УДК 539.375:534.1

К ИССЛЕДОВАНИЮ РЕЗОНАНСНЫХ СВОЙСТВ СРЕД С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ[1]

О. Д. Пряхина[2], ***А. В. Смирнова***[3]

TO THE STUDY OF RESONANCE PROPERTIES OF MEDIA WITH INHOMOGENEITIES OF DIFFERENT NATURE

Pryakhina O. D., Smirnova A. V.

The work offers a new method aimed at constructing matrix-symbols of the kernels of integral equations systems and their determinants. The method is based on the statement and solution of boundary-value problems for viruses of vibration strength with definite structure.

Многие прикладные задачи, в частности, задачи определения критериев оценки прочностных свойств новых конструкционных материалов, фундаментальные проблемы оценки сейсмичности литосферных плит и прогноза землетрясений, приводят к необходимости создания методов анализа напряжённо-деформированного состояния с позиции механики разрушения с учетом связности механических, электромагнитных и тепловых факторов, а также с учетом наиболее распространенных видов неоднородностей или дефектов — включений и трещин, присущих слоистым структурам.

Динамические задачи для полуограниченных сред, содержащих совокупность неоднородностей различной природы, являются на сегодняшний день малоизученными. Сложность их исследования обусловлена тем, что вследствие зависимости напряженно-деформированного состояния системы от многих параметров традиционные аналитические и численные методы анализа становятся неэффективными даже при небольшом количестве дефектов, а с ростом частоты колебаний и в областях больших размеров многие из них неприменимы. Кроме того, неединственность решений динамических задач для сред с совокупностью неоднородностей при некоторых значениях параметров, делает эти задачи еще более сложными. В связи с этим актуальными становятся как исследования рассматриваемого класса задач в новой постановке, так и разработка новых численно-аналитических методов их решения. Особенно важным является создание методов, направленных на изучение резонансных свойств механических систем.

Исследования резонансных явлений, существование которых в полуограниченных телах было предсказано И. И. Воровичем, не теряют своей актуальности и на сегодняшний день. В [1] дан глубокий анализ общего представления решения ИУ динамических смешанных задач, состоящего из энергетической составляющей, обладающей конечной

[1]Работа выполнена при поддержке администрации Краснодарского края и РФФИ (03-01-00662, 03-01-96658, 03-01-96645, 05-01-00811), ФЦНТП (РИ-112/001/301).

[2]Пряхина Ольга Донатовна, д-р физ.-мат. наук, заведующая кафедрой высоких технологий, прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета.

[3]Смирнова Алла Васильевна, канд. физ.-мат. наук, докторант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета, доцент.

энергией, и неэнергетической с бесконечной энергией, обеспечивающей излучение энергии. В случае существования лишь энергетической составляющей решения полуограниченное тело при наличии массивного штампа приобретает точки изолированного спектра и возможен резонанс. Резонансы такого рода были названы низкочастотными или B-резонансами. Они возникают в диапазоне $0 < \omega < \omega_{\text{кр}} \neq 0$ докритических частот запирания волноводных свойств полуограниченного тела. Доказано, что точек дискретного спектра всегда конечное число, и они лежат в указанном диапазоне частот. Если $\omega_{\text{кр}} = 0$, то рассматриваемая система не имеет низкочастотных резонансов. Фундаментальные результаты по исследованию низкочастотных резонансов содержатся в обобщающей монографии [2].

В [3,4] установлено, что в полуограниченных телах типа полосы, слоя, цилиндра существование лишь энергетической составляющей решения возможно и для $\omega > \omega_{\text{кр}}$, но только при выполнении определенных условий. Первоначально полученные условия связывали размеры штампа с параметрами среды и не содержали ограничений на его массу. Такой режим получил название резонанса невесомых штампов, а условия его возникновения были названы условиями статичности. Большим научным достижением стало обоснование существования резонансных режимов в средах с неоднородностями, реализуемых также в диапазоне частот $\omega > \omega_{\text{кр}}$ при выполнении определенных условий — специальным образом ориентированных включений и трещин, параметры которых удовлетворяют некоторым соотношениям, связывающим их с характеристиками полуограниченного тела. Эти резонансы получили название высокочастотных [5], а условия их возникновения были названы условиями локализации вибрационного процесса. Обнаруженное свойство совокупности неоднородностей при определенных условиях локализовать волновой процесс в своей окрестности признано научным открытием В. А. Бабешко, И. И. Воровича, И. Ф. Образцова «Явление высокочастотного резонанса в полуограниченных телах с неоднородностями». Таким свойством обладают не только множественные, но и отдельные неоднородности. Способность локализовать волновой процесс присуща средам, проводящим волны различной физической природы — упругие, электромагнитные, звуковые, что имеет подтверждение в теоретических и экспериментальных исследованиях.

