

УДК 531.39

EDN: DMWKQC DOI: 10.31429/vestnik-21-4-6-22

Альтернативные методы получения фундаментальных решений дифференциальных уравнений с частными производными для изотропных материалов. Часть I

П. Г. Великанов  

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ,
ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111, Россия

✉ Великанов Пётр Геннадьевич; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Аннотация. Одним из наиболее успешных современных численных методов расчета конструкций является метод граничных элементов (МГЭ). Является актуальным дальнейшее его развитие в различных модификациях для решения задач, основанных на применении предварительно вычисленных точных фундаментальных решений. В статье с помощью альтернативных методов (метод функционального анализа, метод Родена, экспериментально-теоретический метод) удалось существенно упростить методику вычисления фундаментальных решений без необходимости предварительного глубокого изучения математической теории обобщенных функций и без привлечения аппарата операционного исчисления. Отмеченная теория и аппарат часто воспринимаются исследователями как трудные для понимания, что порой ограничивает область применения МГЭ. В статье показано, как с помощью альтернативных методов можно значительно быстрее и с меньшими усилиями получить фундаментальные решения задач изгиба изотропных пластин (в том числе на упругих основаниях Винклера и Пастернака–Власова) и мембран, а также фундаментальные решения для двух- и трехмерных гармонических, бигармонических и полигармонических дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: фундаментальные решения, обобщенные функции, метод функционального анализа, метод Родена, экспериментально-теоретический метод.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Великанов П. Г. Альтернативные методы получения фундаментальных решений дифференциальных уравнений с частными производными для изотропных материалов. Часть I // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 4. С. 6–22. EDN: DMWKQC. DOI: 10.31429/vestnik-21-4-6-22

Поступила 26 августа 2024 г. После доработки 3 ноября 2024 г. Принято 6 ноября 2024 г. Публикация 20 декабря 2024 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Alternative Methods for Obtaining Fundamental Solutions of Partial Differential Equations for Isotropic Materials. Part I

P. G. Velikanov 

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, 10, K. Marx st., Kazan, 420111, Russia

✉ Peter G. Velikanov; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Abstract. One of the most successful modern numerical methods for calculating structures is the boundary element method (BEM). Its further development in various modifications to solve the tasks set based on the application of precomputed exact fundamental solutions is relevant. The article attempts to simplify the methodology for calculating fundamental solutions of partial differential equations with constant coefficients as much as possible using alternative methods (functional analysis method, Rodin's method, experimental and theoretical method) without the need for a preliminary in-depth study of the mathematical theory of generalized functions, algorithms of the method of integral Fourier transform, etc., theory deductions from complex analysis and many others. The listed theories, algorithms, etc. are often perceived by researchers (especially engineers, who are often tasked with implementing specific and practically important calculations) as difficult to understand, which sometimes limits the scope of the BEM, which has significant potential advantages in comparison with other numerical methods. The listed alternative methods make it possible to significantly simplify the noted problem so that, as in other numerical methods, the researcher's

main attention is paid to minimizing errors in discretization, approximation and counting. The article demonstrates how using alternative methods it is possible to obtain fundamental solutions to bending problems of isotropic plates (including on elastic Winkler and Pasternak-Vlasov bases) and membranes much faster and with less effort, as well as fundamental solutions for two and three-dimensional harmonic, biharmonic and polyharmonic differential equations.

Keywords: fundamental solutions, generalized functions, functional analysis method, Rodin's method, experimental and theoretical method.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Velikanov, P. G., Alternative methods for obtaining fundamental solutions of partial differential equations for isotropic materials. Part I. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 4, pp. 6–22. DOI: 10.31429/vestnik-21-4-6-22

Received 26 August 2024. Revised 3 November 2024. Accepted 6 November 2024. Published 20 December 2024.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\) license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Введение

Задачи проектирования авиационных, ракетокосмических, машиностроительных и др. сооружений стимулируют исследования тел, подверженных действию различных нагрузок (сосредоточенных сил, моментов, импульсов, зарядов и др.; распределенных и объемных (массовых) нагрузок) и полей (температурных, магнитных, электрических и др.).

Одним из наиболее успешных современных численных методов (наряду с методом конечных элементов и методом конечных разностей) расчета отмеченных сооружений является метод граничных элементов (МГЭ; метод граничных интегральных уравнений и др.). Дальнейшее его развитие в виде: непрямого МГЭ (НМГЭ; метода компенсирующих нагрузок), прямого МГЭ (ПМГЭ; метода взвешенных невязок) и полупрямого МГЭ, а также метода разрывных решений и др., — для решения поставленных задач, основанных на применении предварительно вычисленных точных фундаментальных решений (ФР), является актуальным.

Предвестниками понятий о ФР были работы С. А. Соболева, Л. Шварца, И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова, В. С. Владимирова и В. В. Жаринова, В. П. Шевченко [1–4] и др. о математической теории обобщенных функций.

В статье с помощью альтернативных методов (метод функционального анализа, метод Родена, экспериментально-теоретический метод) удалось существенно упростить методику вычисления фундаментальных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами без необходимости предварительного глубокого изучения математической теории обобщенных функций и без привлечения аппарата операционного исчисления (например, интегрального преобразования Фурье) [5–25]. Отмеченная теория и аппарат часто воспринимаются исследователями (особенно инженерными работниками, перед которыми зачастую и ставятся задачи по реализации конкретных и практически важных расчетов) как трудные для понимания, что порой ограничивает область применения МГЭ, имеющего значительные потенциальные преимущества в сравнении с другими численными методами. Перечисленные альтернативные методы позволяют значительно упростить отмеченную проблему, чтобы, как и в других численных методах, основное внимание исследователя было уделено минимизации погрешностей дискретизации, аппроксимации и счета.

1. Нахождение ФР линейных дифференциальных уравнений в частных производных с δ -функцией Дирака в правой части

Пусть дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных p -го порядка

$$L_0 w \equiv \sum_{|\alpha|=0}^p A_\alpha(x) D^\alpha w = f(x), x \in R^m. \quad (1.1)$$

Здесь приняты стандартные обозначения: L_0 — исходный линейный дифференциальный оператор в частных производных; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ — мультииндекс с целочисленными неотрицательными компонентами,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m; \quad D^\alpha \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right)^{\alpha_m}.$$

Например, дифференциальное уравнение изгиба тонкой изотропной линейно-упругой пластины имеет вид [7]

$$L_0 w \equiv D \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = p_z(x, y), \quad (1.2)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

— гармонический дифференциальный оператор Лапласа;

$$\nabla^2 \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

— бигармонический дифференциальный оператор; w — прогиб точки срединной поверхности пластины; p_z — интенсивность нормального давления, действующего на пластину;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

— изгибная (цилиндрическая) жесткость пластины; ν — коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации); h — толщина пластины.

ФР $G(x-\xi, y-\eta)$ дифференциального уравнения (1.2) определяется из выражения вида [1–25]

$$L_0 G(x-\xi, y-\eta) \equiv D \nabla^2 \nabla^2 G(x-\xi, y-\eta) = \delta(x-\xi, y-\eta), \quad (1.3)$$

где (x, y) — декартовы прямоугольные координаты срединной поверхности пластины; (ξ, η) — точка приложения сосредоточенной нагрузки; $\delta(x-\xi, y-\eta)$ — двумерная обобщенная δ -функция Дирака.

Как показано в [3], для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ФР всегда существуют. Более того, ФР не единственны, они определяются с точностью до слагаемого (решения), являющегося произвольным решением однородного дифференциального уравнения $L_0 G(x-\xi, y-\eta) = 0$ и, кроме того, являются обобщенными функциями. Из (1.3) видно, что ФР $G(x-\xi, y-\eta)$ зависит только от свойств дифференциального оператора L_0 . Без ограничения общности далее будем считать, что $\xi = \eta = 0$, т.е. сосредоточенная нагрузка, моделируемая двумерной обобщенной δ -функцией Дирака, приложена в начале системы координат.

