

УДК 51.37

EDN: GHRFHK DOI: 10.31429/vestnik-21-3-26-31

Вариационные процедуры оценки мощности источников загрязнения в модели переноса пассивной примеси

В. С. Кочергин  , С. В. Кочергин 

Морской гидрофизический институт РАН, ул. Капитанская 2, Севастополь, 299011, Россия

✉ Кочергин Владимир Сергеевич; ORCID 0000-0002-6767-1218; SPIN 9479-0245; e-mail: vskochoer@gmail.com

Аннотация. Целью работы является построение вариационных алгоритмов идентификации мощностей ряда источников постоянной мощности по данным измерений концентрации примеси на конечный момент времени. При реализации вариационной процедуры ассимиляции решается основная, сопряженная и задача в вариациях. Поиск искомым параметров осуществляется итерационно. При реализации алгоритма фильтрации для построения алгебраической системы уравнений используется метод оценки, двойственное представление функционала, преобразование плоских вращений переопределенной системы уравнений, что позволяет осуществить фильтрацию данных и найти искомые значения мощностей источников.

Ключевые слова: концентрация взвешенного вещества, вариационный алгоритм, ассимиляция, сопряженная задача, вариационная фильтрация.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания по теме FNNN-2021-0005 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).


Цитирование: Кочергин В. С., Кочергин С. В. Вариационные процедуры оценки мощности источников загрязнения в модели переноса пассивной примеси // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 3. С. 26–31. EDN: GHRFHK. DOI: 10.31429/vestnik-21-3-26-31

Поступила 25 июля 2024 г. После доработки 24 августа 2024 г. Принято 2 сентября 2024 г. Публикация 24 сентября 2024 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Variational Procedures for Estimating the Power of Pollution Sources in the Passive Admixture Transfer Model

V. S. Kochergin , S. V. Kochergin

Marine Hydrophysical Institute, Kapitanskaya str., 2, Sevastopol, 299011, Russia

✉ Vladimir S. Kochergin; ORCID 0000-0002-6767-1218; e-mail: vskochoer@gmail.com

Abstract. The paper considers variational algorithms for identifying capacities for a number of sources of constant power based on admixture concentration measurements at a finite time. In the process of implementing, the variational assimilation procedure, the main, conjugate and task in variations is solved. The search for the desired parameters is carried out iteratively. When implementing the filtering algorithm, the estimation method, the dual representation of the functional, the transformation of plane rotations of the redefined system of equations are used to construct an algebraic system of equations, which allows filtering data and finding the desired values of the source capacities. In this paper, an algorithm is proposed for searching for the power values of several sources by assimilating measurement data on the admixture concentration. When implementing a variation procedure, the integration of the main, conjugate tasks and tasks in variations is performed. The latter is necessary to find an iterative parameter in the process of gradient descent. An algorithm based on the application of the estimation method and a variational algorithm for filtering measurement data is presented. The latter is based on the use of the procedure of plane rotations of the original redefined system of equations and the minimization of a special kind of functional. An essential point in the construction of the algorithm is the linearity of the transfer equation, which allows us to consider its solution as the sum of solutions when specifying single point sources. Thus, to solve the problem of identifying the power of a number of sources, it is proposed, to use variational

assimilation procedures based on solving related problems and minimizing the corresponding prediction quality functionals. In addition, an algorithm based on a variational filtering procedure for systems of linear algebraic equations is presented, which are based on the estimation method and solving a series of corresponding conjugate problems. The results can be used to solve various environmental problems in the waters of the Azov and Black Seas.

Keywords: concentration of suspended matter, variational algorithm, assimilation, adjoint problem, variational filtration.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment on the topic FNNN-2021-0005 “Complex interdisciplinary studies of oceanological processes that determine the functioning and evolution of ecosystems in the coastal zones of the Black and Azov Seas” (code “Coastal Research”).