В. А. Бабешко создана новая теория — теория «вирусов» вибропрочности, изучающая специальные сочетания неоднородностей и их влияние на динамические, в том числе и прочностные свойства деформируемых слоистых сред. Теория, являясь математически и механически строгой, способствует отходу от понятия идеальной сплошности, уводит от традиционных постановок задач и стратегии исследования. Она нацелена на выделение, классификацию и изучение свойств специальных механических объектов, находящихся в деформируемой среде, способных в условиях вибрации локализовать волновой процесс и вызвать резонансы. Основополагающие результаты по теории «вирусов» вибропрочности, определению условий локализации и развитию принципиально новых подходов к их исследованию получены В. А. Бабешко и О. М. Бабешко [5–13].

В настоящей работе рассматривается совокупность простейших типов дефектов — плоских трещин и жестких включений, расположенных в параллельных плоскостях. Основное внимание при этом уделено тому факту, что количество неоднородностей носит множественный характер.

Исследование динамических процессов в слоистых полуограниченных средах, содержащих совокупность неоднородностей, приводит к необходимости решения системы интегральных уравнений I рода, которую можно записать в операторном виде

$$\mathbf{KQ}(\alpha,\beta) = \int\limits_{\delta_1}\int\limits_{\delta_2} \mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)\mathbf{Q}(\alpha,\beta)\times \\ \times\, e^{-i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha\, d\beta = \mathbf{f}(x,y), \quad (1)$$
$$(x,y) \in \mathbf{\Omega},$$

где $\mathbf{f}(x,y) = \{\mathbf{w}_0^0, \mathbf{w}_1^0, \mathbf{w}_2^0, \ldots, \mathbf{w}_L^0, \mathbf{t}_1^0, \mathbf{t}_2^0, \ldots, \mathbf{t}_L^0\}$ — многомерный вектор, компонентами которого являются трехмерные векторы перемещений $\mathbf{w}_0^0$, $\mathbf{w}_k^0$, заданные на поверхности среды в области контакта Ω_0 и на границах включений Ω_k, а также векторы усилий $\mathbf{t}_k^0$, заданные на берегах трещин в областях $\tilde{\Omega}_k$ $(k = 1,2,\ldots,\tilde{N})$; $\mathbf{\Omega} = \{\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{\tilde{N}}, \tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \ldots, \tilde{\Omega}_{\tilde{N}}\}$; $\mathbf{Q} = \{\mathbf{T}_0, \boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_{\tilde{N}}, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{\tilde{N}}\}$ — многомерный вектор, имеющий своими компонентами

трансформанты Фурье векторов поверхностных контактных напряжений $\mathbf{t}_0(x,y)$, скачков напряжений на границах включений $\Delta\mathbf{t}_k(x,y)$ и скачков перемещений $\Delta\mathbf{w}_k(x,y)$ на берегах трещин. Носителем каждой из вектор-функций $\mathbf{t}_0(x,y)$, $\Delta\mathbf{t}_k(x,y)$, $\Delta\mathbf{w}_k(x,y)$ является соответствующая область из $\mathbf{\Omega}$.

Матрица-символ $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ ядра системы интегральных уравнений (ИУ) является блочной, размерность матриц $\mathbf{K}_{ij}$, являющихся ее элементами, определяется физико-механическими свойствами среды. Для упругих материалов это матрицы размерности 3×3, а в общем случае для термоэлектроупругих сред — 5×5

$$\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)=\|\mathbf{K}_{ij}\|_{i,j=1}^{2\tilde{N}+1}.$$

Таким образом, размерность системы ИУ равна $5(2\tilde{N}+1)\times5(2\tilde{N}+1)$ в общем случае и $3(2\tilde{N}+1)\times3(2\tilde{N}+1)$ для упругих сред, что требует создания специальных методов их исследования. Ключевыми вопросами здесь являются разработка методов построения матриц-символов Грина и на их основе матриц-символов ядер для систем ИУ большой размерности, аналитическое представление определителей этих матриц, позволяющее эффективно реализовать алгоритмы численного анализа условий возникновения резонансных режимов колебаний.

Условия локализации вибрационного процесса для «вирусов» вибропрочности различного строения сформулированы в [6, 8, 10, 11, 14].

Теорема 1. [10]. Пусть для заданного «вируса» параметры задачи таковы, что имеет место равенство

$$\mathbf{Q}_0(\alpha,\beta)=0$$

при $\lambda=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\xi_k$, $k=1,2,\ldots,m$.