Для проверки правильности найденного ФР дифференциального уравнения в частных производных используют две методики: первая — с помощью формулы дифференцирования обобщенных функций [7]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_G + (-1)^{i-1} \delta(x_1, \dots, x_n) \int_{\Gamma} \Phi dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n, \quad (1.4)$$

где $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_G$ — обычная производная от функции Φ , Γ — граница области G (один из контуров, внутри которого находится особенность), вторая — с помощью проверки равновесия пластины, ограниченной кривой, при действии на нее единичной нагрузки [7, 15]. В конечном итоге обе этих методики эквивалентны и приводят к идентичным формулам и результатам.

Известно, что сами по себе методики получения ФР с помощью аппарата операционного исчисления (например, с помощью интегрального преобразования Фурье), ассоциированного

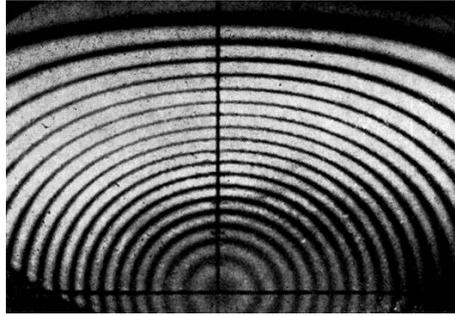


Рис. 1. Визуализация действия локальной нагрузки в центре изотропной прямоугольной пластинки с помощью метода голографической интерферометрии [27]

Fig. 1. Visualization of the action of a local load at the center of an isotropic rectangular plate using the method of holographic interferometry

дифференциального оператора, теории вычетов из комплексного анализа, с помощью метода последовательного (перестановочного) интегрирования и многих других [1–25] зачастую сложны, поэтому была поставлена задача свести поиск ФР не к операции интегрирования, как было неоднократно проделано ранее другими методами [1–25], а к операции дифференцирования аппроксимирующих ФР функций, так как известно, что для любой функции можно найти производную, но далеко не для любой функции можно найти первообразную. По аналогии с [23] в дальнейшем данный метод будем называть методом функционального анализа (МФА).

2. Метод функционального анализа

Из теории как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и дифференциальных уравнений в частных производных [7, 26] известно, что решением дифференциальных уравнений является сумма общего решения однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения. Так как ФР линейного дифференциального уравнения (1.3) определяется с точностью до решения однородного уравнения, то его поиск может быть ограничен лишь поиском любого частного решения неоднородного дифференциального уравнения.

Ранее было отмечено, что ФР зависит только от свойств дифференциального оператора L_0 , поэтому необходимо выбрать аппроксимирующую функцию для ФР, исходя из свойств дифференциального оператора L_0 : для изотропной пластины (дифференциальный оператор в частных производных 4-го порядка с постоянными коэффициентами) можно заключить: искомое ФР является лишь функцией от x и y , т.е. $G(x, y)$; так как ФР $G(x, y)$ описывает прогиб для бесконечной пластины от действия единичной сосредоточенной нагрузки, моделируемой обобщенной δ -функцией Дирака $\delta(x, y)$, размещенной в центре пластинки, и так как линии равного прогиба являются окружностями, что подтверждается, например, исследованиями [27–29], то ФР является функцией от $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, т.е. $G(r)$. Например, для изотропных дюралюминиевых (Д16АТ) жестко заделанных по контуру пластин под действием сосредоточенных нагрузок в центре показаны: на рис. 1 — интерференционная картина для прямоугольной пластины с геометрическими параметрами: $a = 100$ мм, $b = 150$ мм, $h = 0,92$ мм [27]; на рис. 2 — картина двухэкспозиционной интерферограммы (подобные результаты тем же автором получены и с помощью трехэкспозиционной интерферограммы), а также картина спекл-фотографии для круглой пластины с геометрическими параметрами: $R = 50$ мм, $h = 0,93$ мм) [28, 29]

В [1, 7, 30] показано, что в окрестности приложения сосредоточенной нагрузки асимптотические формулы для ФР имеют логарифмическую особенность, т.е. $G(r, \ln r)$.

При конструировании аппроксимирующей для ФР функции стоит обратить внимание на следующие обстоятельства. Во-первых, константы B под знаком логарифма не должно быть, так как использование формулы логарифма произведения $\ln^n(Br) = (\ln B + \ln r)^n$

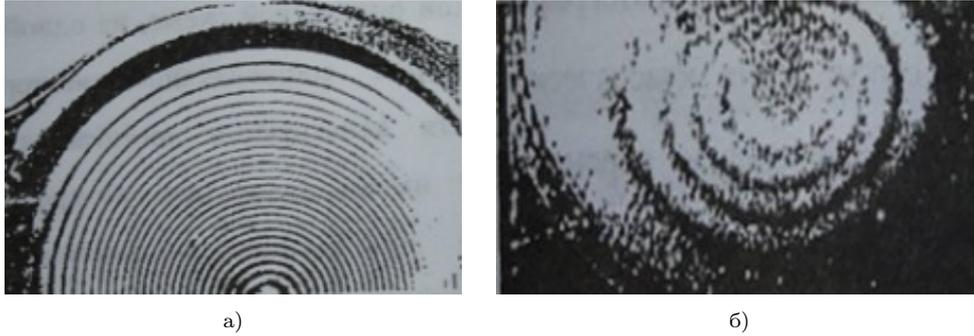


Рис. 2. Визуализация действия локальной нагрузки в центре изотропной пластинки с помощью двухэкспозиционной интерферограммы (а) и спекл-фотографии (б) [28, 29]

Fig. 2. Visualization of the effect of a local load at the center of an isotropic plate using a two-exposure interferogram (a) and speckle photography (b)

позволяет после применения формулы для бинома Ньютона пренебречь в ФР слагаемыми, являющимися решениями однородного дифференциального уравнения. Во-вторых, под знаком логарифма также не должно быть показателя степени p у r , так как $\ln^n(r^p) = p^n \ln^n r$ и аппроксимирующая функция для ФР примет вид $G(r) = Ar^m \ln^n r$, где константа $A = Ap^n$. В результате аппроксимирующую функцию для ФР с помощью МФА будем искать в виде

$$G(x, y) = G(r) = Ar^m \ln^n r, \quad (2.1)$$

где A , m , n — подлежащие определению константы.

Теперь с помощью формулы (1.4) находим все необходимые для дифференциального уравнения (1.3) производные аппроксимирующей ФР $G(x, y)$ функции. Проще всего сначала определить обычные производные от аппроксимирующей ФР $G(x, y)$ функции (2.1). Так как в сумме они должны дать нуль, то коэффициенты при одинаковых степенях функций должны также обратиться в нуль — эти коэффициенты и позволяют образовать систему алгебраических уравнений, из которых в любом пакете символьной математики, например, в Wolfram Mathematica [31, 32] можно найти m и n (см., например, соответствующий код в листинге ниже).

```

In[1]:= r=√(x²+y²); G[x_,y_]=Ar^mLog[r]^n;
In[2]:= D[G[x,y],{x,4}]+2D[G[x,y],{x,2},{y,2}]+D[G[x,y],{y,4}] // Simplify
Out[2]= 2⁴-nAr^(m-2)Log[r]ⁿ-⁴(n(-6+11n-6n²+n³)+2(m-1)n(2-3n+n²))Log[r]
+ 1/2(2-6m+3m²)(n-1)nLog[r]²+1/2m(2-3m+m²)nLog[r]³+1/16(m-2)²m²Log[r]⁴);
In[3]:= Solve[{n(-6+11n-6n²+n³)==0,2(m-1)n(2-3n+n²)==0,1/2(2-6m+3m²)(n-1)n==0,
1/2m(2-3m+m²)n==0,1/16(m-2)²m²==0}]
Out[3]= {{m->0,n->0},{m->0,n->0},{m->0,n->0},{m->0,n->0},{m->0,n->1},{m->0,n->1},
{m->2,n->0},{m->2,n->0},{m->2,n->0},{m->2,n->0},{m->2,n->1},{m->2,n->1}}

```

Исключив из рассмотрения те варианты для m и n , для которых полученные решения являются решениями однородного уравнения, получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 G(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{D} \Rightarrow m = 2; n = 1 \Rightarrow G(x, y) = G(r) = Ar^2 \ln r. \quad (2.2)$$

Теперь для принятых m и n для математической точности решаемой задачи нам остается определить константу A (хотя при реализации различных разновидностей МГЭ и некоторых

других методов, как частное решение неоднородного дифференциального уравнения, так и общее решение однородного дифференциального уравнения выражаются через ФР, а значит на константу A , как на общий множитель, можно сократить).

