

УДК 539.3

EDN: VYZUFP DOI: 10.31429/vestnik-21-3-45-60

## Изгиб конечного моментного упругого стержня под действием нестационарных нагрузок

Д. В. Тарлаковский<sup>1,2</sup>, Куок Чиен Май<sup>2</sup><sup>1</sup> НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Мичуринский пр., 1, Москва, 119192, Россия<sup>2</sup> Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Волоколамское шоссе, 4, Москва, 125993, Россия✉ Тарлаковский Дмитрий Валентинович; ORCID 0000-0002-9556-7442; e-mail: [tdvhome@mail.ru](mailto:tdvhome@mail.ru)

*Аннотация.* Исследуется нестационарный изгиб моментного упругого стержня конечной длины под действием нестационарных нагрузок. Используется система уравнений общей модели тел без дополнительных предположений. Материал стержня предполагается однородным и изотропным. Помимо упругих констант материала учитываются и дополнительные физические параметры среды, необходимые при учете моментных эффектов в материале. В качестве граничных условий на обоих концах стержня используются обобщенные условия шарнирного опирания. Начальные условия предполагаются равными нулю. Для решения задачи используется разложение функций и внешних нагрузок в тригонометрические ряды Фурье. Их подстановка в исходные соотношения приводит к системе уравнений для коэффициентов рядов. Для ее решения используется преобразование Лапласа по времени. В расчетном примере рассматривается изгиб моментно-упругого стержня под действием сосредоточенной силы.

*Ключевые слова:* моментный упругий стержень, начально-краевая задача, ряды Фурье, интегральное преобразование Лапласа, функции Грина, функции влияния, нестационарные процессы.

*Финансирование.* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-19-00217).

*Цитирование:* Тарлаковский Д. В., Май Куок Чиен Изгиб конечного моментного упругого стержня под действием нестационарных нагрузок // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 3. С. 45–60. EDN: VYZUFP. DOI: 10.31429/vestnik-21-3-45-60

Поступила 30 августа 2024 г. После доработки 20 сентября 2024 г. Принято 23 сентября 2024 г. Публикация 24 сентября 2024 г.

Вклад каждого соавтора в процесс написания статьи на разных этапах ее создания: идея работы (Тарлаковский Д.В.), рассчитывать и строить графики (Тарлаковский Д.В., Май Куок Чиен), написание статьи (Май Куок Чиен), внесение правок и утверждение окончательного варианта (Тарлаковский Д.В.). Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## Bending of a Finite Moment Elastic Rod under the Effect of an Unsteady Load

D. V. Tarlakovskii<sup>1,2</sup>, Quoc Chien Mai<sup>2</sup><sup>1</sup> Research Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Michurinsky Ave., 1, Moscow, 119192, Russia<sup>2</sup> Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, 125993, Russia✉ Dmitrii V. Tarlakovskii; ORCID 0000-0002-9556-7442; e-mail: [tdvhome@mail.ru](mailto:tdvhome@mail.ru)

*Abstract.* To study the unsteady bending of a moment-elastic rod of finite length under the action of unsteady load. The system of equations of the general model of bodies without additional assumptions is used. The rod material is assumed to be homogeneous and isotropic. In addition to the elastic constants of the material, additional physical parameters of the medium are taken into account, which are necessary when taking into account moment effects in the material. Generalized conditions of hinge support are used as boundary conditions at both ends of the rod. The initial conditions are assumed to be zero. To solve the problem, the expansion of functions and external loads into trigonometric Fourier series is used. Their substitution into the initial relations leads to a system of equations for the coefficients of the series. To solve it, the Laplace transform over time is used. The calculation example considers the bending of a moment-elastic rod under the action of a concentrated force.

*Keywords:* moment elastic rod, initial boundary value problem, Fourier series, Laplace integral transform, Green's functions, transient functions, wave processes.

*Funding.* The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 20-19-00217).

*Cite as:* Tarlakovskii, D. V., Mai, Quoc Chien, Bending of a finite moment elastic rod under the effect of an unsteady load. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 3, pp. 45–60. DOI: 10.31429/vestnik-21-3-45-60

Received 30 August 2024. Revised 20 September 2024. Accepted 23 September 2024. Published 24 September 2024.