Тогда «вирус» локализует волновой процесс в своей окрестности.

Здесь $\xi_k(\alpha,\beta)(k=1,2,\ldots,m)$ — одномерное корневое множество $\det\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$, $\mathbf{Q}_0(\alpha,\beta)$ — многомерная вектор-функция, являющаяся решением системы ИУ, получающейся из (1) заменой матрицы-символа ядра $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ на $\mathbf{K}_0(\alpha,\beta,\omega)$ на основании представления

$$\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)=\mathbf{K}_0(\alpha,\beta,\omega)\mathbf{K}_*(\alpha,\beta,\omega),$$

$\mathbf{K}_0(\alpha,\beta,\omega)$ — матрица, сохраняющая асимптотическое поведение $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ на бесконечности и не имеющая особенностей на вещественной оси $\operatorname{Im}\lambda=0$. Способы построения такого представления описаны в [1, 2, 15].

Предлагаемый в работе метод построения матриц-символов ядер систем ИУ и их определителей основан на постановке и решении краевых задач для «вирусов» вибропрочности определенного строения. Введение специальных матриц, связанных с типом дефекта и его положением в слоистой среде, позволило преобразовать блочные матрицы-символы ядер систем ИУ большой размерности к блочным треугольным матрицам. В общем случае термоэлектроупругой среды получено представление определителя матрицы $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ в виде произведения определителей указанных матриц. Между определенными классами «вирусов» вибропрочности и функциями, описывающими особые множества определителей их матриц-символов Грина, установлено взаимнооднозначное соответствие. Для определителей матриц-символов ядер систем ИУ, соответствующих произвольному количеству и различным сочетаниям неоднородностей, расположенных в параллельных плоскостях пакета изотропных слоев на жестком основании, получено представление в виде отношения целых функций. Числителем является произведение функций, каждая их которых зависит только от геометрических и механических параметров среды, заключенной между указанными плоскостями. Знаменателем является знаменатель определителя матрицы-символа Грина многослойной среды, не содержащей неоднородностей, связанных с нарушением ее сплошности. Достоинством такого представления является исключение на стадии аналитического построения корневых и полярных множеств определителя, имеющих пересечения при произвольных значениях параметров механической системы, что является важным при определении условий локализации вибрационного процесса системой дефектов.

1. Изложим метод на примере задачи о гармонических колебаниях пакета N упругих (анизотропных) слоев, занимающего объем $(-\infty<x,y<+\infty;\ -H\leqslant z\leqslant0)$, с жестко защемленной нижней гранью, вызванных поверхностными усилиями и вибрацией берегов трещин, расположенных в $\tilde{N}$ уровнях по глубине пакета.

Перемещения $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$ точек среды описываются системой дифференциальных уравнений в частных производных [16] со следующими граничными условиями (общий множитель $e^{-i\omega t}$ опущен):
на верхней грани

$$\mathbf{t}(x,y,z)|_{z=0} = \mathbf{t}_0; \tag{2}$$

на границах раздела физико-механических свойств слоев

$$\begin{cases} \mathbf{w}_k^+ = \mathbf{w}_k^-, \\ \mathbf{t}_k^+ = \mathbf{t}_k^-, \end{cases} \tag{3}$$

$$z = -z_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1;$$

в плоскостях расположения трещин

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{t}}_k = \tilde{\mathbf{t}}_k^0, & (x,y) \in \tilde{\Omega}_k, \\ \Delta\mathbf{w}_k = 0, & (x,y) \notin \tilde{\Omega}_k, \end{cases} \tag{4}$$

$$z = -\tilde{z}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tilde{N};$$

на нижней грани пакета

$$\mathbf{w}(x,y,-H) = 0. \tag{5}$$

Здесь

$$\mathbf{w}(x,y,z)|_{z=-z_k\pm 0} = \mathbf{w}_k^{\pm},$$
$$\mathbf{t}(x,y,z)|_{z=-z_k\pm 0} = \mathbf{t}_k^{\pm},$$
$$\mathbf{w}(x,y,z)|_{z=-\tilde{z}_k\pm 0} = \tilde{\mathbf{w}}_k^{\pm},$$
$$\Delta\mathbf{w}_k = \tilde{\mathbf{w}}_k^+ - \tilde{\mathbf{w}}_k^-, \quad \mathbf{t}(x,y,z)|_{z=-\tilde{z}_k\pm 0} = \tilde{\mathbf{t}}_k^{\pm}.$$

Сформулированная краевая задача описывает «вирус», который в обозначениях работы [10] имеет структуру

$$V\begin{pmatrix} 1/-H;\infty//2/0;\infty/-z_1;\infty/ \\ /-z_2;\infty/\ldots/-z_{N-1};\infty/ \\ /-\tilde{z}_1;\tilde{\Omega}_1/-\tilde{z}_2;\tilde{\Omega}_2/\ldots/-\tilde{z}_{\tilde{N}};\tilde{\Omega}_{\tilde{N}} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Это «вирус» уровня $L = \tilde{N} + N + 1$ смешанного типа.