Теперь с помощью формулы (1.4) находим все необходимые для ФР (1.3) производные ФР $G(x, y)$ (2.2).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 G}{\partial x^4} &= \left(\frac{\partial^4 G}{\partial x^4} \right)_G + (-1)^0 \delta(x, y) \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} dy; \\ \frac{\partial^4 G}{\partial x^2 y^2} &= \left(\frac{\partial^4 G}{\partial x^2 y^2} \right)_G + (-1)^1 \delta(x, y) \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 G}{\partial x^2 y} dx; \\ \frac{\partial^4 G}{\partial y^4} &= \left(\frac{\partial^4 G}{\partial y^4} \right)_G + (-1)^1 \delta(x, y) \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} dx, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 G}{\partial x^4} \right)_G &= A \left\{ \frac{6}{r^2} - \frac{24x^2}{r^4} + \frac{16x^4}{r^6} \right\}; \quad \left(\frac{\partial^4 G}{\partial x^2 y^2} \right)_G = A \left\{ -\frac{2}{r^2} + \frac{16x^2 y^2}{r^6} \right\}; \\ \left(\frac{\partial^4 G}{\partial y^4} \right)_G &= A \left\{ \frac{6}{r^2} - \frac{24y^2}{r^4} + \frac{16y^4}{r^6} \right\}; \\ \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} &= A \left\{ \frac{6x}{r^2} - \frac{4x^3}{r^4} \right\}; \quad \frac{\partial^3 G}{\partial x^2 y} = A \left\{ \frac{2y}{r^2} - \frac{4x^2 y}{r^4} \right\}; \quad \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} = A \left\{ \frac{6y}{r^2} - \frac{4y^3}{r^4} \right\}. \end{aligned}$$

Сумма обычных производных, как и следовало ожидать, равна нулю, а сумма обобщенных производных после перехода к полярной системе координат ($x = \varepsilon \cos \theta$; $y = \varepsilon \sin \theta$) и интегрирования по θ от 0 до 2π оказалась равной $8A\pi\delta(x, y)$. Сравнивая полученное выражение с правой частью дифференциального уравнения (1.3), окончательно для A находим, что

$$A = \frac{1}{8\pi D} \Rightarrow G(x, y) = G(r) = \frac{r^2 \ln r}{8\pi D},$$

что идентично результатам, полученным в [1,7,30,31], но сам поиск ФР реализован значительно проще и быстрее.

Аналогично вышеприведенной методике с помощью универсальной аппроксимирующей ФР функции (2.1) были найдены ФР следующих дифференциальных уравнений в частных производных:

– дифференциальное уравнение изгиба мембраны с жесткостью D (предварительным натяжением) ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$):

$$\begin{aligned} L_0 w &\equiv D \nabla^2 w(x, y) = p_z(x, y); \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) G(x, y) &= \frac{\delta(x, y)}{D} \Rightarrow m = 0; \quad n = 1; \\ A &= \frac{1}{2\pi D} \Rightarrow G(x, y) = G(r) = \frac{1}{2\pi D} \ln r. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Анализируя найденные ФР (для задачи изгиба мембраны ($k = 1$) и изотропной пластины ($k = 2$)), можно найти ФР полигармонического дифференциального уравнения, полностью совпавшего с решением из [34]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^k G(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{D} \Rightarrow G(x, y) = G(r) = \frac{1}{\pi 2^{2k-1} [(k-1)!]^2 D} r^{2k-2} \ln r. \tag{2.4}$$

– трехмерное гармоническое дифференциальное уравнение

$$\left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) : L_0 w \equiv D \nabla w(x, y, z) \equiv D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = p(x, y, z);$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) G(x, y, z) = \frac{\delta(x, y, z)}{D} \Rightarrow m = -1; n = 0; \quad (2.5)$$

$$A = \frac{1}{4\pi D} \Rightarrow G(x, y, z) = G(r) = \frac{1}{4\pi D r}.$$

– трехмерное бигармоническое дифференциальное уравнение

$$L_0 w \equiv D \nabla^2 w(x, y, z) \equiv D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial z^2} \right) = p(x, y, z);$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 G(x, y, z) = \frac{\delta(x, y, z)}{D} \Rightarrow m = 1; n = 0; \quad (2.6)$$

$$A = \frac{1}{8\pi D} \Rightarrow G(x, y, z) = G(r) = \frac{r}{8\pi D}.$$

Задача на основе найденных трехмерных ФР (для гармонического дифференциального уравнения ($k = 1$) и для бигармонического дифференциального уравнения ($k = 2$)) найти ФР полигармонического дифференциального уравнения, к сожалению, неразрешима, но распространение вышеприведенной методики на полигармоническое уравнение порядка $k \geq 1$ с $l \geq 3$ независимыми переменными позволило выявить нижеприведенную закономерность в получении ФР, полностью совпавшую с [34]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}\right)^k G(x_1, x_2, \dots, x_l) = \frac{\delta(x_1, x_2, \dots, x_l)}{D} \Rightarrow$$

$$G(x_1, x_2, \dots, x_l) = G(r) = \begin{cases} b_{l,k} r^{2k-l}, & \text{если } l - \text{нечетно или } l - \text{четно и } l > 2k; \\ c_{l,k} r^{2k-l} \ln r, & \text{если } l - \text{четно и } l \leq 2k, \end{cases} \quad (2.7)$$

где

$$b_{l,k} = \frac{\Gamma(l/2)}{2^k \pi^{l/2} (k-1)! (2-l) (4-l) \dots (2k-l) D};$$

$$c_{l,k} = \frac{\Gamma(l/2)}{2^k \pi^{l/2} (k-1)! (2-l) (4-l) \dots (2k_0-2-l) (2k_0+2-l) (2k_0+4-l) \dots (2k-l) D};$$

$$k_0 = \frac{l}{2}.$$

3. Изгиб изотропной пластины, лежащей на упругом основании

Дальнейшим развитием предложенной методики может стать, например, поиск ФР задачи изгиба тонкой линейно упругой изотропной пластины постоянной толщины, лежащей на упругом основании по модели Винклера (с одним параметром k_z) и по модели Пастернака–Власова (с двумя параметрами k_z и k_t), которые описываются дифференциальным уравнением вида [11, 14, 35]

$$L_0 G(x, y) \equiv (\nabla^2 \nabla^2 - 2p^2 \nabla^2 + \chi^4) G(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{D}, \quad (3.1)$$

где

$$2p^2 = \frac{k_t h^2}{4D}; \quad \chi^4 = \frac{k_z}{D} = \frac{1}{l^4}; \quad (3.2)$$

L_0 – исходный линейный дифференциальный оператор в частных производных; ∇^2 – оператор Лапласа; k_z, k_t – параметры упругого основания (первый и второй коэффициенты постели или коэффициенты сжатия и сдвига соответственно); $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – изгибная (цилиндрическая) жесткость пластины; ν – коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации); h – толщина пластины.

