

УДК 563.24

EDN: IXLFIG DOI: 10.31429/vestnik-21-3-32-44

## О различных подходах к решению коэффициентной обратной задачи теплопроводности для неоднородного стержня

С. А. Нестеров  

Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, ул. Ватутина, 53, Владикавказ, 362025, Россия

✉ Нестеров Сергей Анатольевич; ORCID 0000-0003-3780-5104; SPIN 4902-4083; e-mail: [1079@list.ru](mailto:1079@list.ru)

*Аннотация.* Представлены две постановки обратной задачи теплопроводности для неоднородного стержня. В случае первой постановки температура измеряется на торце стержня, в месте действия тепловой нагрузки. Решение обратной задачи строится на итерационном подходе ньютоновского типа, где на каждой итерации решается интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода. Получены операторные соотношения, характеризующие чувствительность дополнительной информации к изменению теплофизических характеристик. В случае второй постановки температура измеряется во внутренней точке, а нагружение реализовано на торце стержня. На первом этапе осуществляется итерационный поиск поправок в классе линейных функций, используя дополнительную информацию, измеренную в двух временных точках. На втором этапе осуществляется итерационный поиск поправок в классе квадратичных функций, при этом дополнительная информация измеряется в трех временных точках. Проведены вычислительные эксперименты по отдельной реконструкции теплофизических характеристик.

*Ключевые слова:* метод пристрелки, полиномы, теплопроводность, коэффициентная обратная задача, теплофизические характеристики, стержень, итерационный процесс.

*Финансирование.* Исследование не имело спонсорской поддержки.

*Цитирование:* Нестеров С. А. О различных подходах к решению коэффициентной обратной задачи теплопроводности для неоднородного стержня // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 3. С. 32–44. EDN: IXLFIG. DOI: 10.31429/vestnik-21-3-32-44

Поступила 5 июля 2024 г. После доработки 5 августа 2024 г. Принято 19 августа 2024 г. Публикация 24 сентября 2024 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## On Various Approaches to Solving the Coefficient Inverse Problem of Heat Conductivity for a Inhomogeneous Rod

S. A. Nesterov 

Southern Mathematical Institute, a branch of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vatutina St., 53, Vladikavkaz, 362025, Russia

✉ Sergey A. Nesterov; ORCID 0000-0003-3780-5104; e-mail: [1079@list.ru](mailto:1079@list.ru)

*Abstract.* In recent years, the theoretical basis of methods for non-destructive testing of materials with variable thermophysical properties, based on the apparatus of coefficient inverse problems of thermal conductivity, has been intensively improved. Two formulations of the inverse heat conduction problem for an inhomogeneous rod are presented. It is required to restore the thermophysical characteristics using additional information about the temperature measured at any point of the rod. In the case of the first setting, the temperature is measured at the end of the rod, at the location of the thermal load. The solution to the nonlinear inverse problem is based on an iterative approach of the Newtonian type, where at each iteration the Fredholm integral equation of the 1st kind is solved. Operator relations are obtained that characterize the sensitivity of additional information to changes in thermophysical characteristics. A numerical study was carried out of the influence of the time interval for collecting additional information on the accuracy of separate reconstruction of the thermal conductivity coefficient and specific heat capacity. In the case of the second setting, the temperature is measured at the internal point, and the loading is implemented at the end of the rod. The solution to the inverse problem is based on an iterative approach, where corrections

are determined in the class of polynomial functions. After finding the initial approximation, at the first stage an iterative search for corrections is carried out in the class of linear functions, using additional information measured at two time points. At the second stage, an iterative search for corrections is carried out in the class of quadratic functions, with additional information being measured at three time points. Computational experiments were carried out on separate reconstruction of thermophysical characteristics, both monotonic and non-monotonic.

*Keywords:* shooting method, polynomials, heat conduction, coefficient inverse problem, thermophysical characteristics, rod, iteration process.

*Funding.* The study did not have sponsorship.

*Cite as:* Nesterov, S. A., On various approaches to solving the coefficient inverse problem of heat conductivity for a inhomogeneous rod. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 3, pp. 32–44. DOI: 10.31429/vestnik-21-3-32-44

Received 5 July 2024. Revised 5 August 2024. Accepted 19 August 2024. Published 24 September 2024.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

## Введение

В последние годы интенсивно совершенствуется теоретическая база методов неразрушающего контроля материалов с переменными теплофизическими свойствами, в т.ч. функционально-градиентных материалов (ФГМ), использующая аппарат коэффициентных обратных задач теплопроводности (КОЗТ) [1–4]. ФГМ представляют собой композиционные двухфазные материалы, функциональные свойства которых равномерно изменяются по разработанному профилю [5–7]. Профиль изменения свойств, в свою очередь, обусловлен неоднородностью микроструктуры, дизайн которой определяется требованиями к эксплуатационным характеристикам конечного изделия. Практической реализации структуры ФГМ с заданными переменными теплофизическими свойствами можно достичь различными методами, например, физическим и химическим осаждением слоев, методами порошковой металлургией, аддитивными технологиями. Так, в случае использования порошковой металлургии для изготовления ФГМ технологический процесс состоит из ряда этапов, таких, как спекание, плавление, послойное прессование, напыление и т.д. [8]. Вследствие многоступенчатой технологии производства функционально-градиентных материалов (ФГМ) законы изменения теплофизических характеристик в готовом изделии могут значительно отличаться от заданных.

В КОЗТ требуется восстановить коэффициент теплопроводности и удельную теплоемкость, если на части границы тела известна дополнительная информация о температуре в некотором временном отрезке. КОЗТ являются нелинейными и некорректными задачами, для решения которых необходимо использовать быстрые и устойчивые методы решения прямых и обратных задач.

В случае переменности теплофизических характеристик решение прямых задач опирается на приближенные численные и численно-аналитические методы: метод конечных элементов, метод конечных разностей, проекционные методы, метод пристрелки [1, 4].

Количество работ, посвященных различным постановкам КОЗТ, методам их решения, доказательству теорем существования и единственности довольно велико [9–22]. В большинстве случаев для решения КОЗТ используется минимизация функционала невязки [1–3, 12]. Однако овражистый характер этих функционалов не всегда позволяет использовать градиентные методы минимизации. Для решения этой проблемы широко применяются эволюционные алгоритмы [17]. Кроме того, используются и альтернативные методы решения, например, метод обращения разностных схем [13], метод квазиобращения [20] и др.