Cite as: Kochergin, V. S., Kochergin, S. V., Variational procedures for estimating the power of pollution sources in the passive admixture transfer model. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 3, pp. 26–31. DOI: 10.31429/vestnik-21-3-26-31

Received 25 July 2024. Revised 24 August 2024. Accepted 2 September 2024. Published 24 September 2024. The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Для мониторинга экологической обстановки в водоемах, например, в Азовском море, из-за антропогенной нагрузки в связи с интенсивным развитием транспортной инфраструктуры, требуется создание систем, в основе которых заложено использование численных моделей [1, 2] динамики вод, моделей распространения и трансформации загрязнений [3, 4], а также алгоритмов усвоения данных измерений [5–11] для определения параметров таких моделей. Достаточно полный обзор по методам ассимиляции представлен в работе [8]. Возможности вариационного подхода позволяют решать задачи широкого класса [12, 13]. В данной работе предложен алгоритм поиска значений мощностей нескольких источников за счет усвоения данных измерений о концентрации примеси. При реализации вариационной процедуры производится интегрирование основной, сопряженной задач и задачи в вариациях. Последняя необходима для поиска итерационного параметра в процессе градиентного спуска.

Также приведен алгоритм, основанный на применении метода оценки [14] и вариационного алгоритма фильтрации [15] данных измерений. В основе последнего лежит использование процедуры плоских вращений исходной переопределенной системы уравнений и минимизация функционала специального вида. Существенным моментом при построении алгоритма является линейность уравнения переноса, что позволяет рассматривать его решение как сумму решений при задании одиночных точечных источников.

1. Модель переноса

Рассмотрим модель переноса пассивной примеси [2, 3] в σ -координатах

$$\frac{\partial DC}{\partial t} + LC = 0, \quad (1.1)$$

на боковых границах используется условие

$$\Gamma : \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (1.2)$$

а на поверхности и на дне

$$\begin{aligned} \sigma = 0 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= 0, \\ \sigma = -1 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= Q = \sum_i Q_B^i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i), \quad i = 1, Z. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Начальные данные задаются в виде

$$C(x, y, \sigma, 0) = C_0(x, y, \sigma), \quad (1.4)$$

где

$$L = \frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial D}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K}{D} \frac{\partial D}{\partial \sigma},$$

$t \in [0, T]$ — время; D — динамическая глубина; x, y — горизонтальные координаты; σ — безразмерная вертикальная координата, изменяющаяся в пределах от -1 (на дне) до 0 (на поверхности моря); U, V, W — компоненты поля скорости; C — концентрация примеси; A_H и K — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии; \mathbf{n} — нормаль к боковой границе, Γ — граница области интегрирования модели M ; $M_t = M \times [0, T]$, Z — количество источников загрязнения.

2. Вариационный алгоритм идентификации

Рассмотрим вариационный алгоритм ассимиляции. Задача усвоения данных измерений решается за счет минимизации выпуклого квадратичного функционала качества прогноза

$$I_0 = \frac{1}{2} (P(RC - C^{\text{изм}}), P(RC - C^{\text{изм}}))_{M_t}, \quad (2.1)$$

где P — оператор восполнения нулями поля невязок прогноза при отсутствии данных измерений, R — оператор проектирования в точки наблюдений. Функционал (2.1) при линейных ограничениях (1.1)–(1.4) запишем в виде

$$I = I_0 + \left[\frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial DWC}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial DC}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial DC}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial DC}{\partial \sigma}, C^* \right]_{M_t} + \\ + \left(\frac{\partial C}{\partial n}, C^* \right)_{\Gamma_t} + (C - C_0, C^*)_M + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^* \right)_{\sigma_t^0} + \\ + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma} - \sum_i Q_B^i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i), C^* \right)_{\sigma_t^{-1}}, \quad (2.2)$$

где скалярное произведение в L_2 определяется стандартным образом. Проинтегрируем соответствующее (2.2) выражение для вариации функционала по частям с учетом аналога уравнения неразрывности и краевых условий. В (2.2) $\sigma_t^0 = \sigma^0 \times [0, T]$, $\sigma_t^{-1} = \sigma^{-1} \times [0, T]$, σ^0 — поверхность моря, а σ^{-1} — дно. Выберем в качестве множителей Лагранжа решение следующей задачи:

$$-\frac{\partial DC^*}{\partial t} + L^* C^* = 0, \\ \Gamma : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \quad \sigma = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \quad \sigma = -1 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \quad (2.3) \\ t = T : C^* = P(C^{\text{изм}} - RC),$$

где L^* — формально сопряженный оператор к L .

