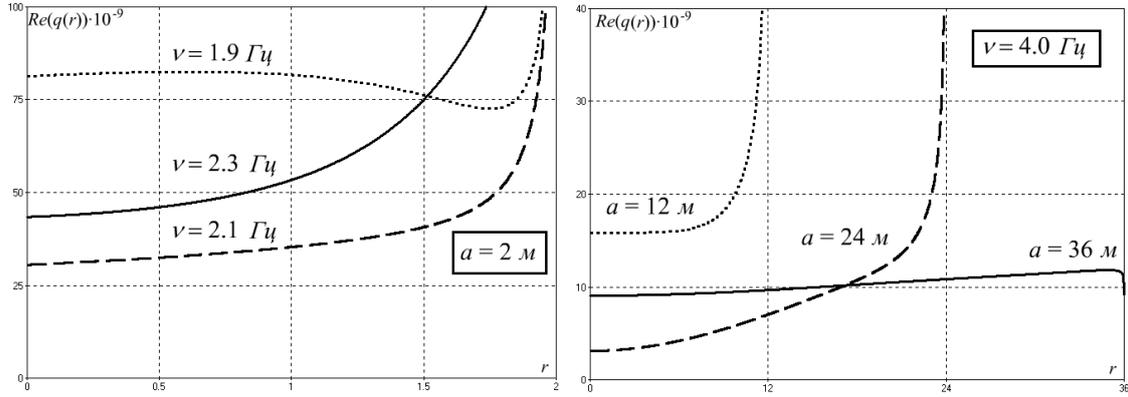


Рис. 2. Распределение напряжений под штампом в отсутствии армирующих элементов

Fig. 2. Stress distribution under the stamp in the absence of reinforcing elements

Для вертикальных включений

$$U_{21}(\alpha) = \frac{r_0 J_0(\alpha r_0)}{4\rho c_2^2 \Delta(\alpha)} \left[\sigma_1 (\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - se^{-\sigma_1 h} \Phi_2^+) \varphi_{z1}^-(l_0) + \alpha^2 \sigma_1 (s - e^{-\sigma_2 h} \Phi_1^+) \varphi_{z2}^-(l_0) - \right. \\ \left. - \sigma_1 (\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - se^{\sigma_1 h} \Phi_2^-) \varphi_{z1}^+(l_0) - \alpha^2 \sigma_1 (s + e^{\sigma_2 h} \Phi_1^-) \varphi_{z2}^+(l_0) \right], \\ \varphi_{zk}^\mp(\beta) = \int_0^\beta f_z(\zeta) e^{\mp \sigma_k \zeta} d\zeta, \quad (k = 1, 2).$$

Для горизонтального включения

$$U_{22}(\alpha) = \frac{-h_0}{4\rho c_2^2} \left[\sigma_1 (\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - se^{-\sigma_1 h} \Phi_2^+) e^{\sigma_1 h_0} + \alpha^2 \sigma_1 (s - e^{-\sigma_2 h} \Phi_1^+) e^{\sigma_2 h_0} - \right. \\ \left. - \sigma_1 (\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - se^{\sigma_1 h} \Phi_2^-) e^{-\sigma_1 h_0} - \alpha^2 \sigma_1 (s + e^{\sigma_2 h} \Phi_1^-) e^{-\sigma_2 h_0} \right] \varphi_z(r_1), \\ \varphi_z(\beta) = \int_0^\beta f_z(\zeta) \zeta J_0(\alpha \zeta) d\zeta.$$

Здесь также использованы обозначения

$$\Phi_2^\pm = \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{ch}(\sigma_2 h) \pm \alpha^2 \operatorname{sh}(\sigma_2 h), \quad \Phi_1^\pm = \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh}(\sigma_1 h) \pm \alpha^2 \operatorname{ch}(\sigma_1 h).$$

Применяя процедуру разворота контура интегрирования [14], интегралы вычисляются по вычетам [9].

Полученные результаты для контактных напряжений, вызванных колебаниями штампа, согласуются с известными результатами [14]. Рис. 2 иллюстрирует распределение напряжений под штампом при единичной амплитуде колебаний в отсутствие в упругом основании армирующих элементов, пространственная координата, принимает значения из интервала $[0, a]$, занимаемого штампом.

На рис. 3 приведены распределения вертикальной компоненты контактных напряжений под штампом, вызванных вибрацией вертикальных включений, при разных значениях частоты ν для описанных выше характеристиках слоя, а также разных значениях длины армирующих элементов l_0 и радиуса их расположения r_0 . Следует отметить, что выбор функции распределения нагрузки незначительно сказывается на величине и характере распределения контактных напряжений.