В случае, если область задания дополнительной информации и область нагружения совпадают (первая постановка КОЗТ), для решения обратных задач можно использовать итерационный алгоритм ньютоновского типа [4, 9, 19]. Суть метода состоит в определении начального приближения путем минимизации функционала невязки и последовательном его уточнении путем нахождения поправок из решения интегральных уравнений Фредгольма (ИУФ) 1-го

рода с гладкими ядрами. Решение ИУФ 1-го рода осуществляется численно с помощью метода Тихонова А.Н. [23]. На основе такого подхода исследованы КОЗТ для стержня, слоя и цилиндра [4, 9, 11]. Однако в данных работах не проведено исследование чувствительности, т.е. влияния теплофизических свойств на снимаемую входную информацию. Кроме того, рассмотренный в [4] подход не применим в случае второй постановки обратных задач, когда область задания дополнительной информации и область нагружения не совпадают. Обратная задача во второй постановке применительно к упругому стержню была исследована в работе [24], при этом решение строилось на сужении класса поиска поправок в итерационном процессе до полиномов.

Цель данной работы состоит в представлении двух постановок КОЗТ для неоднородного стержня в зависимости от точки съема дополнительной информации; в получении выражений для функций чувствительности и операторных уравнений в случае первой постановки; в сужении класса поиска поправок в итерационном процессе до полиномов в случае второй постановки; в проведении вычислительных экспериментов по отдельной идентификации коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости среди функций различных классов; в анализе результатов идентификации.

### 1. Постановки обратной задачи теплопроводности для стержня

Обезразмеренная постановка задачи о распространении тепла вдоль неоднородного стержня конечной длины имеет вид [4]

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \bar{c}(z) \frac{\partial W}{\partial \tau}, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad \tau > 0, \quad (1.1)$$

$$W(0, \tau) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{\partial W}{\partial z}(1, \tau) = \phi(\tau), \quad (1.2)$$

$$W(z, 0) = 0, \quad (1.3)$$

где  $z$ ,  $\bar{k}(z)$ ,  $\bar{c}(z)$ ,  $\tau$ ,  $W$  — безразмерные координата, коэффициент теплопроводности, удельная объемная теплоемкость, время, температура соответственно.

Применив к (1.1), (1.2) преобразование Лапласа по времени, с учетом (1.3) получим

$$\frac{d}{dz} \left( \bar{k}(z) \frac{d\tilde{W}}{dz} \right) = p\bar{c}(z)\tilde{W}, \quad (1.4)$$

$$\tilde{W}(0, p) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{d\tilde{W}}{dz}(1, p) = \tilde{\phi}(p). \quad (1.5)$$

Решим задачу (1.4), (1.5) методом пристрелки, как в [24]. Для этого уравнение (1.4) сведем к канонической системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\frac{d\tilde{W}_1}{dz} = \frac{1}{\bar{k}(z)}\tilde{Q}_1(z, p), \quad \frac{d\tilde{Q}_1}{dz} = p\bar{c}(z)\tilde{W}_1(z, p). \quad (1.6)$$

Далее составим вспомогательную задачу Коши, состоящую из системы (1.6) и двух условий при  $z = 0$

$$\tilde{W}_1(0, p) = 0, \quad \tilde{Q}_1(0, p) = 1. \quad (1.7)$$

После решения задачи Коши (1.6), (1.7) методом Рунге–Кутты составляются выражения  $\tilde{W} = \alpha\tilde{W}_1$ ,  $\tilde{Q} = \alpha\tilde{Q}_1$ . Неизвестный параметр пристрелки  $\alpha$  определяется путем удовлетворения условия  $\tilde{Q}(1, p) = \tilde{\phi}(p)$ . Обращение трансформант осуществляется методом Дурбина [26].

В обратной задаче требуется определить одну из теплофизических характеристик из (1.1)–(1.3) по дополнительной информации о температуре, измеренной в некоторой точке стержня:

1) в точке действия тепловой нагрузки

$$W(1, \tau) = f_1(\tau), \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2]; \quad (1.8)$$

2) в точке стержня, свободной от нагружения

$$W(\xi_0, \tau) = f_2(\tau), \quad \tau \in [\tau_3, \tau_4], \quad \xi_0 \neq 1. \quad (1.9)$$

Первой постановке КОЗТ соответствует дополнительная информация (1.8), а второй постановке — (1.9).

Поставленные обратные задачи являются нелинейными, решение которых строится на основе итерационного процесса.

## 2. Схема решения обратной задачи в случае первой постановки

В случае, если температура измеряется на торце стержня, в точке действия тепловой нагрузки, то для решения обратной задачи можно использовать слабую постановку прямой задачи (1.4), (1.5) [4]

$$\int_0^1 \bar{k} \tilde{W}' \tilde{\vartheta}' dz + p \int_0^1 \bar{c} \tilde{W} \tilde{\vartheta} dz = \tilde{\phi}(p) \tilde{\vartheta}(1, p), \quad p \in [0, \infty), \quad (2.1)$$

где  $\tilde{\vartheta}$  — пробная функция, удовлетворяющая граничному условию; знак «штрих» обозначает производную по координате  $z$ .

Полагая в (2.1)  $\tilde{\vartheta} = \tilde{W}$  и учитывая, что  $\tilde{W}(1, p) = \tilde{f}_1(p)$ , получим нелинейное интегральное уравнение типа Урысона

$$\int_0^1 \bar{k} (\tilde{W}')^2 dz + p \int_0^1 \bar{c} \tilde{W}^2 dz = \tilde{\phi}(p) \tilde{f}_1(p), \quad p \in [0, \infty). \quad (2.2)$$

Применив к (2.2) метод линеаризации, полагая  $\tilde{W} = \tilde{W}_0 + \varepsilon \tilde{W}_1$ ,  $\bar{k} = \bar{k}_0 + \varepsilon \bar{k}_1$ ,  $\bar{c} = \bar{c}_0 + \varepsilon \bar{c}_1$ , где  $\varepsilon$  — формальный малый параметр, и, ограничившись линейными слагаемыми, получим ИУФ 1-го рода

$$\int_0^1 \bar{k}_1 (\tilde{W}'_0)^2 dz + p \int_0^1 \bar{c}_1 (\tilde{W}_0)^2 dz = \tilde{\phi}(p) (\tilde{f}_1(p) - \tilde{W}_0(1, p)), \quad p \in [0, \infty). \quad (2.3)$$

В случае если требуется восстановить одну из характеристик, например, коэффициент теплопроводности при известной теплоемкости, полагая в (2.3)  $\bar{c}_1 = 0$ , получим

$$\int_0^1 \bar{k}_1 (\tilde{W}'_0)^2 dz = \tilde{\phi}(p) (\tilde{f}_1(p) - \tilde{W}_0(1, p)), \quad p \in [0, \infty). \quad (2.4)$$

Обращая (2.4) в случае  $\tilde{\phi}(p) = 1$ , будем иметь

$$\int_0^1 \bar{k}_1 R(z, \tau) dz = f_1(\tau) - W_0(1, \tau), \quad \tau \in [a, b], \quad (2.5)$$

где

$$R(z, \tau) = \int_0^\tau \frac{\partial^2 W_0(z, \tau_1)}{\partial z} \frac{\partial W_0(z, \tau - \tau_1)}{\partial z} d\tau_1.$$

Особенностью интегрального уравнения (2.5) является положительность его ядра. При решении уравнения (2.5) применяется метод регуляризации Тихонова А.Н. [23].