Чтобы получить ФР задачи изгиба тонкой линейно упругой изотропной пластины, лежащей на упругом основании по модели Винклера (с одним параметром k_z), предварительно необходимо учесть, что из него, как частный случай, мы должны получить ранее найденное ФР задачи изгиба тонкой линейно упругой изотропной пластины без какого бы то ни было упругого основания

$$G(x, y) = G(r) = \frac{r^2 \ln r}{8\pi D}.$$

Анализ приведенных в [34] различных ФР, например, для большинства дифференциальных уравнений Гельмгольца (с различным числом независимых переменных), в которых как раз содержится аналог однопараметрического упругого основания, позволил утверждать, что в подавляющем большинстве своем они представимы в виде специальных функций, например, обычных и модифицированных функций Бесселя, функций Ханкеля различного порядка и рода, которые связаны, например, с функциями Томпсона–Кельвина [35, 36] и т.д. Анализ различных вышеприведенных специальных функций позволил обратить особое внимание на функцию Томпсона–Кельвина $\text{kei}_0(x)$ (является мнимой частью модифицированной функции Бесселя второго рода нулевого порядка K_0), так как для малых значений аргумента имеем [33]

$$\text{kei}_0(r) = -\frac{x^2}{4} \ln r - \frac{\pi}{4} + (1 + \ln 2 - \gamma) \frac{r^2}{4} + \dots, \quad (3.3)$$

где $\gamma = 0,5772157\dots$ — постоянная Эйлера.

Ограничившись лишь первым членом разложения в ряд, так как остальные в аппроксимирующей ФР функции можно отнести к решению однородного уравнения, ФР с помощью МФА будем искать в виде

$$G(x, y) = G(r) = A \text{kei}_0(Br). \quad (3.4)$$

Здесь уже необходимо записывать в качестве произвольных постоянных не только A , но и множитель B в аргументе функции Томпсона–Кельвина, так как свойства функции Томпсона–Кельвина существенно отличаются от ранее приведенных формул для логарифма

Найдя все необходимые производные от аппроксимирующей ФР функции (приведены результаты дифференцирования функции Томпсона–Кельвина, опуская промежуточные вычисления, основанные на рекуррентных соотношениях) — операция, которая также с успехом может быть реализована в любом пакете символьной математики, например, в Wolfram Mathematica [31, 32],

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= AB \text{kei}'_0(Br) \frac{x}{r}; & \frac{\partial G}{\partial y} &= AB \text{kei}'_0(Br) \frac{y}{r}; \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} &= AB^2 \text{ker}_2(Br) \frac{x^2}{r^2} + \frac{AB}{r} \text{kei}'_0(Br); \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} &= AB^2 \text{ker}_2(Br) \frac{xy}{r^2}; & \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} &= AB^2 \text{ker}_2(Br) \frac{y^2}{r^2} + \frac{AB}{r} \text{kei}'_0(Br); \\ \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} &= AB^3 \left[\text{ker}'_0(Br) - \frac{4}{Br} \text{ker}_2(Br) \right] \frac{x^3}{r^3} + 3AB^2 \text{ker}_2(Br) \frac{x}{r^2}; \\ \frac{\partial^3 G}{\partial x^2 \partial y} &= AB^3 \left[\text{ker}'_0(Br) - \frac{4}{Br} \text{ker}_2(Br) \right] \frac{x^2 y}{r^3} + AB^2 \text{ker}_2(Br) \frac{y}{r^2}; \\ \frac{\partial^3 G}{\partial x \partial y^2} &= AB^3 \left[\text{ker}'_0(Br) - \frac{4}{Br} \text{ker}_2(Br) \right] \frac{xy^2}{r^3} + AB^2 \text{ker}_2(Br) \frac{x}{r^2}; \\ \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} &= AB^3 \left[\text{ker}'_0(Br) - \frac{4}{Br} \text{ker}_2(Br) \right] \frac{y^3}{r^3} + 3AB^2 \text{ker}_2(Br) \frac{y}{r^2}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^4 G}{\partial x^4} = AB^4 \left[\ker_0''(Br) - \frac{2}{Br} \ker_0'(Br) + 14(Br)^2 \ker_2(Br) \right] \frac{x^4}{r^4} + 6AB^3 \left[\ker_0'(Br) - \frac{4}{Br} \ker_2(Br) \right] \frac{x^2}{r^3} + \frac{3AB^2}{r^2} \ker_2(Br);$$

$$\frac{\partial^4 G}{\partial x^3 \partial y} = AB^4 \left[\ker_0''(Br) - \frac{7}{Br} \ker_0'(Br) + \frac{24}{(Br)^2} \ker_2(Br) \right] \frac{x^3 y}{r^4} + 3AB^3 \left[\ker_0'(Br) - \frac{4}{Br} \ker_2(Br) \right] \frac{xy}{r^3};$$

$$\frac{\partial^4 G}{\partial x^2 \partial y^2} = AB^4 \left[\ker_0''(Br) - \frac{7}{Br} \ker_0'(Br) + \frac{24}{(Br)^2} \ker_2(Br) \right] \frac{x^2 y^2}{r^4} + \frac{AB^3}{r} \ker_0'(Br) - \frac{3AB^2}{r^2} \ker_2(Br);$$

$$\frac{\partial^4 G}{\partial x \partial y^3} = AB^4 \left[\ker_0''(Br) - \frac{7}{Br} \ker_0'(Br) + \frac{24}{(Br)^2} \ker_2(Br) \right] \frac{xy^3}{r^4} + 3AB^3 \left[\ker_0'(Br) - \frac{4}{Br} \ker_2(Br) \right] \frac{xy}{r^3};$$

$$\frac{\partial^4 G}{\partial y^4} = AB^4 \left[\ker_0''(Br) - \frac{2}{Br} \ker_0'(Br) + \frac{14}{(Br)^2} \ker_2(Br) \right] \frac{y^4}{r^4} + 6AB^3 \left[\ker_0'(Br) - \frac{4}{Br} \ker_2(Br) \right] \frac{y^2}{r^3} + \frac{3AB^2}{r^2} \ker_2(Br)$$

и подставив их в дифференциальное уравнение для отыскания ФР с помощью МФА найдем произвольные постоянные A и B вида

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \nabla^2 + \chi^4) G(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{D} &\Rightarrow A = -\frac{l^2}{2\pi D}; \\ B = \frac{1}{l} &\Rightarrow G(x, y) = G(r) = -\frac{l^2}{2\pi D} \text{kei}_0\left(\frac{r}{l}\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Еще более усложняя задачу и переходя к определению ФР для задачи изгиба тонкой линейно упругой изотропной пластины, лежащей на упругом двухпараметрическом упругом основании по модели Пастернака–Власова, с помощью МФА получим следующие ФР (а также ряд других, которые получаются из них, как частные случаи, путем разложения в ряд и ограничившись первым членом ряда), зависящие от величин p и χ , что полностью совпало с результатами, полученными ранее с помощью метода двумерного интегрального преобразования Фурье в [11, 14],

$$(\nabla^2 \nabla^2 - 2p^2 \nabla^2 + \chi^4) G(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{D} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{а) } p < \chi &\Rightarrow A = -\frac{1}{2\pi\beta^2 D}; B = \frac{1}{l} \Rightarrow G(x, y) = G(r) = -\frac{1}{2\pi\beta^2 D} \text{kei}_0\left(\frac{r}{l}, \phi\right), \text{ где } \beta^2 = \sqrt{\chi^4 - p^4}, \\ \phi &= \frac{1}{2} \arctan \frac{\beta^2}{p^2}; \text{kei}_0(x, \phi) \text{ — обобщенная функция Томпсона–Кельвина}; \\ \text{б) } p = \chi &\Rightarrow A = -\frac{1}{4\pi\chi^2 D}; B = \frac{1}{l} \Rightarrow G(x, y) = G(r) = -\frac{1}{4\pi\chi^2 D} \text{kei}'_0\left(\frac{r}{l}\right); \end{aligned}$$

в) $p > \chi \Rightarrow G(x, y) = G(r) = -\frac{1}{4\pi s^2 D} \left\{ K_0 \left(\sqrt{p^2 + s^2} r \right) - K_0 \left(\sqrt{p^2 - s^2} r \right) \right\}$,
 где $s^2 = \sqrt{p^4 - \chi^4}$; $K_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка;

г) $\chi = 0 \Rightarrow G(x, y) = G(r) = -\frac{1}{4\pi p^2 D} \left\{ \ln r + K_0 \left(\sqrt{2p} r \right) \right\}$;

д) $p = 0 \Rightarrow G(x, y) = G(r) = -\frac{l^2}{2\pi D} \text{kei}_0 \left(\frac{r}{l} \right)$.