Примем для (6) сокращенную запись

$$V_N\begin{pmatrix} 1/-H;\infty//2/0;\infty/-\tilde{z}_1;\tilde{\Omega}_1/ \\ /-\tilde{z}_2;\tilde{\Omega}_2/\ldots/-\tilde{z}_{\tilde{N}};\tilde{\Omega}_{\tilde{N}} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Индекс N указывает на количество слоев, заключенных между плоскостями $z = 0$ и $z = -H$.

В силу линейной постановки решение исходной задачи представимо в виде суперпозиции решений двух задач — задачи 1 и задачи 2.

Задача 1.

$$\mathbf{L}\mathbf{w} = 0;$$
$$\mathbf{t}(x,y,z)|_{z=0} = \mathbf{t}_0; \tag{8}$$
$$\begin{cases} \mathbf{w}_k^+ = \mathbf{w}_k^-, \\ \mathbf{t}_k^+ = \mathbf{t}_k^-, \end{cases}$$
$$z = -z_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1;$$
$$\mathbf{w}(x,y,-H) = 0.$$

Задача 2.

$$\mathbf{L}\mathbf{w} = 0;$$
$$\mathbf{t}(x,y,z)|_{z=0} = 0; \tag{9}$$
$$\begin{cases} \mathbf{w}_k^+ = \mathbf{w}_k^-, \\ \mathbf{t}_k^+ = \mathbf{t}_k^-, \end{cases}$$
$$z = -z_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1;$$
$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{t}}_k = \tilde{\mathbf{t}}_k^0, & (x,y) \in \tilde{\Omega}_k, \\ \Delta\mathbf{w}_k = 0, & (x,y) \notin \tilde{\Omega}_k, \end{cases}$$
$$z = -\tilde{z}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tilde{N};$$
$$\mathbf{w}\,(x,y,-H) = 0.$$

Здесь $\mathbf{L}$ — линейный дифференциальный оператор, определяющий перемещения точек деформируемой среды.

Задача 1 описывает «вирус» уровня $L = N + 1$ смешанного типа

$$V_N\,(1/-H;\infty//2/0;\infty)\,. \tag{10}$$

Задача 2 описывает «вирус» уровня $L = \tilde{N} + N + 1$ смешанного типа (7)

$$V_N\begin{pmatrix} 1/-H;\infty//2/0;\infty/ \\ /-\tilde{z}_1;\tilde{\Omega}_1/\ldots/-\tilde{z}_{\tilde{N}};\tilde{\Omega}_{\tilde{N}} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Эффективный метод построения матрицы-символа Грина $\mathbf{K}_N(\alpha,\beta,z,\omega)$, соответствующей «вирусу» (10) предложен в [2]. В этом случае трансформанты Фурье векторов перемещений и поверхностных усилий связаны соотношением

$$\mathbf{W}(\alpha,\beta,z,\omega) = \mathbf{K}_N(\alpha,\beta,z,\omega)\mathbf{T}_0.$$

Для построения решения задачи 2 проведем формальное разделение среды плоскостью $z = -\tilde{z}_1$ и для каждой части сформулируем краевые условия

Задача 2-1.

$$\mathbf{L}\mathbf{w} = 0;$$

$$\mathbf{t}(x,y,z)|_{z=0} = 0;$$

$$\begin{cases} \mathbf{w}_k^+ = \mathbf{w}_k^-, \\ \mathbf{t}_k^+ = \mathbf{t}_k^-, \end{cases}$$

$$z = -z_k, \quad k = 1,2,\ldots,N_1 - 1;$$

$$\mathbf{t}(x,y,z)|_{z=-\tilde{z}_1+0} = \tilde{\mathbf{t}}_1^+(x,y).$$

Задача 2-2.