Нахождение начального приближения среди констант или линейных функций осуществляется путем минимизации функционала невязки

$$J_1 = \int_a^b (f_1(\tau) - W(1, \tau))^2 d\tau. \quad (2.6)$$

### 3. Оценка чувствительности теплофизических характеристик

Эффективность нахождения поправок коэффициента теплопроводности путем решения ИУФ 1-го рода (2.5) сильно зависит от отрезка съема дополнительной информации  $[a, b]$ . Возникает вопрос — как выбирать временной отрезок нагружения, чтобы соответствующий отклик был чувствителен к искомой характеристике.

Для ответа на этот вопрос введем функции чувствительности, отражающие операторные зависимости дополнительной информации от теплофизических характеристик по формулам  $\xi_1 = \frac{\partial f_1}{\partial k}$ ,  $\xi_2 = \frac{\partial f_1}{\partial c}$ , где производные понимаются в смысле Фреше. Выполняя действия, аналогичные [24], получим операторные уравнения для нахождения функций чувствительности. Для этого сначала сформулируем краевую задачу для трансформанты  $\tilde{\xi}_1$ :

$$\tilde{W}'' + \left(\bar{k}\tilde{W}'_{,\bar{k}}\right)' - p\bar{c}\tilde{W}_{,\bar{k}} = 0, \quad (3.1)$$

$$\tilde{W}_{,\bar{k}}(0, p) = 0, \quad \tilde{W}'(1, p) + \bar{k}(1)\tilde{W}'_{,\bar{k}}(1, p) = 0, \quad (3.2)$$

$$\tilde{W}_{,\bar{k}}(1, p) = \tilde{\xi}_1(p). \quad (3.3)$$

Умножив (1.4) на  $\tilde{W}_{,\bar{k}}$ , а (3.1) на  $\tilde{W}$ , получим

$$\left(\bar{k}\tilde{W}'\right)' \tilde{W}_{,\bar{k}} - p\bar{c}\tilde{W}\tilde{W}_{,\bar{k}} = 0, \quad (3.4)$$

$$\tilde{W}''\tilde{W} + \left(\bar{k}\tilde{W}'_{,\bar{k}}\right)' \tilde{W} - p\bar{c}\tilde{W}_{,\bar{k}}\tilde{W} = 0. \quad (3.5)$$

Найдем разность (3.4), (3.5) и, проинтегрировав ее по  $z \in [0, 1]$ , будем иметь

$$\int_0^1 \tilde{W}''\tilde{W} dz + \int_0^1 \left(\bar{k}\tilde{W}'_{,\bar{k}}\right)' \tilde{W} dz - \int_0^1 \left(\bar{k}\tilde{W}'\right)' \tilde{W}_{,\bar{k}} dz = 0. \quad (3.6)$$

Применив к (3.6) формулу интегрирования по частям, получим

$$\tilde{W}'\tilde{W}\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\tilde{W}'\right)^2 dz + \bar{k}\tilde{W}'_{,\bar{k}}\tilde{W}\Big|_0^1 - \bar{k}\tilde{W}'\tilde{W}'_{,\bar{k}}\Big|_0^1 = 0. \quad (3.7)$$

Т.к.  $\tilde{W}(0, p) = 0$ ,  $\tilde{W}_{,\bar{k}}(0, p) = 0$ ,  $\tilde{W}'(1, p) + \bar{k}(1)\tilde{W}'_{,\bar{k}}(1, p) = 0$ , то  $\tilde{W}'\tilde{W}\Big|_0^1 = \tilde{W}'(1, p)\tilde{W}(1, p)$ ,  $\bar{k}\tilde{W}'\tilde{W}'_{,\bar{k}}\Big|_0^1 = -\tilde{Q}\tilde{W}_{,\bar{k}}(1, p)$ ,  $\bar{k}\tilde{W}'_{,\bar{k}}\tilde{W}\Big|_0^1 = -\tilde{W}'(1, p)\tilde{W}(1, p)$ ,  $\tilde{W}_{,\bar{k}}(1, p) = \tilde{f}_{,\bar{k}}(p) = \tilde{\xi}_1$ . Тогда при  $\tilde{\phi}(p) = 1$  получим

$$\tilde{\xi}_1 = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial k} = - \int_0^1 \left(\tilde{W}'\right)^2 dz. \quad (3.8)$$

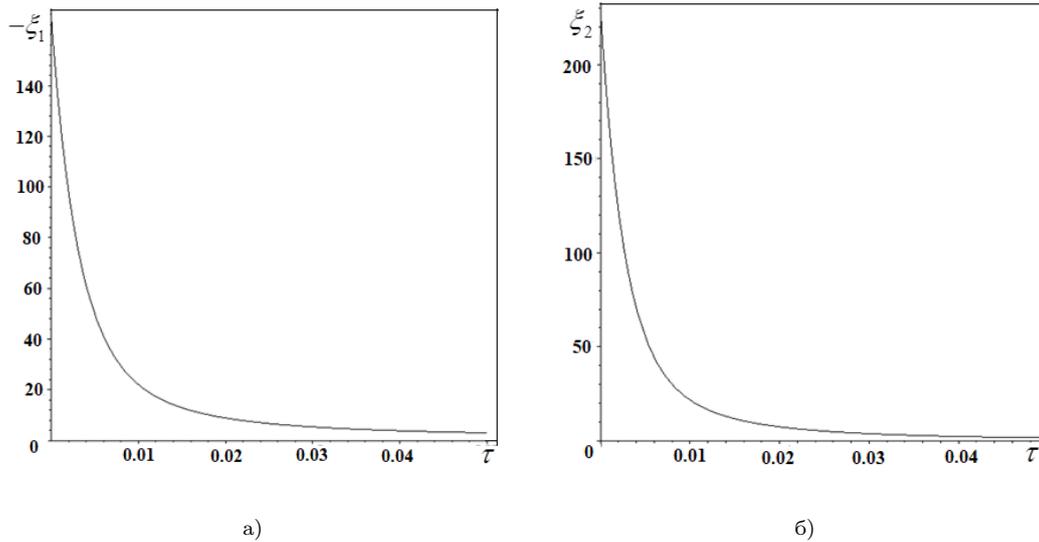


Рис. 1. Зависимость функций чувствительности: а)  $-\xi_1$ ; б)  $\xi_2$  от времени