е) $p = \chi = 0 \Rightarrow G(x, y) = G(r) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r$.

4. Метод Родена

Как было ранее отмечено, методики получения ФР зачастую сложны и не всегда быстро приводят к искомому ФР, а иногда и вовсе не приводят. Французскому скульптору Огюсту Родену (1840–1917) приписывают слова: «Искусство скульптора состоит в том, чтобы взять глыбу мрамора и отсечь от нее все лишнее». Описанный в цитате подход подтолкнул автора к формулировке названия описанного метода получения ФР в честь великого скульптора Родена.

В рассматриваемом методе поиск ФР предлагается делать лишь в самом конце вычислений, когда с помощью различных методов (описанных в справочниках и методических указаниях, например, в [33, 37]) стало известно, как однородное ($w_{\text{однор}}(x, y)$), так и частное ($w_{\text{част}}(x, y)$) решения дифференциального уравнения (1.3), т.е. $w(x, y) = w_{\text{част}}(x, y) + w_{\text{однор}}(x, y)$ для пластинки произвольного контура, находящейся под действием сосредоточенных (сил, моментов и т.д.) нагрузок. При этом найденное решение не обязательно удовлетворяет граничным условиям (если оно записано в общем виде), так как ФР ищется для неограниченной области. Учитывая, что ФР определяется с точностью до решения однородного уравнения, то, обнуляя однородное решение и заменяя w на G , сразу получаем искомое ФР.

Как и раньше, но с помощью метода Родена, найдем ФР (1.3) дифференциального уравнения изгиба изотропной пластины (1.2).

Опуская приведенные, например, в [33, 37] выкладки (для поиска ФР предложенным методом способ нахождения функции прогиба для нас не является принципиальным), прогиб нагруженной в центре сосредоточенной нагрузкой P жестко заделанной по контуру изотропной пластины радиуса a представим в виде

$$w(r) = \frac{P}{8\pi D} r^2 \ln \frac{r}{a} + \frac{P}{16\pi D} (a^2 - r^2). \quad (4.1)$$

Выполняя аналогичные действия для определения прогиба нагруженной в центре сосредоточенной нагрузкой P свободно опертой по контуру изотропной пластины радиуса a , получим

$$w(r) = \frac{P}{8\pi D} r^2 \ln \frac{r}{a} + \frac{P}{16\pi D} \frac{3 + \nu}{1 + \nu} (a^2 - r^2). \quad (4.2)$$

Анализируя двучленные зависимости (4.1) и (4.2), можем с уверенностью заявить, что первый член каждого из уравнений не зависит от граничных условий, т.е. его можно рассматривать как частое решение неоднородного дифференциального уравнения. Тогда второй член каждого из уравнений можно рассматривать как общее решение однородного дифференциального уравнения. Для определения искомого ФР $G(r)$ разложим найденное частое решение неоднородного дифференциального уравнения на два слагаемых (пользуясь свойством логарифмов)

$$w_{\text{част}}(r) = \frac{P}{8\pi D} r^2 \ln \frac{r}{a} = \frac{P}{8\pi D} r^2 \ln r - \frac{P}{8\pi D} r^2 \ln a. \quad (4.3)$$

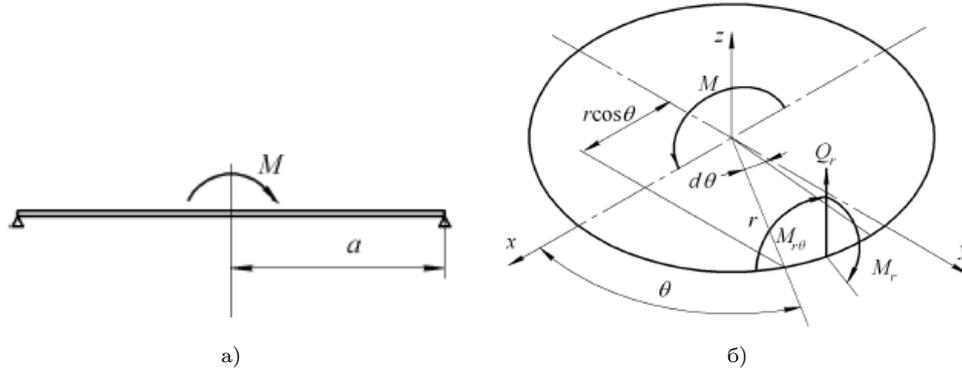


Рис. 3. Пластина под действием сосредоточенного момента в центре (а) и показ сил факторов (б)
 Fig. 3. Plate under concentrated moment at the center (a) and showing force factors (b)

Так как ФР определяются с точностью до решения однородного уравнения, то вычитаемым членом уравнения (4.3), как и каждым вторым членом уравнений (4.1) и (4.2), можем пренебречь. В результате ФР задачи изгиба изотропной пластины оказывается равным (при $P = 1$)

$$G(x, y) = G(r) = \frac{r^2 \ln r}{8\pi D}. \quad (4.4)$$

Найденное ФР задачи изгиба изотропной пластины идентично ранее полученным в [1, 7, 30, 33], но методика его поиска реализуется значительно проще и быстрее. Таким образом предложенная методика свелась лишь к поиску функций прогибов нагруженных в центре сосредоточенными нагрузками P круглых пластин радиуса a для различных граничных условий (эти функции прогибов $w(r)$ могут быть легко найдены, например, в [33, 37]), а затем определению из него частного решения и отбрасыванию решения однородного уравнения (пользуясь свойством ФР, определяемых с точностью до решения однородного уравнения).

Далее предложенный метод по определению ФР задачи изгиба изотропной пластины можно также продемонстрировать, решив задачу изгиба круглой пластины под действием сосредоточенного момента в ее центре.

Пластина радиуса a нагружена сосредоточенным моментом в центре (рис. 3). Нагружение является симметричным относительно плоскости действия момента и обратно симметричным относительно плоскости, перпендикулярной к ней. Считая, что плоскостью симметрии является плоскость координат xy , решение дифференциального уравнения изгиба круглой пластины будем искать в виде $w(r, \Omega) = F(r) \cos(\Omega)$.