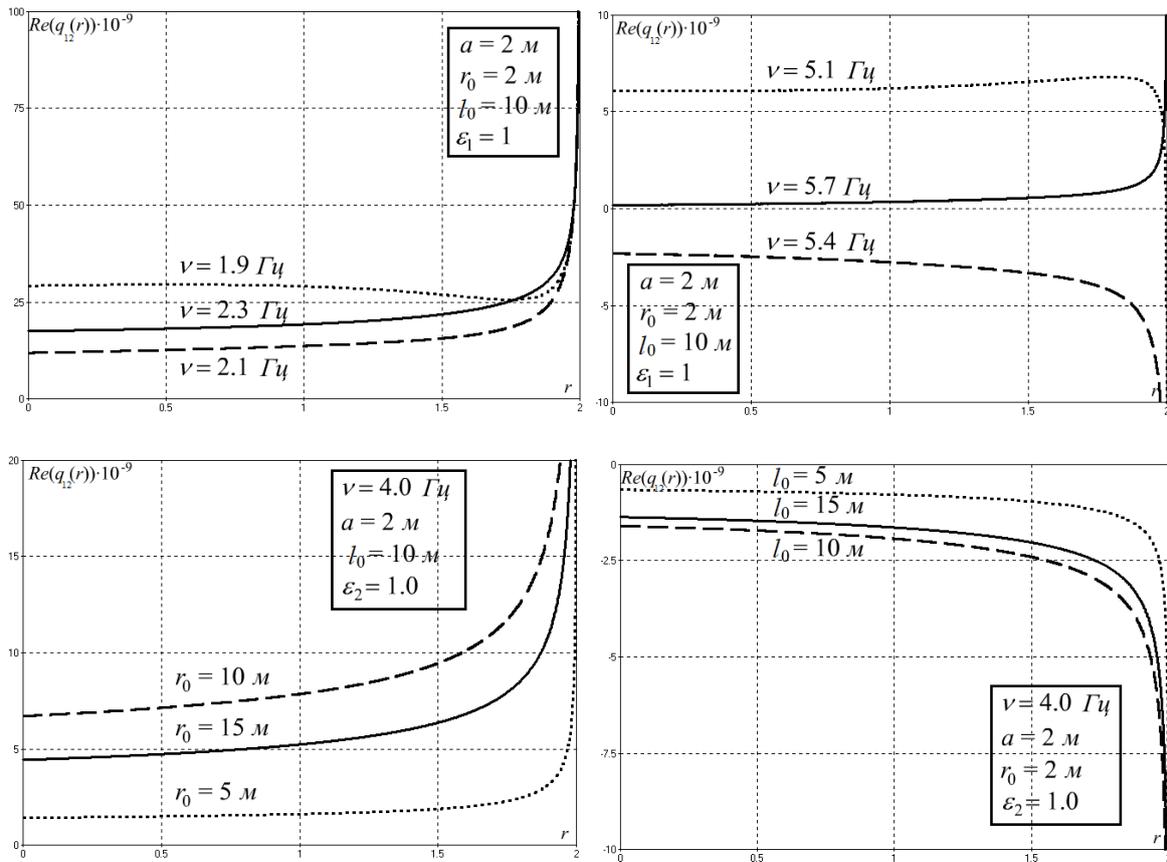


Рис. 3. Распределение напряжений под штампом, создаваемых вертикальными иньекторами

Fig. 3. Distribution of stresses under the stamp created by vertical injectors

Рис. 4 иллюстрирует зависимости вертикальной составляющей напряжений под штампом, вызванных вибрацией горизонтального включения, от частоты ν и таких параметров, как глубина залегания h_0 и радиус включения r_1 .

Наличие армирующих элементов в зависимости от параметров, либо усиливают, либо ослабляют контактные напряжения под штампом. Характер распределения напряжений под штампом определяется совокупностью параметров системы: размерами источников, характером распределения нагрузки на включениях и частотой колебаний. В низкочастотном диапазоне наличие как вертикальных, так и горизонтального включения незначительно влияют на характер напряжений, выбор функции распределения нагрузки на армирующих элементах также не оказывает существенного влияния на величину и характер контактных напряжений.

Заклучение

В работе рассмотрен метод расчета параметров напряженно-деформированного состояния упругого основания при наличии в нем вертикальных и горизонтальных армирующих элементов. Рассчитаны распределения контактных напряжений под штампом, дана оценка влияния на них внутренних нагрузок в основании.