Fig. 1. Dependence of sensitivity functions: а)  $-\xi_1$ ; б)  $\xi_2$  on time

Аналогично получим выражение для второй функции чувствительности в трансформантах

$$\tilde{\xi}_2 = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{c}} = p \int_0^1 (\tilde{W})^2 dz > 0. \quad (3.9)$$

Переходя в (3.8), (3.9) к оригиналам, имеем

$$\xi_1(\tau) = - \int_0^1 \int_0^\tau \left( \frac{\partial W}{\partial z}(z, \tau_1) \frac{\partial W}{\partial z}(z, \tau - \tau_1) \right) d\tau_1 dz, \quad (3.10)$$

$$\xi_2(\tau) = \int_0^1 \int_0^\tau \left( \frac{\partial W}{\partial \tau_1}(z, \tau_1) W(z, \tau - \tau_1) \right) d\tau_1 dz. \quad (3.11)$$

На рис. 1 представлены результаты вычисления функций чувствительности для различных моментов времени: а)  $-\xi_1(\tau)$  в случае  $\bar{k}(z) = 1,7 - 2,4(z - 1)z$ ,  $\bar{c}(z) = 1$ ; б)  $\xi_2(\tau)$  в случае  $\bar{k}(z) = 1$ ,  $\bar{c}(z) = 1,2 + 2,4(z - 1)z$ .

Из рис. 1 следует, что функции  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  имеют максимумы при  $\tau = 0$  и экспоненциально убывают с ростом  $\tau$ .

Исследуем влияние набора временных точек на точность реконструкции функции  $\bar{k}(z) = 1,7 - 2,4(z - 1)z$  при  $\bar{c}(z) = 1$ . Для этого рассмотрим два набора временных точек:

1)  $\tau = \{1,2; 2,0; 2,8; 3,7; 4,6; 5,2; 6,1; 6,6; 7,1; 7,8\} \cdot 10^{-3}$  — набор точек, близких к началу измерения, когда функция чувствительности максимальна;

2)  $\tau = \{8,0; 8,5; 9,0; 9,5; 10; 10,5; 11; 11,5; 12; 12,5; 13\} \cdot 10^{-3}$  — набор точек, более отдаленных от начала измерения, когда функция чувствительности меняется с меньшей скоростью.

В табл. 1 исследовано влияние набора временных точек съема дополнительной информации на значения функционала невязки и относительной погрешности реконструкции функции  $\bar{k}(z) = 1,7 - 2,4(z - 1)z$ .

Из табл. 1 следует, что при выборе первого набора погрешность реконструкции на 6-й итерации не превышает 6 %, а при выборе второго набора — 16 %. При этом при выборе

Таблица 1. Влияние набора временных точек съема дополнительной информации на реконструкцию  $\bar{k}(z) = 1,7 - 2,4(z - 1)z$

Table 1. The influence of a set of time points of additional information collection on reconstruction  $\bar{k}(z) = 1,7 - 2,4(z - 1)z$

№ итерации	Невязка $J_1$		Погрешность реконструкции, %	
	1-й набор	2-й набор	1-й набор	2-й набор
1	0,00292561	0,0037362	15,3	17,5
2	0,00024246	0,0034258	12,2	16,7
3	0,00001524	0,0031672	10,1	16,1
4	0,00000269	0,0030216	8,4	15,8
5	0,00000314	0,0029475	6,1	15,4
6	0,00000093	0,0029157	5,5	15,2

первого набора невязка и погрешность реконструкции быстро уменьшаются уже с первой итерации, а при выборе второго набора уменьшаются очень медленно.

Аналогичным образом исследовано влияние набора временных точек на точность реконструкции функции  $\bar{c}(z) = 1,2 + 2,4(z - 1)z$  при  $\bar{k}(z) = 1$ .

Рассмотрены два набора временных точек:

- 1)  $\tau = \{0,8; 1,2; 1,6; 2,0; 2,4; 2,8; 3,2; 3,6; 4,0; 4,4\} \cdot 10^{-3}$ ;
- 2)  $\tau = \{3,8; 4,2; 4,6; 5,0; 5,4; 5,8; 6,2; 6,6; 7,0; 7,4\} \cdot 10^{-3}$ .

Выяснено, что при расчетах по первому набору точек погрешность реконструкции на шестой итерации не превышает 5 %, а по второму набору — 14 %.

Итак, наиболее информативным является набор временных точек, наиболее близких к началу измерения, когда функция чувствительности максимальна.

Рассмотрим теперь результаты раздельной реконструкции коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости в виде степенных функций, моделирующих реальные свойства ФГМ. В качестве примера ФГМ рассмотрен композиционный материал, свойства которого принимают свойства никеля  $Ni$  в точке  $z = 0$  и свойства карбида титана  $TiC$  в точке  $z = 1$ . Эффективные безразмерные материальные характеристики ФГ стержня определяются по «правилу смеси» [7]

$$\bar{a}(z) = \bar{a}_{Ni} + (\bar{a}_{TiC} - \bar{a}_{Ni})z^s, \quad s = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

Здесь  $\bar{a}_{Ni}$  — безразмерные свойства никеля,  $\bar{a}_{TiC}$  — безразмерные свойства карбида титана,  $s$  — параметр неоднородности.

Для того чтобы получить законы неоднородности согласно формуле (3.12), используем следующие значения физических характеристик [7]:

$$k_{Ni} = 90 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad c_{Ni} = 440 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \quad k_{TiC} = 25 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad c_{TiC} = 134 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Полагая в вычислениях характерные значения равными

$$k_0 = 200 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad c_0 = 500 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}},$$

получим

$$\bar{k}_{Ni} = \frac{k_{Ni}}{k_0} = 0,45; \quad \bar{c}_{Ni} = \frac{c_{Ni}}{c_0} = 0,88; \quad \bar{k}_{TiC} = \frac{k_{TiC}}{k_0} = 0,13; \quad \bar{c}_{TiC} = \frac{c_{TiC}}{c_0} = 0,27.$$

Тогда

$$\bar{k}(z) = 0,45 + (0,13 - 0,45)z^s, \quad \bar{c}(z) = 0,88 + (0,27 - 0,88)z^s, \quad s = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

На рис. 2 представлены результаты восстановления теплофизических характеристик Ni–TiC ФГМ. Восстанавливаемые характеристики имеют вид степенных функций, полагая  $s = 3$  для первой формулы (3.13) и  $s = 2$  для второй формулы. При этом сплошной линией изображен точный закон, точками — восстановленный.