The contribution of each co-author to the process of writing the article at different stages of its creation: idea of the work (Tarlakovskii D.V.), calculation and construction of graphs (Tarlakovskii D.V., Mai Quoc Chien), writing the article (Mai Quoc Chien), making edits and approving the final version (Tarlakovskii D.V.). The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\) license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## Введение

В настоящее время с развитием современных технологий возникает необходимость использования более совершенных по сравнению с классической теорией упругости моделей, позволяющих учитывать микроструктуру вещества. Одной из таких моделей является сплошная среда, в которой деформация описывается не только вектором смещения, но и вектором вращения. В этих моделях, в отличие от классической теории, напряженное состояние описывается асимметричным тензором напряжений, поэтому упругие тела характеризуются большим количеством упругих постоянных.

Общая теория упругих моментов была впервые разработана братьями Коссера (Э. Коссера, Ф. Коссера) в 1909 г. [1]. Особенности волновых процессов в микрополярных средах посвящены статьи [2–9]. В статьях [10, 11] развиваются численные методы и алгоритмы решения статических и динамических краевых задач для непрерывной среды Коссера.

В [12, 13] гипотезы были сформулированы на основе построения модели приложения статического деформирования микрополярного упругого стержня. В [14, 15] построены основные соотношения одномерной микрополярной теории упругих стержней и решена задача Сен-Венана. В работе [16] предложена модель изгиба упругого стержня, основанная на трехмерной линеаризованной теории микроупругой упругости. Вывод основан на методе асимптотического разложения по толщине стержня. Исследуется сходимость используемых разложений.

В предлагаемой статье на основе общей теории тонкостенных моментно-упругих тел [17, 18] и результатов работ [19] получены нестационарные уравнения изгиба моментного упругого стержня. Рассмотрена задача об изгибе моментно-упругого стержня конечной длины при обобщенных условиях шарнирного опирания. Для ее решения используются функции влияния. Они находятся с помощью разложения в ряд Фурье по пространственной координате и использования преобразования Лапласа по времени. С использованием принципа суперпозиции [20–25] получены разрешающие интегральные соотношения.

## 1. Постановка задачи

Для исследования нестационарного изгиба моментного упругого стержня используем уравнения общей модели, которые учитывают поперечное обжатие стержня [18]

$$\ddot{w} = \gamma_{\alpha+}^{-2} w'' + \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi' + 2\alpha\omega_2' + q,$$

$$\ddot{\psi} = \psi'' - r^{-2} (\gamma_{\alpha-}^{-2} w' + \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi - 2\alpha\omega_2) + m_1, \quad (1.1)$$

$$\ddot{\omega}_2 = 2\alpha v (\psi - w') + \gamma_2^{-2} \omega_2'' - 4\alpha v \omega_2 + \tilde{m}_{M2};$$

$$T_{13} = \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi + \gamma_{\alpha+}^{-2} w' + 2\alpha\omega_2, T_{31} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi + \gamma_{\alpha-}^{-2} w' - 2\alpha\omega_2,$$

$$M_{11} = \psi', \quad M_{22} = M_{12} = M_{21} = M_{23} = M_{32} = 0; \quad (1.2)$$

$$R_{12} = \omega_2', \quad R_{21} = \eta\omega_2'.$$

Здесь и далее используется следующая система безразмерных величин (при одинаковом начертании величин они обозначены штрихом, который в последующем изложении опускается):

$$\begin{aligned} x'_i &= \frac{x_i}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad u'_i = \frac{u_i}{L}, \quad w' = \frac{w}{L}, \quad \varphi'_i = \varphi_i L, \quad \varphi'_3 = \varphi_3 L, \quad r' = \frac{r}{L}, \\ q' &= \frac{qL}{h(\lambda + 2\mu)}, \quad m'_1 = \frac{m_1 L^2}{I(\lambda + 2\mu)}, \quad \tilde{m}'_{M2} = \frac{\tilde{m}_{M2} L^2}{h}, \\ T'_{kl} &= \frac{T_{kl}}{h(\lambda + 2\mu)}, \quad R'_{kl} = \frac{R_{kl} L}{h(\gamma + \varepsilon)}, \quad M'_{kk} = \frac{M_{kk} L}{I(\lambda + 2\mu)}, \quad k, l = 1, 2, 3, \\ \kappa &= \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \quad \alpha' = \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{J}}, \\ \gamma_{\alpha\pm}^2 &= \frac{\gamma_1^2}{1 \pm \gamma_1^2 \alpha}, \quad \gamma_1^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \quad \eta = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, \quad \gamma_2^2 = \frac{c_1^2}{c_3^2}, \quad \nu = \frac{\rho L^2}{J}, \quad r^2 = I/h. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В приведённых выше формулах  $w$  — горизонтальное перемещение;  $\omega_2$  — изменение угла поворота,  $\psi$  — поперечное обжатие,  $q$  — нагрузка,  $m_1$  — внешний поверхностный момент,  $\tilde{m}_{M2}$  — момент второго порядка,  $L$  — длина стержня;  $T_{13}, T_{31}$  — перерезывающие усилия;  $M_{11}, M_{22}$  — тангенциальные моменты;  $R_{12}, R_{21}$  — моментные перерезывающие усилия;  $\lambda, \mu$  и  $\rho$  — упругие константы Ламе и плотность материала стержня,  $\alpha, \gamma, \varepsilon$  — дополнительные физические параметры среды при наличии моментных эффектов,  $J$  — массовая мера инерции среды при вращении,  $I = h^3/12$ ,  $h$  — высота сечения стержня.