$$\mathbf{L}\mathbf{w} = 0;$$

$$\mathbf{t}(x,y,z)|_{z=-\tilde{z}_1-0} = \tilde{\mathbf{t}}_1^-(x,y);$$

$$\begin{cases} \mathbf{w}_k^+ = \mathbf{w}_k^-, \\ \mathbf{t}_k^+ = \mathbf{t}_k^-, \end{cases} \tag{12}$$

$$z = -z_k; \quad k = 1,\ldots,N-1;$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{t}}_k = \tilde{\mathbf{t}}_k^0, & (x,y) \in \tilde{\Omega}_k, \\ \Delta\mathbf{w}_k = 0, & (x,y) \notin \tilde{\Omega}_k, \end{cases}$$

$$z = -\tilde{z}_k, \quad k = 2,\ldots,\tilde{N};$$

$$\mathbf{w}(x,y,-H) = 0.$$

Условия стыковки слоев (12) ставятся для $k = N_1, N_1+1,\ldots,N-1$, если плоскость $z = -\tilde{z}_1$ не совпадает с плоскостью раздела свойств слоев, в противном случае $k = N_1+1,\ldots,N-1$. Здесь N_1 — количество слоев, заключенных между плоскостями $z = 0$ и $z = -\tilde{z}_1$.

Задача 2-1 описывает «вирус» имеющий строение

$$V_{N_1}\left(2/0;\infty/-\tilde{z}_1;\infty\right). \tag{13}$$

«Вирус» (13) не содержит трещин, соответствующая ему матрица-символ Грина $\mathbf{K}_{N_1}^-(\alpha,\beta,z,\omega)$ строится методом работы [2]. Тогда трансформанта Фурье вектора перемещений точек верхней отсеченной части среды запишется

$$\mathbf{W}(\alpha,\beta,z,\omega) = \mathbf{K}_{N_1}^-(\alpha,\beta,z,\omega)\tilde{\mathbf{T}}_1^+,$$

$$0 \leqslant z \leqslant -(\tilde{z}_1 + 0).$$

Задача 2-2 по постановке идентична исходной задаче. Это «вирус», имеющий строение (11) уровня $L = (N - N_1 + 1) - (\tilde{N} - 1)$. Для его исследования аналогично предыдущему применяется метод суперпозиции и метод сечения плоскостью $z = -\tilde{z}_2$. Повторяя эту процедуру для всех $z = -\tilde{z}_k$ и учитывая, что на берегах трещин

$$\tilde{\mathbf{T}}_k^+ = \tilde{\mathbf{T}}_k^- = \tilde{\mathbf{T}}_k, \quad \tilde{\mathbf{W}}_k^+ = \tilde{\mathbf{W}}_k^- + \mathbf{f}_k,$$

получим систему функционально-матричных соотношений

$$\tilde{\mathbf{W}}_{\tilde{N}}^- = \mathbf{K}_{\tilde{N}_{\tilde{N}}}\tilde{\mathbf{T}}_{\tilde{N}},$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_k^- = \mathbf{K}_{\tilde{N}_k}\tilde{\mathbf{T}}_k + \sum_{m=k+1}^{\tilde{N}} \mathbf{M}_{km}\mathbf{f}_m,$$

$$k = 1,2,\ldots,\tilde{N}-1,$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)\mathbf{Q}, \quad \mathbf{T} = \{\tilde{\mathbf{T}}_1, \tilde{\mathbf{T}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{T}}_{\tilde{N}}\},$$

$$\mathbf{Q} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{\tilde{N}}\},$$

$$\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega) = \|\mathbf{K}_{ij}\|_{i,j=1}^{\tilde{N}},$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{0}, & i < j, \\ \mathbf{K}_{ij}, & i \geqslant j. \end{cases}$$

$\tilde{N}_k$ — количество слоев, заключенных между плоскостями $z = -\tilde{z}_k$ и $z = -H$. Матрицы $\mathbf{M}_{km}$ описывают вклад скачка перемещений на берегах m-той трещины в перемещения точек плоскости $z = -\tilde{z}_k - 0$.

Блочная матрица $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ является матрицей-символом системы ИУ относительно скачков векторов перемещений на берегах трещин (задача 2).

Так как в полученном представлении $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ — треугольная матрица, то ее определитель равен произведению определителей матриц, расположенных на главной диагонали

$$\det\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega) = \prod_{i=1}^{\tilde{N}} \det\mathbf{K}_{ii},$$

$$\mathbf{K}_{ii} = \mathbf{S}_i^{-1}, \quad \mathbf{S}_i = \mathbf{K}_{N_i}^- - \mathbf{K}_{\tilde{N}_i}.$$

Матрица $\mathbf{S}_i$ определяется положением i-той трещины в слоистой среде, $\mathbf{K}_{N_i}^-$ — матрица Грина пакета N_i слоев со свободной верхней гранью, расположенных между плоскостями $z = -\tilde{z}_{i-1}$ и $z = -\tilde{z}_i$, содержащими $(i-1)$-ю и i-тую трещины; $\mathbf{K}_{\tilde{N}_i}$ — матрица Грина пакета $\tilde{N}_i$ слоев на жестком основании,

заключенных между плоскостями $z = -\tilde{z}_i$ и $z = -H$.