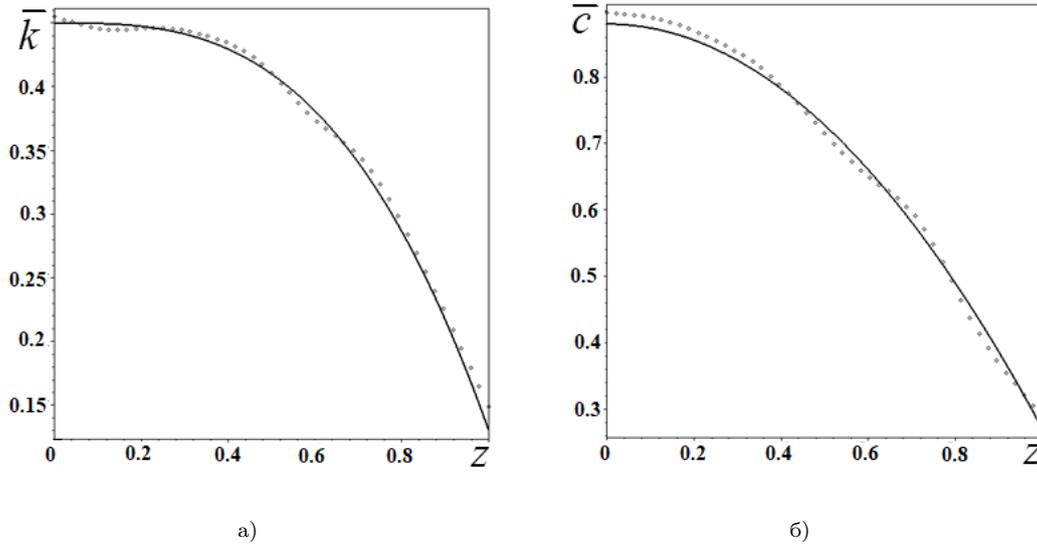


Рис. 2. Результаты восстановления функций: а)  $\bar{k}(z) = 1,7 - 2,4(z - 1)z$ ; б)  $\bar{c}(z) = 0,88 + (0,27 - 0,88)z^2$

Fig. 2. Results of reconstruction of functions: а)  $\bar{k}(z) = 1,7 - 2,4(z - 1)z$ ; б)  $\bar{c}(z) = 0,88 + (0,27 - 0,88)z^2$

#### 4. Решение обратной задачи во второй постановке

Если температура измеряется во внутренней точке, а нагружение реализовано на торце стержня по формуле (1.9), алгоритм решения, рассмотренный в разделе 2, нельзя применить к решению обратной задачи во второй постановке, т.к. в правую часть интегрального уравнения (2.5) входит температура, измеренная в точке нагружения.

Для решения задачи во второй постановке будем определять поправки в более узком классе функций, например, в классе полиномов.

Осуществим линейризацию задачи (1.4), (1.5) в окрестности начального приближения, выполнив разложение по формальному малому параметру  $\varepsilon$ , как в разделе 2. Собирая слагаемые по степеням параметра  $\varepsilon$ , получим следующие краевые задачи.

При  $\varepsilon^0$ :

$$\left(\bar{k}_0 \tilde{W}'_0\right)' - p\bar{c}_0 \tilde{W}_0 = 0, \quad (4.1)$$

$$\tilde{W}_0(0, p) = 0, \quad -\bar{k}_0(1) \tilde{W}'_0(1, p) = \tilde{\phi}(p). \quad (4.2)$$

При  $\varepsilon^1$ :

$$\left(\bar{k}_0 \tilde{W}'_1\right)' - p\bar{c}_0 \tilde{W}_1 = p\bar{c}_1 \tilde{W}_0 - \left(\bar{k}_1 \tilde{W}'_0\right)', \quad (4.3)$$

$$\tilde{W}_1(0, p) = 0, \quad \bar{k}_0(1) \tilde{W}'_1(1, p) = -\bar{k}_1(1) \tilde{W}'_0(1, p). \quad (4.4)$$

Задача (4.1), (4.2) решается численно методом пристрелки. Задача (4.3), (4.4) содержит неизвестные поправки  $\bar{k}_1$ ,  $\bar{c}_1$  в правой части, поэтому прямым численным методом не может быть решена.

Рассмотрим подробно процесс реконструкции коэффициента теплопроводности при известной удельной теплоемкости.

Начальное приближение определяется среди констант путем минимизации следующего функционала невязки

$$J_2 = \int_c^d (f_2(\tau) - W_0(\xi_0, \tau))^2 d\tau. \quad (4.5)$$

Представим поправку  $\bar{k}_1$  в виде линейной комбинации, как в [24]

$$\bar{k}_1 = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(z), \quad \varphi_i(z) = \prod_{s=0, s \neq i}^N (z_s - z) / \prod_{s=0, s \neq i}^N (z_s - z_i), \quad (4.6)$$

где в качестве точек коллокаций выбраны точки  $z_s = s/N$ .

Т.к. задача (4.3), (4.4) линейно зависит от правой части, то ее решение будем искать в виде

$$\tilde{W}_1(z, p) = \sum_{i=0}^N a_i \tilde{W}_{1i}(z, p), \quad (4.7)$$

где  $\tilde{W}_{1i}, i = 0, \dots, N$  — решения (4.3), (4.4) при  $\bar{k}_1 = \varphi_i(z), \bar{c}_1 = 0$ .

Конструкция функций (4.6) такова, что  $\varphi_i(z_s) = \delta_{is}$ , поэтому коэффициенты  $a_i$  — узловые значения поправки  $\bar{k}_1$  в точках  $z_i = i/N$ .