Полагаем, что стержень единичной длины имеет в сечениях с координатами  $x = 0$  и  $x = 1$  закрепление в виде обобщенного шарнирного опирания [18] (прогибы  $w$ , момент  $M_{11}$  и усилия  $R_{12}$  отсутствуют), что определяют вытекающие из общей теории равенства

$$w|_{x=0,1} = 0, \quad \psi'|_{x=0,1} = 0, \quad \omega'_2|_{x=0,1} = 0. \quad (1.4)$$

Начальные условия полагаем нулевыми:

$$w|_{\tau=0} = \dot{w}|_{\tau=0} = 0, \quad \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0, \quad \omega_2|_{\tau=0} = \dot{\omega}_2|_{\tau=0} = 0. \quad (1.5)$$

## 2. Метод решения

Решение этой задачи и внешние нагрузки представляем в виде тригонометрических рядов Фурье

$$w(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\tau) \sin \lambda_n x, \quad q(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\tau) \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi n, \quad (2.1)$$

$$\psi(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\tau) \cos \lambda_n x, \quad m_1(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} m_{1n}(\tau) \cos \lambda_n x, \quad (2.2)$$

$$\omega_2(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{2n}(\tau) \cos \lambda_n x, \quad \tilde{m}_{M2}(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{m}_{M2n}(\tau) \cos \lambda_n x.$$

При этом граничные условия (1.4), очевидно, выполняются, а нетривиальные внутренние силовые факторы в силу (1.2) есть суммы следующих рядов:

$$\begin{aligned} T_{13} &= \sum_{n=0}^{\infty} T_{13n} \cos \lambda_n x, \quad T_{13n} = \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_n + \gamma_{\alpha+}^{-2} \lambda_n w_n + 2\alpha \omega_{2n}, \\ T_{31} &= \sum_{n=0}^{\infty} T_{31n} \cos \lambda_n x, \quad T_{31n} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_n + \gamma_{\alpha-}^{-2} \lambda_n w_n - 2\alpha \omega_{2n}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$M_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} M_{11n} \sin \lambda_n x, \quad M_{11n} = -\lambda_n \psi_n, \quad R_{12} = \sum_{n=1}^{\infty} R_{12n} \sin \lambda_n x, \quad R_{12n} = -\lambda_n \omega_{2n}.$$

Подстановка рядов (2.1) и (2.2) в уравнения (1.1) приводит к следующим соотношениям для коэффициентов этих рядов:

– при  $n = 0$

$$\ddot{\psi}_0 = \psi_0'' - r^{-2} (\gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_0 - 2\alpha\omega_{20}) + m_{10}, \quad (2.4)$$

$$\ddot{\omega}_{20} = 2\alpha v \psi_0 + \gamma_2^{-2} \omega_{20}'' - 4\alpha v \omega_{20} + \tilde{m}_{M20};$$

– при  $n \geq 1$

$$\ddot{w}_n + \lambda_n^2 \gamma_{\alpha+}^{-2} w_n + \lambda_n (\gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_n + 2\alpha\omega_{2n}) = q_n,$$

$$\ddot{\psi}_n + \lambda_n^2 \psi_n + r^{-2} (\gamma_{\alpha-}^{-2} \lambda_n w_n + \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_n - 2\alpha\omega_{2n}) = m_{1n}, \quad (2.5)$$

$$\ddot{\omega}_{2n} + \gamma_2^{-2} \lambda_n^2 \omega_{2n} + 4\alpha v \omega_{2n} - 2\alpha v (\psi_n - \lambda_n w_n) = \tilde{m}_{M2n}.$$