При идентификации действующих на всем промежутке времени источников постоянной мощности имеем

$$\nabla_{Q_B^i} I = \int_0^T C^* (-1, x_i, y_i, t) dt. \quad (2.4)$$

Значение мощностей источников определяется итерационно

$$Q_{B_{n+1}}^i = Q_{B_n}^i + \tau \nabla_{Q_B^i} I, \quad (2.5)$$

где τ — итерационный параметр, который определяется [12] с учетом решения задачи в вариациях. Следует заметить, что проведенные тестовые расчеты показали хорошую сходимость итерационного процесса и достаточную точность идентификации мощности источников при использовании полной информации о поле концентрации. При задании небольшого количества точек измерений результат существенным образом зависит от их местоположения, тогда естественным образом встает задача планирования эксперимента.

3. Алгоритм фильтрации

Умножая (1.1)–(1.4) на C^* и интегрируя по частям с учетом краевых условий и аналога уравнения неразрывности в σ -координатах, выберем C^* как решение следующей сопряженной задачи:

$$-\frac{\partial DC^*}{\partial t} + L^*C^* = 0, \quad (3.1)$$

$$\Gamma : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \quad \sigma = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \quad \sigma = -1 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = g, \quad (3.2)$$

$$t = T : C^* = 0. \quad (3.3)$$

В итоге из интегрального тождества получим

$$\sum_i \int_{B_t} Q_B^i C^* dB_t = \int_{B_t} Cg dB_t, \quad (3.4)$$

где B — дно моря, $g = \delta(t - T) \delta(x - x_n) \delta(y - y_n)$, $n = 1, \dots, N$, N — общее количество точек измерений в конечный момент времени. Учитывая представления для Q и g из формулы (3.4), получим

$$\sum_i Q_B^i \int_0^T C_n^*(t, x_i, y_i, -1) dt = C(T, x_n, y_n, -1), \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.5)$$

Таким образом, по информации о концентрации в точках N измерений для конечного момента времени строится система из N уравнений. В случае переопределенной системы, т.е. когда число уравнений больше числа источников, появляется возможность применения одного из известных методов, например, значения Q_B могут определяться из системы (3.5) на основе метода вариационной фильтрации [15], который успешно применяется при решении аналогичных задач. Для переопределенной системы (3.5) в случае наличия ошибок измерений необходима фильтрация данных с учетом всей информации, имеющейся в N уравнениях. Начальная система уравнений при помощи ортогонального преобразования плоских вращений трансформируется к эквивалентной системе. Углы поворота находятся из максимума функционала, характеризующего соотношение коэффициентов системы, априорной информации о решении и правых частях. Алгоритм реализуется итерационно. Коэффициенты такого преобразования ищутся, исходя из максимума квадратичного функционала специального вида. В итоге получается другая система алгебраических уравнений, эквивалентная (3.5).

В результате выполнения такой процедуры уравнения новой системы сортируются по рангу. В итоге в верхних строках системы оказываются уравнения с наилучшей информативностью.

Заключение

Таким образом, для решения задачи идентификации мощности ряда источников предлагается использование вариационных процедур ассимиляции, основанных на решении сопряженных задач и минимизации соответствующих функционалов качества прогноза. Кроме этого, представлен алгоритм, основанный на вариационной процедуре фильтрации систем линейных алгебраических уравнений, которые строятся на основе метода оценки и решении серии соответствующих сопряженных задач. Результаты могут быть использованы при решении различных задач экологической направленности в акваториях Азовского и Черного морей.

Литература [References]