Для нахождения оригиналов используется метод обращения Дурбина, а для нахождения коэффициентов разложения  $a_i, i = 0..N$  используется соотношение

$$W_1(\xi_0, \tau_j) = \sum_{i=0}^N a_i W_{1i}(\xi_0, \tau_j) \approx f_2(\tau_j) - W_0(\xi_0, \tau_j), \quad j = 1, \dots, M. \quad (4.8)$$

На первом этапе осуществляется поиск поправок в классе линейных функций, полагая  $N = 1$  в выражениях (4.6), (4.7). В этом случае  $\tilde{W}_{10}$  находится методом пристрелки в виде суммы решений неоднородной задачи (4.3), (4.4) с однородными граничными условиями  $\hat{W}_{10}$

$$\hat{W}'_{10} = \frac{\hat{Q}_{10}}{\hat{k}_0}, \quad \hat{Q}'_{10} = p\bar{c}\hat{W}_{10} - \tilde{W}_0'', \quad (4.9)$$

$$\hat{W}_{10}(0, p) = 0, \quad \hat{Q}_{10}(1, p) = 0 \quad (4.10)$$

и решения однородной задачи с неоднородными граничными условиями

$$\bar{W}'_{10} = \frac{\bar{Q}_{10}}{\bar{k}_0}, \quad \bar{Q}'_{10} = p\bar{c}\bar{W}_{10}, \quad (4.11)$$

$$\bar{W}_{10}(0, p) = 0, \quad \bar{Q}_{10}(1, p) = 1, \quad (4.12)$$

умноженного на параметр пристрелки  $\beta_1$ , т.е.  $\tilde{W}_{10} = \hat{W}_{10} + \beta_1 \bar{W}_{10}$ . При этом производная  $\tilde{W}'_0$  находится с использованием сплайн аппроксимации функции  $\tilde{W}_0$ . Выполняя аналогичные действия, находят  $\tilde{W}_{11}$ .

Коэффициенты разложения  $a_0, a_1$  находятся из решения системы двух линейных алгебраических уравнений, которая получается, если положить  $N = 1, M = 2$  в выражении (4.8). Найденная поправка  $\bar{k}_1$  добавляется к начальному приближению  $\bar{k}_0$  и позволяет найти новое начальное приближение. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока новая поправка не будет по норме меньше 0,01.

На втором этапе осуществляется поиск поправок в классе квадратичных функций, полагая  $N = 2$  в выражениях (4.6), (4.7). Три коэффициента разложения  $a_0, a_1, a_2$  находятся из решения системы трех линейных алгебраических уравнений, которая получается, если положить  $N = 2, M = 3$  в выражении (4.8). Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока новая поправка не будет по норме меньше 0,01.

В случае если неизвестна удельная теплоемкость при известном коэффициенте теплопроводности, то для нахождения поправок  $\bar{c}_1$  и решения задачи (4.3), (4.4) имеем

$$\bar{c}_1 = \sum_{i=1}^N b_i \varphi_i, \quad \tilde{W}_1(z, p) = \sum_{i=0}^N b_i \tilde{W}_{1i}(z, p), \quad (4.13)$$

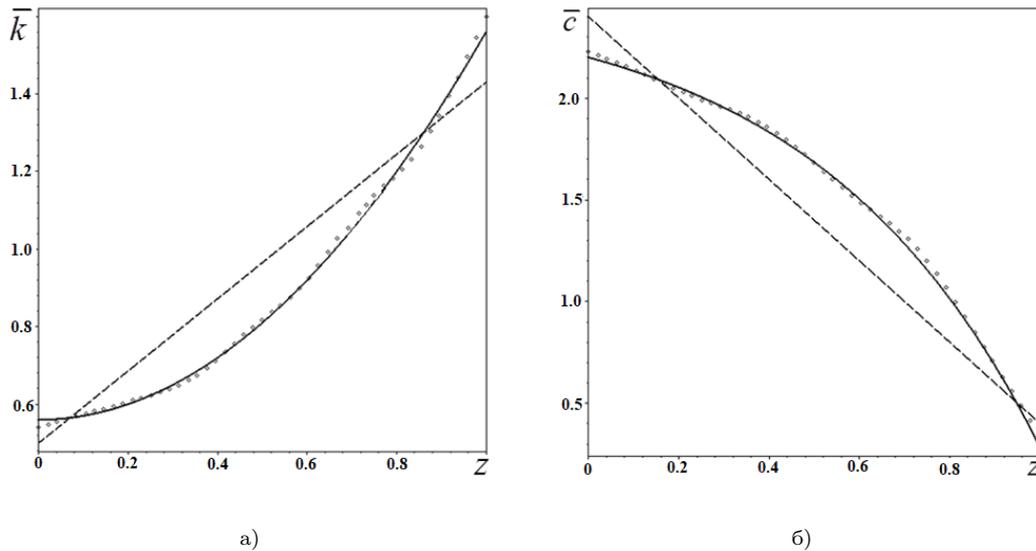


Рис. 3. Результаты восстановления монотонных функций: а)  $\bar{k}(z) = 0,56 + z^2$ ; б)  $\bar{c}(z) = 2,5 - 0,3e^{2z}$   
 Fig. 3. Results of reconstruction of monotone functions: а)  $\bar{k}(z) = 0,56 + z^2$ ; б)  $\bar{c}(z) = 2,5 - 0,3e^{2z}$

где  $\tilde{W}_{1i}$ ,  $i = 0, \dots, N$  — решения (4.3), (4.4) при  $\bar{c}_1 = \varphi_i(z)$ ,  $\bar{k}_1 = 0$ .

Для нахождения коэффициентов разложения  $b_i$ ,  $i = 0, \dots, N$  используется соотношение

$$W_1(\xi_0, \tau_j) = \sum_{i=0}^N b_i W_{1i}(\xi_0, \tau_j) \approx f_2(\tau_j) - W_0(\xi_0, \tau_j), \quad j = 1, \dots, M. \quad (4.14)$$

Проведены вычислительные эксперименты по отдельной реконструкции коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости в классе квадратичных функций. Выяснено, что максимальная погрешность реконструкции монотонных функций не превышает 2 %, а немонотонных — 4 %; при этом для нахождения поправок в классе линейных функций требуется не более двух итераций, а в классе квадратичных функций — 4 итераций. При этом регуляризации задачи не требуется. Точность восстановления повышается при  $\xi_0 \rightarrow 1$ , а при  $\xi_0 < 0,56$  схема перестает работать. Пропуская первый этап, и сразу переходя к поиску поправок в классе квадратичных функций, получаем систему, требующую регуляризации при решении. Причиной этой ситуации является недостаточно близкое к искомому решению начальное приближение.