Представленные в работе модели могут быть использованы для расчетов волновых полей в грунтовых основаниях, разработки систем сейсмо- и виброгашения, конструкционных решений по укреплению грунта и т.д., так как при использовании вертикальных или гори-

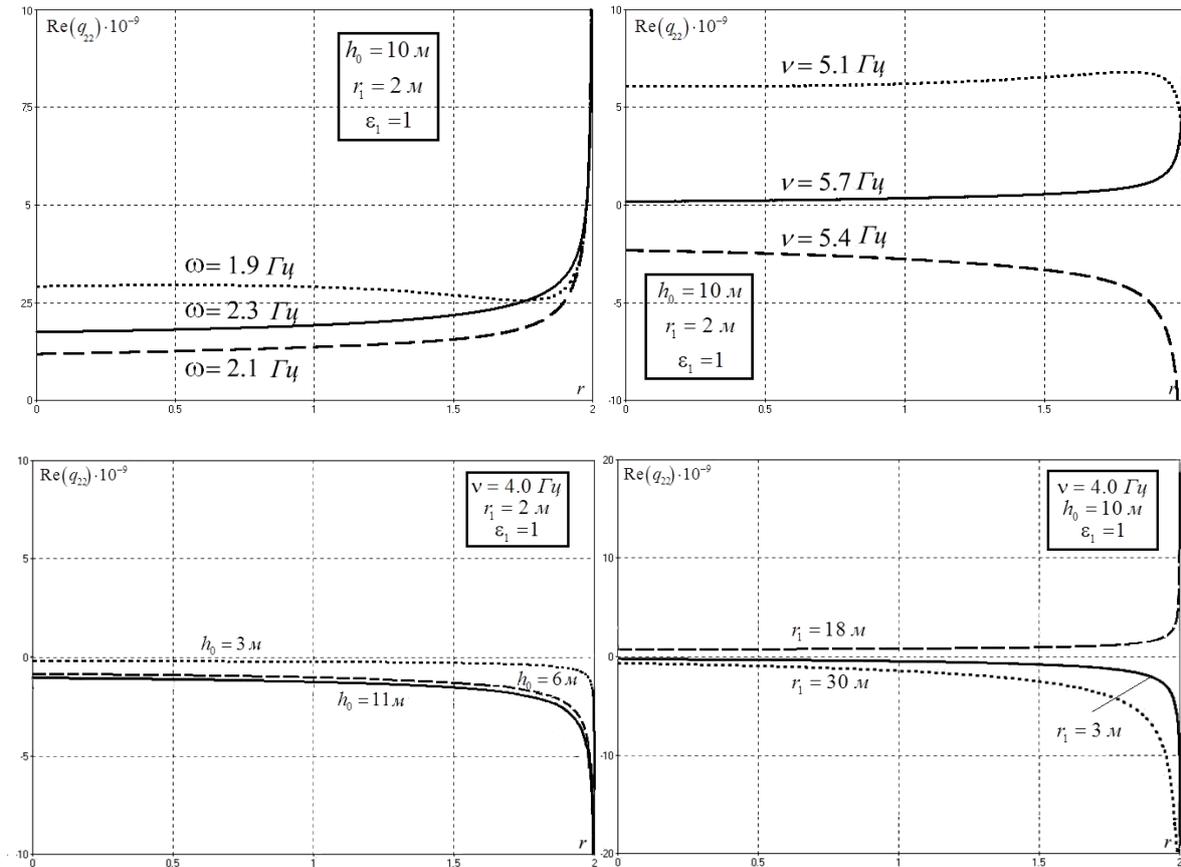


Рис. 4. Распределение напряжений под штампом, создаваемых горизонтальным включением

Fig. 4. Distribution of stresses under the stamp created by horizontal inclusion

горизонтальных иньекторов важно знать характеристики волнового поля, генерируемого этими элементами.

Описанный в работе подход может быть обобщен для случая слоистого основания, а также оснований сложной структуры.

Литература [References]

1. Карнаухова, М.Ю., Кашеварова, В.А., Кузнецова, Ю.А., Лезина, К.С., Маковецкий, О.А., Хусайнов, И.И., Оценка сейсмического воздействия и конструктивные методы защиты зданий. *Транспорт. Транспортные сооружения. Экология*, 2018, № 2, с. 27–37. [Karnaukhova, M.Yu., Kashevarova, V.A., Kuznetsova, Yu.A., Lezina, K.S., Makovetsky, O.A., Khusainov, I.I., Assessment of seismic impact and structural methods of building protection. *Transport. Transportnye sooruzheniya. Ekologiya = Transport. Transport structures. Ecology*, 2018, no. 2, pp. 27–37. (in Russian)]
2. Малышев, Л.К., Натариус, Я.И., Цыбин, А.Н., Храпков, А.А., Устройство для защиты объекта от сейсмического воздействия. Авторское свидетельство SU № 1612060, 07.12.1990. [Malyshev, L.K., Natarius, Ya.I., Tsybin, A.N., Khrapkov, A.A., *Ustroystvo dlya zashchity ob'ekta ot seysmicheskogo vozdeystviya = Device for protecting an object from seismic impact*. Author's certificate SU No. 1612060, 07.12.1990. (in Russian)]
3. Лубягин, А.В., Бобряков, А.П., Способ укрепления основания фундаментов в сейсмически опасных зонах. Авторское свидетельство RU № 248776 С1, 07.11.2011. [Lubyagin, A.V., Bobryakov, A.P., *Sposob ukrepleniya osnovaniya fundamentov v seysmicheskii opasnykh zonakh = Method of strengthening*

the foundation base in seismically dangerous zones. Author's certificate RU No. 248776 C1, 07.11.2011. (in Russian)]