Если на поверхности среды заданы смешанные граничные условия, то размерность матрицы $\mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega)$ увеличится на единицу, но она по-прежнему останется треугольной и ее определитель в этом случае будет равен

$$\det \mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega) = \prod_{i=1}^{\tilde{N}+1} \det \mathbf{K}_{ii},$$

причем $\mathbf{K}_{11} = \mathbf{K}_N$, $\mathbf{K}_{(i+1)(i+1)} = \mathbf{S}_i^{-1}$.

2. Рассмотрим задачу о гармонических колебаниях пакета N упругих (анизотропных) слоев с жестко защемленной нижней гранью, вызванных поверхностными усилиями и вибрацией границ жестких включений, расположенных в $\tilde{N}$ уровнях по глубине пакета. В этом случае перемещения точек среды находятся из решения краевой задачи

$$\mathbf{L}\mathbf{w} = 0. \tag{14}$$

Граничные условия на верхней грани (2), на границах раздела физико-механических свойств слоев (4) и на нижней грани пакета (5) не изменяются. В плоскостях расположение включений имеем следующие условия:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{w}}_k = \tilde{\mathbf{w}}_k^0, & (x, y) \in \Omega_k, \\ \Delta \mathbf{t}_k = 0, & (x, y) \notin \Omega_k, \end{cases}$$

$$z = -\tilde{z}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tilde{N},$$
$$\Delta \mathbf{t}_k = \tilde{\mathbf{t}}_k^+ - \tilde{\mathbf{t}}_k^-.$$

Задаче (14) соответствует «вирус» смешанного типа, уровня $L = \tilde{N} + N + 1$

$$V_N \begin{pmatrix} 1/ - \tilde{z}_1; \Omega_1/ - \tilde{z}_2; \Omega_2/ \ldots / \\ / - \tilde{z}_{\tilde{N}}; \Omega_{\tilde{N}}/ - H; \infty // 2/0; \infty \end{pmatrix}.$$

Матрица-символ ядра системы ИУ (1), соответствующей краевой задаче (14), построенная по схеме, описанной в п.1, также является треугольной:

$$\mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega) = \|\mathbf{K}_{ij}\|_{i,j=1}^{\tilde{N}},$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{0}, & i > j, \\ \mathbf{K}_{ij}^{\cdot}, & i \leqslant j, \end{cases}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega)\mathbf{Q}, \quad \mathbf{W} = \{\tilde{\mathbf{W}}_1, \tilde{\mathbf{W}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{W}}_{\tilde{N}}\},$$
$$\mathbf{Q} = \{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \ldots, \boldsymbol{\eta}_{\tilde{N}}\},$$

$\tilde{\mathbf{W}}_k^+ = \tilde{\mathbf{W}}_k^- = \tilde{\mathbf{W}}_k$ — трансформанты Фурье векторов перемещений, заданных на верхней $(+)$ и нижней $(-)$ границах включений; $\tilde{\mathbf{T}}_k^+ = \tilde{\mathbf{T}}_k^- + \boldsymbol{\eta}_k$, $\boldsymbol{\eta}_k$ — преобразование Фурье скачков векторов напряжений $\Delta \mathbf{t}_k$ на границах включений.

$$\det \mathbf{K}\,(\alpha, \beta, \omega) = \prod_{i=1}^{\tilde{N}} \det \mathbf{K}_{ii},$$

$$\mathbf{K}_{ii} = \mathbf{G}_i^{-1}, \quad \mathbf{G}_i = (\mathbf{K}_{N_i}^-)^{-1} - (\mathbf{K}_{\tilde{N}_i})^{-1}.$$

Матрица $\mathbf{G}_i$ определяется положением i-го включения в слоистой среде.