Рис. 3 представляет результаты восстановления монотонных функций: а) возрастающей  $\bar{k}(z) = 0,56 + z^2$ ; б) убывающей  $\bar{c}(z) = 2,5 - 0,3e^{2z}$  при  $\xi_0 = 0,85$ . При этом пунктирной линией изображен восстановленный закон в классе линейных функций, точками — в классе квадратичных функций. Съём дополнительной информации при реконструкции коэффициента теплопроводности производился в точках  $\tau_1 = 0,0012$ ,  $\tau_2 = 0,0022$ ,  $\tau_3 = 0,0034$ , а при реконструкции удельной теплоемкости — в точках  $\tau_1 = 0,0018$ ,  $\tau_2 = 0,0027$ ,  $\tau_3 = 0,0031$ . Начальные приближения:  $\bar{k}_0(z) = 1,65$ ,  $\bar{c}_0(z) = 1,2$ .

На рис. 4 изображены результаты реконструкции немонотонных функций: а)  $\bar{k}(z) = 1,3 + 0,7 \sin(\pi z)$ ; б)  $\bar{c}(z) = 1,6 - 0,5 \sin(\pi z)$  при  $\xi_0 = 0,9$ . Дополнительная информация при реконструкции  $\bar{k}(z)$  бралась в точках  $\tau_1 = 0,001$ ,  $\tau_2 = 0,0016$ ,  $\tau_3 = 0,0024$ , а при реконструкции  $\bar{c}(z)$  — в точках  $\tau_1 = 0,0015$ ,  $\tau_2 = 0,0021$ ,  $\tau_3 = 0,0027$ . Начальные приближения:  $\bar{k}_0(z) = 1,7$ ,  $\bar{c}_0(z) = 1,4$ .

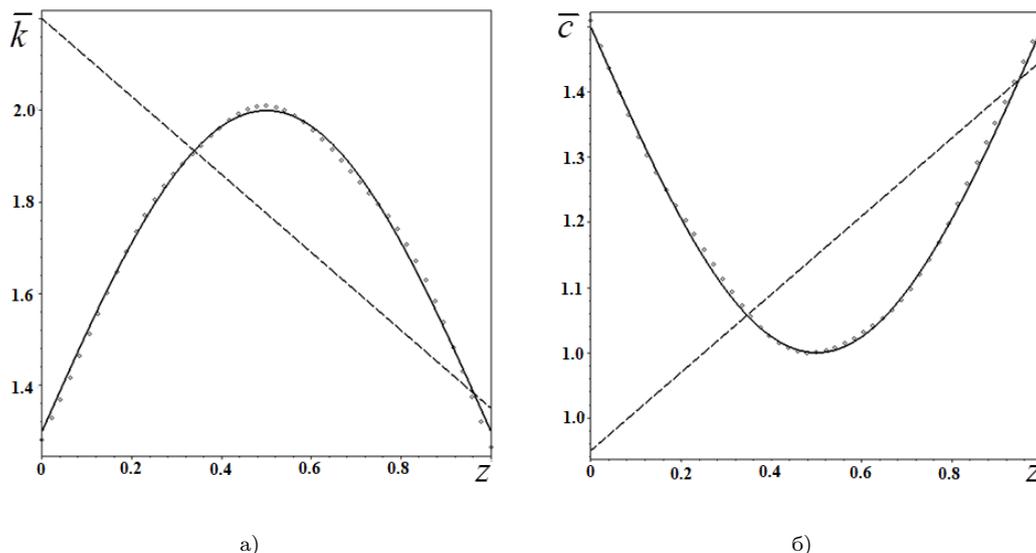


Рис. 4. Результаты реконструкции немонотонных функций: а)  $\bar{k}(z) = 1,3 + 0,7 \sin(\pi z)$ ; б)  $\bar{c}(z) = 1,6 - 0,5 \sin(\pi z)$

Fig. 4. Results of reconstruction of non-monotonic functions: а)  $\bar{k}(z) = 1,3 + 0,7 \sin(\pi z)$ ; б)  $\bar{c}(z) = 1,6 - 0,5 \sin(\pi z)$

## Заключение

В зависимости от точки съема дополнительной информации представлены две постановки коэффициентной обратной задачи теплопроводности для стержня. Обратная задача в двух постановках является нелинейной, при этом поправки определяются на основе построения итерационного процесса. Отрезки съема дополнительной информации определяются на основе анализа чувствительности дополнительной информации к изменению теплофизических характеристик. Проведены вычислительные эксперименты по отдельной реконструкции коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости для монотонных и немонотонных законов их изменения. Выяснено, что погрешность реконструкции уменьшается при приближении точки съема дополнительной информации к точке нагружения. Практическая значимость работы определяется возможностью применения разработанных алгоритмов решения обратных задач теплопроводности для усовершенствования теоретической базы тепловых методов диагностики свойств неоднородных тел.

Автор выражает признательность профессору Ватульяну А.О. за внимание к работе и ценные замечания.

## Литература [References]

1. Алифанов, О.М., Артюхин, Е.А., Румянцев, С.В., *Экстремальные методы решения некорректных задач*. Москва, Наука, 1988. [Alifanov, O.M., Artyukhin, E.A., Rumyantsev, S.V., *Ekstremal'nyye metody resheniya nekorrektnykh zadach = Extreme methods for solving ill-posed problems*. Moscow, Nauka, 1988. (in Russian)]
2. Бек, Дж., Блакуэлл, Б., Сент-Клер, Ч., *Некорректные обратные задачи теплопроводности*. Москва, Мир, 1989. [Beck, J., Blackwell, B., Sent-Kler, Ch. *Nekorrektnyye obratnyye zadachi teploprovodnosti = Ill-posed inverse problems of heat conduction*. Moscow, Mir, 1989. (in Russian)]
3. НАО, D.N., *Methods for inverse heat conduction problems*. Frankfurt/Main, Peter Lang Pub. Inc., 1998.
4. Ватульян, А.О., Нестеров, С.А., *Коэффициентные обратные задачи термомеханики*. Ростов-на-Дону – Таганрог, Издательство Южного федерального университета, 2022. [Vatulyan, A.O., Nesterov, S.A., *Koeffitsiyentnyye obratnyye zadachi termomekhaniki. 2-ye izd., ispr. i dop. = Coefficient inverse problems of thermomechanics*. Rostov-on-Don – Taganrog, Southern Federal University Publishing House, 2022. (in Russian)]