Далее будем считать, что  $m_{10} = \tilde{m}_{M20} = 0$ . Это, как следует из уравнений (2.4), с учетом нулевых начальных условий приводит к равенствам  $\psi_0 = \omega_{20} = 0$ . Поэтому нижний индекс в рядах (2.2) следует положить равным единице:

$$\begin{aligned} \psi(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(\tau) \cos \lambda_n x, & m_1(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} m_{1n}(\tau) \cos \lambda_n x, \\ \omega_2(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{2n}(\tau) \cos \lambda_n x, & \tilde{m}_{M2}(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}_{M2n}(\tau) \cos \lambda_n x. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В пространстве преобразований Лапласа система уравнений (2.5) имеет следующий вид:

$$(k_{1n}^2 + \alpha\lambda_n^2) w_n^L + \lambda_n (\gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_n^L + 2\alpha\omega_{2n}^L) = q_n^L,$$

$$(k_{0n}^2 + r^{-2} \gamma_{\alpha+}^{-2}) \psi_n^L + r^{-2} (\gamma_{\alpha-}^{-2} \lambda_n w_n^L - 2\alpha\omega_{2n}^L) = m_{1n}^L, \quad (2.7)$$

$$(k_{2n}^2 + 4\alpha v) \omega_{2n}^L - 2\alpha v (\psi_n^L - \lambda_n w_n^L) = \tilde{m}_{M2n}^L.$$

Решение системы алгебраических уравнений (2.6) можно представить

$$w_n^L = G_{wqn}^L q_n^L + G_{wm_{1n}}^L m_{1n}^L + G_{wM_{2n}}^L \tilde{m}_{M2n}^L,$$

$$\psi_n^L = G_{\psi qn}^L q_n^L + G_{\psi m_{1n}}^L m_{1n}^L + G_{\psi M_{2n}}^L \tilde{m}_{M2n}^L, \quad (2.8)$$

$$\omega_{2n}^L = G_{\omega_2 qn}^L q_n^L + G_{\omega_2 m_{1n}}^L m_{1n}^L + G_{\omega_2 M_{2n}}^L \tilde{m}_{M2n}^L.$$

Здесь  $G_{wqn}^L, G_{wm_{1n}}^L, G_{wM_{2n}}^L, G_{\psi qn}^L, G_{\psi m_{1n}}^L, G_{\psi M_{2n}}^L, G_{\omega_2 qn}^L, G_{\omega_2 m_{1n}}^L, G_{\omega_2 M_{2n}}^L$  — изображения по Лапласу коэффициентов разложений в ряд Фурье функций Грина, которые имеют вид