Опуская, как и ранее приведенные, например, в [37] выкладки, прогиб нагруженной в центре сосредоточенным моментом M свободно опертой по контуру изотропной пластины радиуса a представим в виде ($\rho = r/a$):

$$w(r, \Omega) = \frac{Ma}{8\pi D} \left(\frac{1 + \nu}{3 + \nu} (\rho - \rho^3) + 2 \ln r \right) \cos(\Omega). \quad (4.5)$$

Чтобы из (4.5) получить искомое ФР задачи изгиба изотропной пластины, находящейся под действием сосредоточенной в центре силы, необходимо:

- 1) приравнять $\cos \Omega$ единице, так как искомое ФР не зависит от угла θ , т.е. $G = G(r)$;
- 2) воспользоваться свойством ФР, что если обобщенная функция $U(x)$ является решением уравнения $L_0 U(x) = f(x)$, тогда функция $V(x) = \frac{d^k U(x)}{dx^k}$ будет решением уравнения $L_0 V(x) = \frac{d^k f(x)}{dx^k}$. Для конкретного рассматриваемого случая отмеченное свойство сводится к одинарному интегрированию уравнения (4.5);
- 3) обнулить решения однородного уравнения, воспользовавшись свойством ФР, определяемого с точностью до решения однородного уравнения;

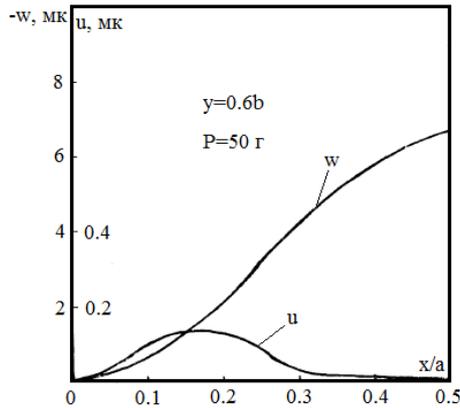


Рис. 4. Тангенциальное перемещение U и прогиб W прямоугольной пластины, находящейся под действием сосредоточенной нагрузки в центре

Fig. 4. Tangential displacement U and deflection W of a rectangular plate under a concentrated load at the center

4) ввести обозначение $Ma = P$, а затем при $P = 1$ окончательно получаем

$$G(x, y) = G(r) = \frac{r^2 \ln r}{8\pi D},$$

что в точности совпадает с ранее полученным в [1, 7, 30, 33] ФР.

5. Экспериментально-теоретический метод

Широко известен разработанный Саченковым А.В. [38] теоретико-экспериментальный метод, суть которого состоит в следующем: на основе анализа уравнений, описывающих рассматриваемое явление, устанавливаются искомые структурные зависимости с точностью до констант или функций, которые характеризуют особенности поведения конструкции, при этом для определения констант или функций проводится эксперимент, заменяющий собой громоздкую и сложную процедуру теоретического решения. Являясь теоретико-экспериментальным методом (ТЭМ), этот метод позволяет с приемлемой количественной точностью решать многие сложные задачи, например, теории пластин и оболочек, иногда не поддающиеся решению другими известными методами.

В настоящей главе воспользуемся новым экспериментально-теоретическим методом (ЭТМ) для поиска ФР, во многом являющимся обратным ТЭМ. Суть его заключается в следующем: Во-первых, получить для находящихся под действием единичных сосредоточенных нагрузок конструкций экспериментальные результаты (дискретные значения искомой функции — обычно перемещения) с помощью какого-либо экспериментального метода, например, ТЭМ, голографической интерферометрии, тензометрирования и т.д. Во-вторых, на основе анализа уравнений, описывающих рассматриваемое явление, и известных граничных условий, например, с помощью метода среднеквадратического приближения определить частное и общее решения дифференциального уравнения. В третьих, так как ФР определяется с точностью до решения однородного уравнения, то обнуление общего решения сразу позволяет получить искомое ФР.

Применим ЭТМ для поиска ФР задачи изгиба изотропной пластины.

На рис. 4 из [39] с помощью метода голографической интерферометрии показано распределение тангенциального перемещения U и прогиба W вдоль оси x для прямоугольной пластины со сторонами $a = 100$ мм, $b = 150$ мм, на которую действует сосредоточенная нагрузка в центре. Пластина была изготовлена из материала Д16АТ толщиной 0,92 мм. Значение максимального прогиба для различных образцов превышает на 3–5 % теоретический результат из [33].

На рис. 5 из [40] с помощью ТЭМ и тензометрирования приведены кривые прогибов в меридиональном направлении для защемленной и свободно опертой круглой пластины,

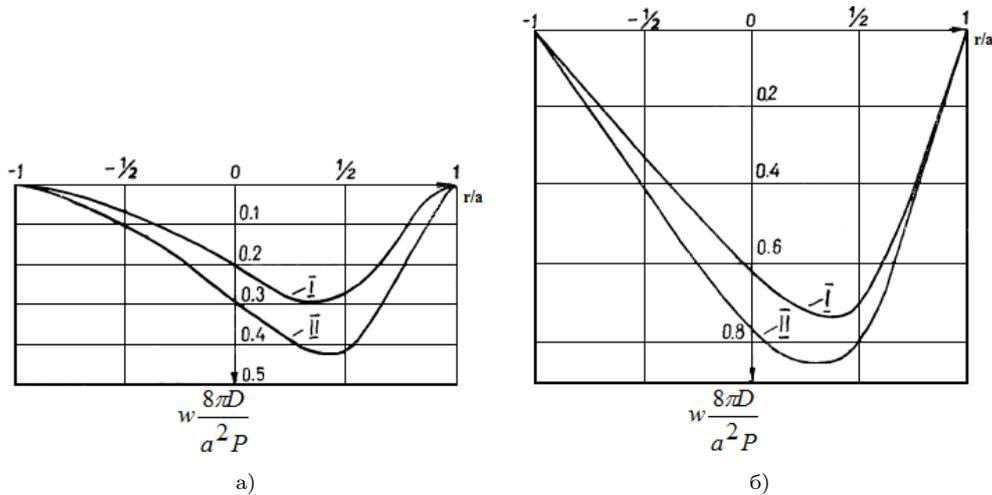


Рис. 5. Прогибы W круглой пластины, находящейся под действием сосредоточенной нагрузки в центре: а) жесткая заделка; б) свободное опирание

Fig. 5. Deflections W of a circular plate under a concentrated load at the center: а) rigid fixing; б) free support

нагруженной сосредоточенной силой на расстоянии $b = a/2$ от центра (I — кривая, даваемая теорией малого прогиба [41]; II — экспериментальная кривая). Испытуемые образцы представляли собой круглые пластинки, диаметр которых варьировался от 220 мм и до 280 мм, а толщина от 0,9 мм до 1,9 мм. Материал пластин — листовой дюралюминий Д16АТ. Всего было исследовано 24 образца.

На основе экспериментально полученных дискретных значений для прогибов круглых пластин, находящихся под действием сосредоточенных в точке $(\xi; \eta)$ нагрузок, при различных граничных условиях на основе анализа дифференциальных уравнений, описывающих прогиб пластин, аппроксимирующую функцию прогиба будем искать в виде

$$\left(\tilde{r} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \right)$$

$$w(x, y) = \tilde{A}\tilde{r}^2 \ln \tilde{r} + \tilde{B}(a^2 - r^2), \quad (5.1)$$

где первое слагаемое представляет собой частное решение, а второе — однородное решение дифференциального уравнения.

Далее с помощью метода среднеквадратического приближения (который с успехом может быть реализована в любом пакете символьной математики, например, в Wolfram Mathematica [31, 32]) по экспериментально полученным дискретным значениям могут быть найдены константы \tilde{A} и \tilde{B} . Затем, осуществляя переход к определению ФР, исключаем из рассмотрения однородное решение. По найденной константе \tilde{A} (в сравнении с точным значением $A = 1/(8\pi D)$) далее можем оценить точность экспериментально полученных дискретных значений для определения ФР. Если же найденную константу \tilde{A} сравнить не с чем, то с помощью формулы (4.1) можно найти ее точное значение A и, таким образом, получить окончательное представление для ФР $G(x, y)$.

Заключение

В статье с помощью альтернативных методов (метод функционального анализа, метод Родена, экспериментально-теоретический метод) удалось существенно упростить методику вычисления точных фундаментальных решений (ФР) линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами без необходимости предварительного глубокого изучения математической теории обобщенных функций и без привлечения аппарата

операционного исчисления. Вышеназванные альтернативные методы позволили значительно упростить, а порой и исключить из рассмотрения, трудные для понимания исследователями теории, акцентировав внимание на минимизации погрешностей дискретизации, аппроксимации и счета. В статье показано, как с помощью вышеприведенных альтернативных методов можно значительно быстрее и с меньшими усилиями получить ФР задач изгиба изотропных пластин (в том числе на упругих основаниях Винклера и Пастернака–Власова) и мембран, а также ФР для двух- и трехмерных гармонических, бигармонических и полигармонических дифференциальных уравнений.