5. Wetherhold, R.C., Seelman, S., Wang, J., The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation. *Compos. Sci. Tech.*, 2014, vol. 56, pp. 1099–1104. DOI: [10.1016/0266-3538\(96\)00075-9](https://doi.org/10.1016/0266-3538(96)00075-9)
6. Birman, V., Byrd, L.W., Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Appl. Mech. Rev.*, 2007, vol. 60, iss. 5, pp. 195–216. DOI: [10.1115/1.2777164](https://doi.org/10.1115/1.2777164)
7. Raddy, J.N., Chin, C.D., Thermoelastic analysis of functionally graded cylinders and plates. *Journal of Thermal Stresses*, 1998, vol. 21, pp. 593–626. DOI: [10.1080/01495739808956165](https://doi.org/10.1080/01495739808956165)
8. Kieback, B., Neubrand, A., Riedel, H., Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering A*, 2003, vol. 362, pp. 81–105.
9. Nedin, R., Nesterov, S., Vatulyan, A., Identification of thermal conductivity coefficient and volumetric heat capacity of functionally graded materials. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016, vol. 102, pp. 213–218. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.06.027](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.06.027)
10. Umbricht, G.F., Rubio, D., Tarzia, D.A., Estimation of a thermal conductivity in a stationary heat transfer problem with a solid-solid interface. *International Journal of Heat and Technology*, 2021, vol. 39, iss. 2, pp. 337–344. DOI: [10.18280/ijht.390202](https://doi.org/10.18280/ijht.390202)
11. Вагульян, А.О., Нестеров, С.А. Об одном подходе к решению коэффициентной обратной задачи. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2018, т. 15, № 1, с. 50–60. [Vatulyan, A.O., Nesterov, S.A., On an approach to the solution of the coefficient inverse heat conduction problem. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2018, vol. 15, no. 1, pp. 50–60 (in Russian)] DOI: [10.31429/vestnik-15-1-50-60](https://doi.org/10.31429/vestnik-15-1-50-60)
12. Кабанихин, С.И., Гасанов, А., Пененко, А.В., Метод градиентного спуска для решения коэффициентной обратной задачи теплопроводности. *Сибирский журнал вычислительной математики*, 2008, т. 11, № 1, с. 41–54. [Kabanikhin, S.I., Hasanov, A., Penenko, A.V., A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat conduction problem. *Numer. Anal. Appl.*, 2008, vol. 1, no. 1, pp. 34–45. DOI: [10.1134/S1995423908010047](https://doi.org/10.1134/S1995423908010047)] DOI: [10.1007/s12258-008-1004-x](https://doi.org/10.1007/s12258-008-1004-x)
13. Lam, T.T., Yeung, W.K., Inverse determination of thermal conductivity for one-dimensional problems. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 1995, vol. 9, iss. 2, pp. 335–342. DOI: [10.2514/3.665](https://doi.org/10.2514/3.665)
14. Cao, K., Lesnic, D., Determination of space-dependent coefficients from temperature measurements using the conjugate gradient method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2018, vol. 34, no. 4, pp. 1370–1400. DOI: [10.1002/num.22262](https://doi.org/10.1002/num.22262)
15. Dulikravich, G.S., Reddy, S.R., Pasqualetto, M. A., Colaco, M.J., Orlande, H.R., Coverston, J., Inverse determination of spatially varying material coefficients in solid objects. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 2016, vol. 24, pp. 181–194. DOI: [10.1515/jiip-2015-0057](https://doi.org/10.1515/jiip-2015-0057)
16. Razzaghi, H., Kowsary, F., Ashjaee, M., Derivation and application of the adjoint method for estimation of both spatially and temporally varying convective heat transfer coefficient. *Applied Thermal Engineering*, 2019, vol. 154, pp. 63–75. DOI: [10.1016/j.applthermaleng.2019.03.068](https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2019.03.068)
17. Raudensky, M., Woodbary, K. A., Kral, J., Genetic algorithm in solution of inverse heat conduction problems. *Numerical Heat Transfer. Part B: Fundamentals*, 1995, vol. 28, no. 3, pp. 293–306. DOI: [10.1080/10407799508928835](https://doi.org/10.1080/10407799508928835)
18. Chen, W.L., Chou, H.M., Yang, Y.C., An inverse problem in estimating the space – dependent thermal conductivity of a functionally graded hollow cylinder. *Composites: Part B*, 2013, vol. 50, pp. 112–119. DOI: [10.1016/j.compositesb.2013.02.010](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.02.010)
19. Xu, M.H., Cheng, J.C., Chang, S.Y., Reconstruction theory of the thermal conductivity depth profiles by the modulated photo reflectance technique. *J. Appl. Phys.*, 2004, vol. 84, iss. 2, pp. 675–682. DOI: [10.1063/1.368122](https://doi.org/10.1063/1.368122)
20. Danilaev, P.G., *Coefficient inverse problems for parabolic type equations and their applications*. Utrecht, Boston, Koln, Tokyo, VSP, 2001.
21. Yeung, W.K., Lam, T.T., Second-order finite difference approximation for inverse determination of thermal conductivity. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1996, vol. 39, iss. 17, pp. 3685–3693. DOI: [10.1016/0017-9310\(96\)00028-2](https://doi.org/10.1016/0017-9310(96)00028-2)
22. Huang, C.H., Özişik, M.N. A direct integration approach for simultaneously estimating spatially varying thermal conductivity and heat capacity. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 1990, vol. 11, iss. 3, pp. 262–268. DOI: [10.1016/0142-727X\(90\)90047-F](https://doi.org/10.1016/0142-727X(90)90047-F)
23. Тихонов, А.Н., Гончарский, А.В., Степанов, В.В., Ягола, А.Г., *Численные методы решения*

- некорректных задач*. Москва, Наука, 1990. [Tikhonov, A.N., Goncharky, A.V., Stepanov, V.V., Yagola, A.G, *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach = Numerical methods for solving ill-posed problems*, Moscow, Nauka, 1990. (In Russian)]
24. Ватульян, А.О., Юров, В.О., Об одном новом подходе к идентификации неоднородных механических свойств упругих тел. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*, 2024, т. 24, № 2, с. 209–221. [Vatulyan, A.O., Yurov, V.O., On a new approach to identifying inhomogeneous mechanical properties of elastic bodies. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika = Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, no. 2, pp. 209–221. (in Russian)] DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-2-209-221](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-209-221)
  25. Ватульян, А.О., Юров, В.О., Об оценке чувствительности коэффициентов моделей для неоднородных тел. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2023, № 3, с. 152–162. [Vatulyan, A.O., Yurov, V.O., On the Estimation of the Sensitivity of the Coefficients of Models for Inhomogeneous Solids. *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, pp. 793–801. DOI: [10.3103/S0025654422601768](https://doi.org/10.3103/S0025654422601768)] DOI: [10.31857/S0572329922600839](https://doi.org/10.31857/S0572329922600839)
  26. Durbin, F., Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. *The Computer Journal*, 1974, vol. 17, pp. 371–376. DOI: [10.1093/comjnl/17.4.371](https://doi.org/10.1093/comjnl/17.4.371)