4. Шулятьев, О.А., Мозгачева, О.А., Снижение осадки фундамента за счет изменения напряженно-деформированного состояния основания путем инъекции твердеющего раствора. *Вестник НИЦ «Строительство»*, 2020, № 3(26), с. 121–148. [Shulyatyev, O.A., Mozgacheva, O.A., Reducing foundation settlement by changing the stress-strain state of the base by injecting a hardening solution. *Vestnik NITs "Stroitelstvo" = Bulletin of the Research Center "Construction"*, 2020, no. 3(26), pp. 121–148. (in Russian)]
5. Шулятьев, О.А., Дзагов, А.М., Минаков, Д.К., Изменение напряженно-деформированного массива грунта в результате устройства буронабивных свай и баретт. *Вестник НИЦ «Строительство»*, 2022, № 3(34), с. 26–44. [Shulyatyev, O.A., Dzagov, A.M., Minakov, D.K., Change in the stress-strain soil massif as a result of the installation of bored piles and barrettes. *Vestnik NITs "Stroitelstvo" = Bulletin of the Research Center "Construction"*, 2022, no. 3(34), pp. 26–44. (in Russian)]
6. Маковецкий, О.А., Зуев, С.С., Тимофеев, М.А., Селетков, С.Ф., Травуш, В.И., Устройство системы вертикальных и горизонтальных геотехнических барьеров при строительстве высотных зданий на слабых грунтах. *Жилищное строительство*, 2016, № 9, с. 40–44. [Makovetskiy, O.A., Zuev, S.S., Timofeev, M.A., Seletkov, S.F., Travush, V.I., The device of the system of vertical and horizontal geotechnical barriers in the construction of high-rise buildings on soft soils. *Zhilishchnoe stroitelstvo = Housing construction*, 2016, no. 9, pp. 40–44. (in Russian)]
7. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. Москва, Наука, 1979. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., *Dinamicheskie smeshannyye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical regions*. Moscow, Nauka, 1979. (in Russian)]
8. Карустин, М., Павлова, А., Рубцов, С., Телятников, И., Model of foundation-base system under vibration load. *Communications in Computer and Information Science*, 2014, vol. 487, pp. 168–173.
9. Лаврентьев, М.А., Шабат, Б.В., *Методы теории функций комплексного переменного*. Москва, Наука, 1987. [Lavrentyev, M.A., Shabat, B.V., *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo = Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable*. Moscow, Nauka, 1987. (in Russian)]
10. Павлова, А.В., Капустин, М.С., Телятников, И.С., Метод фиктивного поглощения в решении смешанных задач для произвольных односвязных областей. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2018, т. 15, № 3, с. 52–61. [Pavlova, A.V., Karustin, M.S., Telyatnikov, I.S., The method of fictitious absorption in solving mixed problems for arbitrary simply connected domains. *Ekologicheskiiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2018, v. 15, no. 3, pp. 52–61. (in Russian)]
11. Бабешко, В.А., *Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости*. Москва, Наука, 1984. [Babeshko, V.A., *Obobshchennyy metod faktorizatsii v prostranstvennykh dinamicheskikh smeshannykh zadachakh teorii uprugosti = Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory*. Moscow, Nauka, 1984. (in Russian)]
12. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., Пряхина, О.Д., *Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах*. Москва, Научный мир, 1999. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., Pryakhina, O.D., *Dinamika massivnykh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemyykh sredakh = Dynamics of massive bodies and resonance phenomena in deformable media*. Moscow, Nauchny Mir, 1999. (in Russian)]
13. Павлова, А.В., Рубцов, С.Е., Телятников, И.С., Об одной модификации метода фиктивного поглощения. *Прикладная математика и механика*, 2021, т. 85, вып. 3, с. 332–346. [Pavlova, A.V., Rubtsov, S.E., Telyatnikov, I.S., On one modification of the fictitious absorption method. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, vol. 85, iss. 3, pp. 332–346. (in Russian)]
14. Бабешко, В.А., *Динамика неоднородных линейно-упругих сред*. Москва, Наука, 1989. [Babeshko, V.A., *Dinamika neodnorodnykh lineynno-uprugikh sred = Dynamics of inhomogeneous linear-elastic media*. Moscow, Nauka, 1989. (in Russian)]