$$\begin{aligned} G_{wqn}^L &= \frac{P_{wqn}}{P_n}, & G_{wm_{1n}}^L &= -\frac{\lambda_n P_{wm_{1n}}}{P_n}, & G_{wM_{2n}}^L &= -\frac{2\alpha\lambda_n P_{wM_{2n}}}{P_n}, \\ G_{\psi qn}^L &= -\frac{r^{-2} \lambda_n P_{\psi qn}}{P_n}, & G_{\psi m_{1n}}^L &= \frac{P_{\psi m_{1n}}}{P_n}, & G_{\psi M_{2n}}^L &= \frac{2\alpha r^{-2} P_{\psi M_{2n}}}{P_n}, \\ G_{\omega_2 qn}^L &= \frac{2\alpha v \lambda_n P_{\omega_2 qn}}{P_n}, & G_{\omega_2 m_{1n}}^L &= \frac{2\alpha v P_{\omega_2 m_{1n}}}{P_n}, & G_{\omega_2 M_{2n}}^L &= \frac{P_{\omega_2 M_{2n}}}{P_n}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} P_n &= Q_{6n} + P_{4n} + P_{2n}, & Q_{6n} &= Q_6|_{q^2=\lambda_n^2}, & P_{4n} &= P_4|_{q^2=\lambda_n^2}, & P_{2n} &= P_2|_{q^2=\lambda_n^2}, \\ P_{wqn} &= P_{wq}|_{q^2=\lambda_n^2}, & P_{wm_{1n}} &= -\lambda_n P_{wm_1}|_{q^2=\lambda_n^2}, & P_{wM_{2n}} &= -2\alpha\lambda_n P_{wM_2}|_{q^2=\lambda_n^2}, \\ P_{\psi qn} &= -r^{-2} \lambda_n P_{\psi q}|_{\lambda_n^2=q^2}, & P_{\psi m_{1n}} &= P_{\psi m_1}|_{\lambda_n^2=q^2}, & P_{\psi \tilde{m}_{M_{2n}}} &= 2\alpha r^{-2} P_{\psi \tilde{m}_{M_2}}|_{\lambda_n^2=q^2}, \\ P_{\omega_2 qn} &= 2\alpha v \lambda_n P_{\omega_2 q}|_{q^2=\lambda_n^2}, & P_{\omega_2 m_{1n}} &= 2\alpha v P_{\omega_2 m_1}|_{q^2=\lambda_n^2}, & P_{\omega_2 M_{2n}} &= P_{\omega_2 \tilde{m}_{M_2}}|_{q^2=\lambda_n^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_n &= Q_{6n} + P_{4n} + P_{2n}, \quad Q_{6n} = k_{0n}^2 k_{2n}^2 (k_{1n}^2 + \alpha \lambda_n^2), \\
 P_{4n} &= 4k_{1n}^2 (4\alpha v k_{0n}^2 + r^{-2} \gamma_{\alpha+}^{-2} k_{2n}^2) + r^{-2} \gamma_1^{-2} (3\alpha - \gamma_1^{-2}) \lambda_n^2 k_{2n}^2, \quad P_{2n} = 4\alpha v r^{-2} \gamma_1^{-2} s^2, \\
 P_{wqn} &= (k_{0n}^2 + r^{-2} \gamma_1^{-2}) (k_{2n}^2 + 4\alpha v) + r^{-2} \alpha k_{2n}^2, \\
 P_{\psi qn} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} k_{2n}^2 + 4\alpha v \gamma_1^{-2}, \quad P_{\omega_2 qn} = k_0^2 + 2r^{-2} \gamma_1^{-2}. \\
 P_{wm_1n} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} k_{2n}^2 + 4\alpha v \gamma_1^{-2}, \quad P_{\psi m_1n} = k_{2n}^2 (k_{1n}^2 + \alpha \lambda_n^2) + 4\alpha v k_{1n}^2, \\
 P_{\omega_2 m_1n} &= k_{1n}^2 + \gamma_1^{-2} \lambda_n^2, \quad P_{w\tilde{m}_{M2}n} = k_{0n}^2 + 2r^{-2} \gamma_1^{-2}, \quad P_{\psi\tilde{m}_{M2}n} = k_{1n}^2 + \gamma_1^{-2} \lambda_n^2, \\
 P_{\omega_2\tilde{m}_{M2}n} &= (k_{1n}^2 + \alpha \lambda_n^2) (k_{0n}^2 + r^{-2} \gamma_{\alpha+}^{-2}) - \gamma_{\alpha-}^{-4} r^{-2} \lambda_n^2.
 \end{aligned}$$

Знаменатель в (2.9) определяется так

$$\begin{aligned}
 P_n &= s^6 + p_{2n} s^4 + p_{1n} s^2 + p_{n0}, \quad p_{2n} = q_{62} \lambda_n^2 + 4 (4\alpha v + r^{-2} \gamma_{\alpha+}^{-2}), \\
 p_{1n} &= q_{61} \lambda_n^4 + \{32\alpha v + r^{-2} [4\gamma_{\alpha+}^{-2} (\gamma_2^{-2} + 1) + \gamma_1^{-2} (3\alpha - \gamma_1^{-2})]\} \lambda_n^2 + 4\alpha v r^{-2} \gamma_1^{-2}, \\
 p_{n0} &= \lambda_n^4 \{q_{60} \lambda_n^2 + \gamma_1^{-2} [16\alpha v + r^{-2} \gamma_2^{-2} (3\gamma_1^{-2} + 7\alpha)]\},
 \end{aligned}$$

где коэффициенты  $q_{62}$ ,  $q_{61}$ ,  $q_{60}$

$$q_{62} = 1 + \gamma_{\alpha+}^{-2} + \gamma_2^{-2}, \quad q_{61} = \gamma_2^{-2} + (1 + \gamma_2^{-2}) \gamma_{\alpha+}^{-2} = q_{62} + q_{60} - 1, \quad q_{60} = \gamma_2^{-2} \gamma_{\alpha+}^{-2}.$$