3. Если неоднородности расположены в параллельных плоскостях, то, несмотря на многообразие вариантов распределения включений и трещин по уровням, занимаемый средой объем делится этими плоскостями на подобласти одного из четырех типов

$$V_{N_k} \begin{pmatrix} 1/ - \tilde{z}_k; \Omega_k/ - \tilde{z}_{k+1}; \Omega_{k+1} \\ //2/ - \tilde{z}_k; \tilde{\Omega}_k^0/ - \tilde{z}_{k+1}; \tilde{\Omega}_{k+1}^0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$V_{N_k}\,(2/ - \tilde{z}_k; \infty/ - \tilde{z}_{k+1}; \infty)\,,$$

$$V_{N_k} \begin{pmatrix} 1/ - \tilde{z}_{k+1}; \Omega_{k+1}//2/ - \tilde{z}_k; \infty/ \\ - \tilde{z}_{k+1}; \tilde{\Omega}_{k+1}^0 \end{pmatrix},$$

$$V_{N_k}\left(1/ - \tilde{z}_k; \Omega_k//2/ - \tilde{z}_k; \tilde{\Omega}_k^0/ - \tilde{z}_{k+1}; \infty\right).$$

Здесь $\tilde{\Omega}_k^0$ — дополнение Ω_k до всей плоскости, N_k — количество слоев, расположенных между плоскостями $z = -\tilde{z}_k$ и $z = -\tilde{z}_{k+1}$.

Между «вирусами» (15) и особыми множествами определителей матриц-символов Грина $\mathbf{K}_{N_k}$ и $\mathbf{K}_{N_k}^-$ установлено взаимнооднозначное соответствие. В частности, для изотропных и трансверсально-изотропных материалов имеем

$$V_{N_k} \begin{pmatrix} 1/ - \tilde{z}_k; \Omega_k/ - \tilde{z}_{k+1}; \Omega_{k+1} \\ //2/ - \tilde{z}_k; \tilde{\Omega}_k^0/ - \tilde{z}_{k+1}; \tilde{\Omega}_{k+1}^0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow D_{N_k}(\lambda, \omega), \tag{16}$$

$$V_{N_k}\,(2/ - \tilde{z}_k; \infty/ - \tilde{z}_{k+1}; \infty) \Leftrightarrow D_{N_k}^-(\lambda, \omega),$$

$$V_{N_k} \begin{pmatrix} 1/ - \tilde{z}_{k+1}; \Omega_{k+1}// \\ 2/ - \tilde{z}_k; \infty/ - \tilde{z}_{k+1}; \tilde{\Omega}_{k+1}^0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Delta_{N_k}(\lambda, \omega),$$

$$V_{N_k} \begin{pmatrix} 1/ - \tilde{z}_k; \Omega_k// \\ 2/ - \tilde{z}_k; \tilde{\Omega}_k^0/ - \tilde{z}_{k+1}; \infty \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Delta_{N_k}^*(\lambda, \omega).$$

Здесь Δ_{N_k} — знаменатель элементов и определителя матрицы Грина пакета N_k слоев с жестко защемленной нижней гранью, $\Delta^*_{N_k}$ — знаменатель элементов и определителя матрицы Грина пакета N_k слоев с жестко защемленной верхней гранью, D_{N_k} — знаменатель элементов и определителя обратной матрицы Грина пакета N_k слоев с жестко защемленной нижней гранью, $D^-_{N_k}$ — знаменатель элементов и определителя матрицы Грина пакета N_k слоев со свободной верхней гранью. Заметим, что перечисленные функции, кроме явно указанных аргументов зависят от геометрических и механических параметров слоев, заключенных между плоскостями $z = -\tilde{z}_k$ и $z = -\tilde{z}_{k+1}$.

Используя установленное соответствие, можно записать определители матриц-символов ядер систем ИУ, отвечающих произвольному количеству и произвольной последовательности расположения трещин и включений в слоистой среде, руководствуясь следующим правилом:

– для объемов, заключенных между плоскостями, содержащими включения и/или трещины, а также между верхней (нижней) гранью пакета и ближайшей указанной плоскостью, определяется класс «вируса» вибропрочности и его параметры (значения k и N_k). Согласно (16) с каждым «вирусом» связывается определенная функция;

– искомый определитель (с точностью до знака) равен отношению произведения найденных функций к знаменателю матрицы-символа Грина пакета N слоев, жестко сцепленного с недеформируемым основанием, без дефектов.

В качестве примера использования предложенного метода выпишем $\det \mathbf{K}$ системы ИУ, соответствующей нескольким случаям расположения включений и трещин в пятислойном пакете со свободной от напряжений верхней гранью и жестко защемленной нижней.