Литература [References]

1. Гельфанд, И.М., Шилов, Г.Е., *Обобщенные функции и действия над ними*. Москва, Добросвет, 2000. [Gelfand I.M., Shilov G.E., *Obobshchennye funktsii i deystviya nad nimi = Generalized functions and actions on them*. Moscow, Dobrosvet, 2000. (in Russian)]
2. Шилов, Г.Е., *Математический анализ. Второй специальный курс*. Москва, Изд-во МГУ, 1984. [Shilov, G.E., *Matematicheskii analiz. Vtoroy spetsial'nyy kurs = Mathematical analysis. The second special course*. Moscow, Publishing House of Moscow State University, 1984. (in Russian)]
3. Владимиров, В.С., Жаринов, В.В., *Уравнения математической физики*. Москва, Физико-математическая литература, 2000. [Vladimirov, V.S., Zharinov, V.V., *Uravneniya matematicheskoy fiziki = Equations of mathematical physics*. Moscow, Physical and mathematical literature, 2000. (in Russian)]
4. Шевченко, В.П., *Интегральные преобразования в теории пластин и оболочек*. Донецк, Донецкий государственный университет, 1977. [Shevchenko, V.P., *Integral'nye preobrazovaniya v teorii plastin i obolochek = Integral transformations in the theory of plates and shells*. Donetsk, Donetsk State University, 1977. (in Russian)]
5. Хермандер, Л., *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье*. Москва, Мир, 1986. [Hörmander, L., *Analiz lineynykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 1. Teoriya raspredeleniy i analiz Fur'e = Analysis of linear partial differential operators. Vol. 1. Theory of distributions and Fourier analysis*. Moscow, Mir, 1986. (in Russian)]
6. Shanz, M., Antes, H., A boundary integral formulation for the dynamic behavior of a Timoshenko beam. *Electronic Journal of Boundary Elements*, 2002, vol. 3, pp. 348–359.
7. Артюхин, Ю.П., Грибов, А.П., *Решение задач нелинейного деформирования пластин и плоских оболочек методом граничных элементов*. Казань, ФЭН, 2002. [Artyukhin, Yu.P., Gribov, A.P., *Reshenie zadach nelineynogo deformirovaniya plastin i plogikh obolochek metodom granichnykh elementov = Solving problems of nonlinear deformation of plates and flat shells by the method of boundary elements*. Kazan, Feng, 2002. (in Russian)]
8. Грибов, А.П., Великанов, П.Г., Применение преобразования Фурье для получения фундаментального решения задачи изгиба ортотропной пластины. В *Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Всероссийской научной конференции*, 2004, ч. 3, с. 67–71. [Gribov, A.P., Velikanov, P.G., Application of the Fourier transform to obtain a fundamental solution to the problem of orthotropic plate bending. In *Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi: Trudy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii = Mathematical modeling and boundary value problems: Proc. of the All-Russian Scientific Conference*, 2004, pt. 3, pp. 67–71. (in Russian)]
9. Великанов, П.Г., Исследование термомеханического изгиба длинной пологой цилиндрической панели методом граничных интегральных уравнений. В *Труды 3-го Международного форума. «Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки». Ч. 3*. Самара, Изд-во СамГТУ, 2007, с. 15–19. [Velikanov, P.G., Investigation of thermomechanical bending of a long flat cylindrical panel by the method of boundary integral equations. In *Trudy 3-go Mezhdunarodnogo foruma. "Aktual'nye problemy sovremennoy nauki. Estestvennyye nauki". Ch. 3 = Proc. of the 3rd Int. Forum "Actual problems of modern Science. Natural Sciences". Pt. 3*. Samara, Publishing House of SamSTU, 2007, pp. 15–19. (in Russian)]
10. Кацикаделис, Дж.Т., *Граничные элементы: Теория и приложения*. Москва, Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2007. [Katsikadelis J.T., *Granichnye elementy: Teoriya i prilozheniya = Boundary elements: Theory and applications*. Moscow, Publishing House of the Association of Construction Universities, 2007. (in Russian)]

11. Великанов, П.Г., Метод граничных интегральных уравнений для решения задач изгиба изотропных пластин, лежащих на сложном двухпараметрическом упругом основании. *Известия Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2008, т. 8, вып. 1, с. 36–42. [Velikanov, P.G., The method of boundary integral equations for solving bending problems of isotropic plates lying on a complex two-parameter elastic base. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika = Proc. of the Saratov University. Series Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2008, vol. 8, iss. 1, pp. 36–42. (in Russian)]
12. Великанов, П.Г., Куканов, Н.И., Халитова, Д.М., Нелинейное деформирование цилиндрической панели ступенчато-переменной жесткости на упругом основании методом граничных элементов. В *Всероссийская научная конференция с международным участием «Актуальные проблемы механики сплошной среды – 2020»*, 2020, с. 111–115. [Velikanov, P.G., Kukanov, N.I., Khalitova, D.M., Nonlinear deformation of a cylindrical panel of step-variable stiffness on an elastic base by the method of boundary elements. In *Vserossiyskaya nauchnaya konferentsiya s mezhdunarodnym uchastiem “Aktual’nye problemy mekhaniki sploshnoy sredy – 2020” = All-Russian scientific conference with international participation “Actual problems of continuum mechanics – 2020”*, 2020, pp. 111–115. (in Russian)]
13. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Куканов, Н.И., Изгиб анизотропной пластины методом граничных элементов. *Актуальные проблемы механики сплошных сред*, 2020, с. 105–111. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Kukanov, N.I., Anisotropic plate bending by the boundary elements method. *Aktual’nye problemy mekhaniki sploshnykh sred = Actual problems of continuum mechanics*, 2020, pp. 105–111. (in Russian)]
14. Великанов, П.Г., Куканов, Н.И., Халитова, Д.М., Использование непрямого метода граничных элементов для расчета изотропных пластин на упругом основании Винклера и Пастернака-Власова. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2021, т. 27, № 2, с. 33–47. [Velikanov, P.G., Kukanov, N.I., Khalitova, D.M., The use of the indirect boundary element method for the calculation of isotropic plates on an elastic base of Winkler and Pasternak-Vlasov. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Bulletin of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 33–47. (in Russian)]
15. Великанов, П.Г., Халитова, Д.М., Решение задач нелинейного деформирования анизотропных пластин и оболочек методом граничных элементов. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2021, т. 27, № 2, с. 48–61. [Velikanov, P.G., Khalitova, D.M., Solving problems of nonlinear deformation of anisotropic plates and shells by the boundary element method. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Bulletin of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 48–61. (in Russian)]
16. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Общая теория ортотропных оболочек. Часть I. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2022, т. 28, № 1–2, с. 46–54. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., General theory of orthotropic shells. Part I. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Bulletin of Samara University. Natural Science series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 46–54. (in Russian)]
17. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Общая теория ортотропных оболочек. Часть II. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2022, т. 28, № 3–4, с. 40–52. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., General theory of orthotropic shells. Part II. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Bulletin of Samara University. Natural Science series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 40–52. (in Russian)]
18. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Математические аналогии для решения задач прочности, устойчивости и колебаний ортотропных пластин и оболочек. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 3, с. 47–54. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Mathematical analogies for solving problems of strength, stability and vibrations of orthotropic plates and shells. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 47–54. (in Russian)] EDN: JYGZJI DOI: 10.31429/vestnik-19-3-47-54
19. Великанова, Н.П., Великанов, П.Г., Проверка утверждения академика Новожилова Г.В. о влиянии погрешности в определении напряжений на величину погрешности в определении ресурса на примере основных деталей двигателя. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 4, с. 48–56. [Velikanova, N.P., Velikanov, P.G., Verification of the statement of academician Novozhilov G.V. on the influence of the error in determining stresses on the magnitude of the error in determining the resource on the example of the main engine