1. Blumberg, A.F., Mellor, G.L., A description of the three-dimensional coastal ocean circulation model. Three-dimensional coastal ocean models. *Am. Geoph. Union.*, 1987, vol. 4, pp. 1–16.
2. Фомин, В.В., Численная модель циркуляции вод Азовского моря. *Научные труды УкрНИГМИ*, 2002, вып. 249, с. 246–255. [Fomin, V.V., Numerical model of water circulation in the Sea of Azov. *Nauchnye trudy UkrNIGMI = Scientific works of the Ukrainian Hydrometeorological Institute*, 2002, issue 249, pp. 246–255. (in Russian)]
3. Иванов, В.А., Фомин, В.В., *Математическое моделирование динамических процессов в зоне море – суша*. Севастополь, ЭКОСИ-гидрофизика, 2008. [Ivanov, V.A., Fomin, V.V., *Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskikh protsessov v zone more – susha = Mathematical modeling of dynamic processes in the sea-land zone*. Sevastopol, EKOSI-hydrophysics, 2008. (in Russian)]
4. Марчук, Г.И., *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды*. Москва, Наука, 1982. [Marchuk, G.I., *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayushchey sredy = Mathematical modeling in the problem of the environment*. Moscow, Nauka, 1982. (in Russian)]
5. Marchuk, G.I., Penenko, V.V., Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment. In: Marchuk, G.I. (eds), *Modelling and Optimization of Complex System. Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 1979, vol. 18. Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: [10.1007/BFb0004167](https://doi.org/10.1007/BFb0004167)
6. Marchuk, G.I., Agoskov, V.I., Shutyaev, V.P., *Adjoint Equations and Perturbation Algorithms in Nonlinear Problems*. New York, CRC Press, 1996.
7. Shutyaev, V. P., Le Dimet, F.-X., Parmuzin, E., Sensitivity analysis with respect to observations in variational data assimilation for parameter estimation. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2018, vol. 25, iss. 2, pp. 429–439. DOI: [10.5194/npg-25-429-2018](https://doi.org/10.5194/npg-25-429-2018)
8. Shutyaev, V.P., Methods for Observation Data Assimilation in Problems of Physics of Atmosphere and Ocean. *Izvestiya Atmospheric and Oceanic Physics*, 2019, vol. 55, pp. 17–31. DOI: [10.1134/S0001433819010080](https://doi.org/10.1134/S0001433819010080)
9. Shutyaev V.P., Le Dimet F.-X., Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Sensitivity of functionals in problems of variational assimilation of observational data. *Izvestiya Atmospheric and Oceanic Physics*, 2015, vol. 51, iss. 3, pp. 342–350. DOI: [10.1134/S0001433815030111](https://doi.org/10.1134/S0001433815030111)
10. Zalesny V.B., Agoshkov V.I., Shutyaev V.P., Le Dimet, F., Ivchenko V.O., Numerical modeling of ocean hydrodynamics with variational assimilation of observational data. *Izvestiya Atmospheric and Oceanic Physics*, 2016, vol. 52, iss. 4, pp. 431–442. DOI: [10.1134/S0001433816040137](https://doi.org/10.1134/S0001433816040137)
11. Shutyaev, V.P., Parmuzin, E.I., Sensitivity of functionals to observation data in a variational assimilation problem for a sea thermodynamics model. *Numer. Analys. Appl.*, 2019, vol. 12, pp. 191–201. DOI: [10.1134/S1995423919020083](https://doi.org/10.1134/S1995423919020083)
12. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Идентификация мощности источника загрязнения в Казантипском заливе на основе применения вариационного алгоритма. *Морской гидрофизический журнал*, 2015, № 2, с. 79–88. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Identification of a pollution source power in the kazantip bay applying the variation algorithm. *Physical Oceanography*, 2015, vol. 2, pp. 69–76. DOI: [10.22449/1573-160X-2015-2-69-76](https://doi.org/10.22449/1573-160X-2015-2-69-76) DOI: [10.22449/0233-7584-2015-2-79-88](https://doi.org/10.22449/0233-7584-2015-2-79-88)
13. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Использование вариационных принципов и решения сопряженной задачи при идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси. *Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа*, 2010, вып. 22, с. 240–244. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Using variational principles and solving the conjugate problem in identifying input parameters of the passive impurity transfer model. *Ekologicheskaya bezopasnost' pribrezhnoy i shel'fovoy zon i kompleksnoe ispol'zovanie resursov shel'fa = Environmental safety of coastal and shelf zones and integrated use of shelf resources*, 2010, iss. 22, pp. 240–244. (in Russian)]
14. Кочергин, В.С., Определение поля концентрации пассивной примеси по начальным данным на основе решения сопряженных задач уравнений. *Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа*, 2011, вып. 25, т. 2, с. 270–276. [Kochergin, V.S., Determination of the field of concentration of a passive impurity based on initial data based on solving conjugate problems of equations. *Ekologicheskaya bezopasnost' pribrezhnoy i shel'fovoy zon i kompleksnoe ispol'zovanie resursov shel'fa = Environmental safety of coastal and shelf zones and integrated use of shelf resources*, 2011, iss. 25, vol. 2, pp. 270–276. (in Russian)]
15. Страхов, В.Н., Метод фильтрации систем линейных алгебраических уравнений — основа для

решения линейных задач гравиметрии магнитометрии. *Докл. АН СССР*, 1991, т. 320, № 3, с. 595–599. [Strakhov, V.N., Method of filtration of linear algebraic systems equations – the basis for solving linear gravimetry problems of magnetometry. *Dokl. USSR Academy of Sciences*, 1991, vol. 320, no. 3, pp. 595–599. (in Russian)]