Пример 1. Предположим, что включение расположено на границе между первым и вторым слоем, а трещина — на границе между третьим и четвертым слоями. Тогда весь объем, занимаемый средой, делится плоскостями $z = -\tilde{z}_1 = -2h_1$ и $z = -\tilde{z}_2 = -2(h_1 + h_2 + h_3)$ на три части

$$V_1(1/-2h_1;\infty//2/0;\infty) \Leftrightarrow \Delta_1(h_1),$$

$$V_2(1/-2h_1;\infty/-2(h_1+h_2+h_3);\infty) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Delta^*_2(h_2,h_3) = \Delta_2(h_3,h_2),$$

$$V_2\left(1/-H;\infty//2/-2(h_1+h_2+h_3);\infty\right) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Delta_2(h_4,h_5);$$

$H = 2\sum\limits_{k=1}^{5} h_k$, h_k — полутолщина k-го слоя.

Искомый определитель представляется в виде отношения целых функций:

$$\det \mathbf{K} = \frac{\Delta_1(h_1)\Delta_2(h_3,h_2)\Delta_2(h_4,h_5)}{\Delta_5(h_1,h_2,h_3,h_4,h_5)}.$$

Пример 2. Если на границе первого и второго слоев расположена трещина, а на границе третьего и четвертого — включение, то

$$V_1(2/0;\infty/-2h_1;\infty) \Leftrightarrow D_1^-(h_1),$$

$$V_2(1/2\,(h_1+h_2+h_3);\infty/-2h_1;\infty) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Delta_2\,(h_2,h_3)\,,$$

$$V_2\,(1/-H;\infty/-2(h_1+h_2+h_3);\infty) \Leftrightarrow \Leftrightarrow D_2\,(h_4,h_5)\,,$$

$$\det \mathbf{K} = \frac{D_1^-(h_1)\Delta_2(h_2,h_3)D_2(h_4,h_5)}{\Delta_5(h_1,h_2,h_3,h_4,h_5)}.$$

В приведенных примерах в качестве аргумента указана полутолщина только тех слоев, от характеристик которых (плотности, коэффициента Пуассона, модуля сдвига) зависит каждая функция. Помимо этого все функции зависят от параметра λ и частоты колебаний ω.

Используя полученные представления для определителей матриц-символов ядер систем ИУ можно путем подбора перечисленных характеристик целенаправленно управлять динамическими, в том числе резонансными, свойствами сложной механической системы.

Таким образом, предложенный метод построения определителей матриц-символов систем ИУ является эффективным инструментом исследования условий локализации волнового процесса. Указанные условия, устанавливаемые фундаментальной теоремой 1,

можно конкретизировать для отдельных задач описанием корневого множества. Заметим, что в задачах, для которых в состав корневого множества входят полярные множества матриц-символов Грина слоя со свободной нижней гранью (как в примере 2), низкочастотные резонансы невозможны, так как в этом случае $\omega_{\text{кр}} = 0$.

Литература

1. *Воровичи И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
2. *Воровичи И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир. 1999. 246 с.
3. *Бабешко В. А., Воровичи И. И., Образцов И. Ф.* Явление высокочастотного резонанса в полуограниченных телах с неоднородностями // Известия АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 71 – 83.
4. *Образцов И. Ф., Бабешко В. А.* О некоторых особенностях колебания полуограниченных областей // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 2. С. 306–310.
5. *Бабешко В. А.* К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел // ДАН СССР. 1989. Т. 307. № 2. С. 324–327.
6. *Бабешко В. А.* Динамика сред при наличии совокупности неоднородностей или дефектов и теория вирусов вибропрочности // Известия вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 1998. № 1. С. 24–26.
7. *Бабешко В. А.* К обоснованию метода Олинера // ДАН СССР. 1991. Т. 320. № 2. С. 311–314.
8. *Бабешко В. А.* К проблеме исследования динамических свойств трещиноватых тел // ДАН СССР. 1989. Т. 304. № 2. С. 318–321.
9. *Бабешко В. А.* К расчету параметров высокочастотного резонанса в трехмерном случае // ДАН. 1994. Т. 335. № 1. С. 55–58.
10. *Бабешко В. А.* Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Известия РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 5–9.
11. *Бабешко В. А.* Теория «вирусов» вибропрочности для совокупностей включений // Известия вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2000. № 3. С. 21–23.
12. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации в краевых задачах в неограниченных областях // ДАН. 2003. Т. 392. № 6. С. 1–4.
13. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации в теории вирусов вибропрочности // ДАН. 2003. Т. 393. № 4. С. 1–5.
14. *Бабешко В. А.* Высокочастотный резонанс массивного штампа // ДАН СССР. 1989. Т. 306. № 6. С. 1328–1332.
15. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
16. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.

Статья поступила 2 января 2005 г.
Кубанский государственный университет
© Пряхина О. Д., Смирнова А. В., 2005