- parts. *Ekologicheskiiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 48–56. (in Russian)] EDN: JZYKZX DOI: [10.31429/vestnik-19-4-48-56](https://doi.org/10.31429/vestnik-19-4-48-56)
20. Velikanov, P., Solution of contact problems of anisotropic plates bending on an elastic base using the compensating loads method. In *E3S Web of Conferences, 2023*, vol. 402 (International Scientific Siberian Transport Forum – TransSiberia 2023), art. 11010. DOI: [10.1051/e3sconf/202340211010](https://doi.org/10.1051/e3sconf/202340211010)
 21. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследования по динамике рамных конструкций. *Геосистемы переходных зон*, 2023, т. 7, no. 2, с. 180–195. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Research on the dynamics of frame structures. *Geosistemy perekhodnykh zon = Geosystems of transition zones*, 2023, vol. 7, no. 2, pp. 180–195. (in Russian)]
 22. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследование по динамике многоэтажных зданий. *Геосистемы переходных зон*, 2023, т. 7, № 3, с. 304–315. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Research on the dynamics of multi-storey buildings. *Geosistemy perekhodnykh zon = Geosystems of transition zones*, 2023, vol. 7, no. 3, pp. 304–315. (in Russian)]
 23. Великанов, П.Г., Математические аналоги и аналогии для решения задач методом граничных элементов. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 1, с. 6–20. [Velikanov, P.G., Mathematical analogies and analogies for solving problems by the boundary element method. *Ekologicheskiiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 1, pp. 6–20. (in Russian)] EDN: WRVRQN DOI: [10.31429/vestnik-21-1-6-20](https://doi.org/10.31429/vestnik-21-1-6-20)
 24. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследование композитов в виде слоистых ортотропных оболочек. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 2, с. 23–34. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Investigation of composites in the form of layered orthotropic shells. *Ekologicheskiiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 23–34. (in Russian)] EDN: YPNJFT DOI: [10.31429/vestnik-21-2-23-34](https://doi.org/10.31429/vestnik-21-2-23-34)
 25. Великанов П.Г., Артюхин Ю.П., Исследование композитов с помощью уравнений общей теории ортотропных оболочек в комплексной форме. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 3, с. 6–16. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P. Investigation of composites using the equations of the general theory of orthotropic shells in a complex form. *Ekologicheskiiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 3, pp. 6–16. (in Russian)] EDN: ERCRUG DOI: [10.31429/vestnik-21-3-6-15](https://doi.org/10.31429/vestnik-21-3-6-15)
 26. Бронштейн, И.Н. Семендяев, К.А., *Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов*. Москва, Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. [Bronstein, I.N., Semendyaev, K.A., *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vuzov = Handbook of Mathematics for engineers and university students*. Moscow, Nauka, Gl. ed. phys.-mat. lit., 1986. (in Russian)]
 27. Коноплев, Ю.Г., Шалабанов, А.К., Метод голографической интерферометрии в задачах о действии локальных нагрузок на пластины и оболочки. *Исследования по теории пластин и оболочек*, 1976, вып. 12. С. 27–37. [Konoplev, Yu.G., Shalabanov, A.K., Method of holographic interferometry in problems of the effect of local loads on plates and shells. *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek = Research on the theory of plates and shells*, 1976, iss. 12. pp. 27–37. (in Russian)]
 28. Шалабанов, А.К., *Новые соотношения теории тонких оболочек*. Казань, НОУ ВПО «Академия управления «ТИСБИ»», 2010. [Shalabanov, A.K., *Novye sootnosheniya teorii tonkikh obolochek = New relations of the theory of thin shells*. Kazan, NOU VPO «Academy of Management «TISBI»», 2010. (in Russian)]
 29. Shalabanov, A.K., Three-exposure method of F1 hologram interferometry in mechanics of thin-walled spatial structures. In *Proc. SPIE*, 1995, vol. 2545, p. 327–342.
 30. Лукасевич, С., *Локальные нагрузки в пластинах и оболочках*. Москва, Мир, 1982. [Lukasevich, S., *Lokal'nye nagruzki v plastinakh i obolochkakh = Local loads in plates and shells*. Moscow, Mir, 1982. (in Russian)]
 31. Артюхин, Ю.П., Гурьянов, Н.Г., Котляр, Л.М., *Система Математика 4.0 и ее приложения в механике*. Казань, Казанское математическое общество, Изд-во КамПИ, 2002. [Artyukhin, Yu.P., Guryanov, N.G., Kotlyar, L.M., *Sistema Matematika 4.0 i ee prilozheniya v mekhanike = The Mathematics 4.0 system and its applications in mechanics*. Kazan, Kazan Mathematical Society, Publishing House of CamPI, 2002. (in Russian)]

32. Великанов П.Г., *Основы работы в системе Mathematica*. Казань, Изд-во Казанского гос. техн. ун-та, 2010. [Velikanov P.G., *Osnovy raboty v sisteme Mathematica = Fundamentals of work in the Mathematics system*. Kazan, Publishing House of Kazan State Technical University, 2010. (in Russian)]
33. Тимошенко, С.П., Войновский-Кригер, С., *Пластинки и оболочки*. Москва, Наука, 1966. [Timoshenko, S.P., Voinovsky-Krieger, S., *Plastinki i obolochki = Plates and shells*. Moscow, Nauka, 1966. (in Russian)]
34. Полянин, А.Д. *Справочник по линейным уравнениям математической физики*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2001. [Polyanin, A.D. *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki = Handbook of linear equations of mathematical physics*. Moscow, FIZMATLIT, 2001. (in Russian)]
35. Кончковский, З., *Плиты. Статические расчеты*. Москва, Стройиздат, 1984. [Konchkovsky, Z., *Plity. Statische raschety = Plates. Static calculations*. Moscow, Stroyizdat, 1984. (in Russian)]
36. Абрамовиц, М., Стегун, Ш.А., *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами*. Москва, Наука, 1979. [Abramovits, M., Stegun, S.A., *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam s formulami, grafikami i tablitsami = Handbook of special functions with formulas, graphs and tables*. Moscow, Nauka, 1979. (in Russian)]
37. Савельев, Л.М., *Теория пластин и оболочек*. Самара, СГАУ, 2013. [Savelyev, L.M., *Teoriya plastin i obolochek = Theory of plates and shells*. Samara, SSAU, 2013. (in Russian)]
38. Саченков, А.В., Теоретико-экспериментальный метод исследования устойчивости пластин и оболочек. *Исследования по теории пластин и оболочек*, 1970. С. 391–433. [Sachenkov, A.V., Theoretical and experimental method for studying the stability of plates and shells. *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek = Studies on the theory of plates and shells*, 1970. pp. 391–433. (in Russian)]
39. Коноплев, Ю.Г., Шалабанов, А.К., Метод голографической интерферометрии в задачах о действии локальных нагрузок на пластины и оболочки. *Исследования по теории пластин и оболочек*, 1976, вып. 12. С. 27–37. [Konoplev, Yu.G., Shalabanov, A.K., The method of holographic interferometry in problems of the effect of local loads on plates and shells. *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek = Studies on the Theory of plates and shells*, 1976, vol. 12. pp. 27–37. (in Russian)]
40. Коноплев, Ю.Г., Исследование больших прогибов круглых пластин при локальных нагрузках. *Исследования по теории пластин и оболочек*, 1965, вып. 3, с. 81–90. [Konoplev, Yu.G., Investigation of large deflections of round plates under local loads. *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek = Research on the theory of plates and shells*, 1965, iss. 3, pp. 81–90. (in Russian)]
41. Пономарев, С.Д., Бидерман, В.Л., *Расчеты на прочность в машиностроении, т. II*. Москва, Mashgiz, 1958. [Ponomarev S.D., Biderman V.L., *Raschety na prochnost' v mashinostroenii, t. II = Strength calculations in mechanical engineering, vol. II*. Moscow, Mashgiz, 1958. (in Russian)]