Поскольку функции в (2.9) являются рациональными, то их оригиналы достаточно просто вычисляются с помощью вычетов. Обозначая  $s_{nj}$  ( $j = \overline{1, 6}$ ) корни уравнения  $P_n(s^2) = 0$ , получаем

$$\begin{aligned}
 G_{\zeta n}(\tau) &= \sum_{j=1}^6 \operatorname{res}_{s=s_{nj}} G_{\zeta n}^L e^{s\tau} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 g_{\zeta nj} e^{s_{nj}\tau}, \quad g_{\zeta nj} = \frac{P_{\zeta n}(s_{nj}^2)}{2s_{nj} (3s_{nj}^4 + 2p_{2n}s_{nj}^2 + p_{1n})}, \quad (2.10) \\
 \zeta &= (wq, wm_1, wM2, \psi q, \psi m_1, \psi M2, \omega_2 q, \omega_2 m_1, \omega_2 M2n).
 \end{aligned}$$

Оригиналы равенств (2.8) имеют вид

$$\begin{aligned}
 w_n(\tau) &= G_{wqn}(\tau) * q_n(\tau) + G_{wm_1n}(\tau) * m_{1n}(\tau) + G_{wM2n}(\tau) * \tilde{m}_{M2n}(\tau), \\
 \psi_n(\tau) &= G_{\psi qn}(\tau) * q_n(\tau) + G_{\psi m_1n}(\tau) * m_{1n}(\tau) + G_{\psi M2n}(\tau) * \tilde{m}_{M2n}(\tau), \quad (2.11) \\
 \omega_{2n}(\tau) &= G_{\omega_2 qn}(\tau) * q_n(\tau) + G_{\omega_2 m_1n}(\tau) * m_{1n}(\tau) + G_{\omega_2 M2n}(\tau) * \tilde{m}_{M2n}(\tau).
 \end{aligned}$$

где знак «\*» означает операцию свёртки по времени:

$$f(\tau) * g(\tau) = \int_0^\tau f(t) g(\tau - t) dt = \int_0^\tau f(\tau - t) g(t) dt.$$

### 3. Примеры расчётов

В расчётах использованы механические характеристики для композитного материала (алюминиевая дробь в эпоксидной смоле) [2], проявляющего моментные свойства,

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 7,59 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \mu = 1,89 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \alpha = 7,45 \cdot 10^6 \text{ Па}, \\
 \gamma + \varepsilon &= 2,64 \cdot 10^3 \text{ Н}, \quad J = 0,429 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}, \quad \rho = 2,19 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.
 \end{aligned}$$

Размерную длину стержня принимаем равной  $L = 1$  м. Полагаем, что стержень имеет квадратное поперечное сечение со стороной  $h = 0,05$  м. Тогда с использованием (1.3), получаем

$$r^2 = \frac{h^2}{12L^2} = 0,208 \cdot 10^{-3}.$$

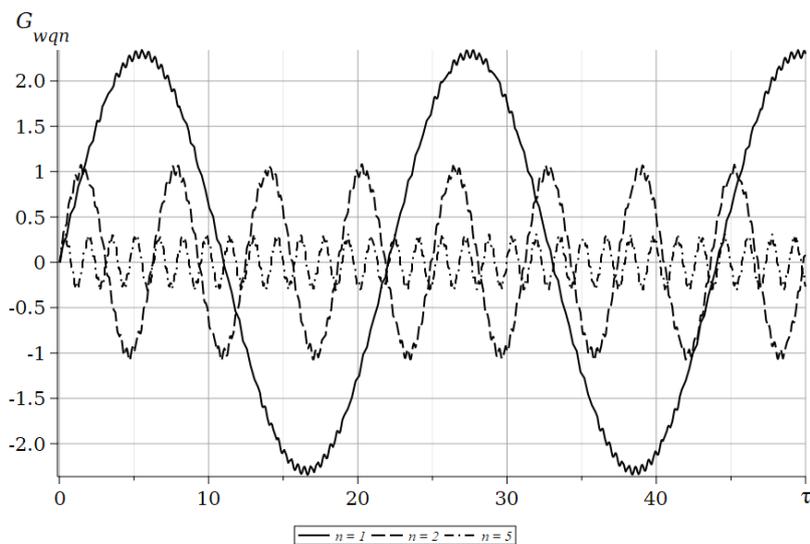


Рис. 1. Зависимости  $G_{wqn}(\tau)$

Fig. 1. Dependencies  $G_{wqn}(\tau)$

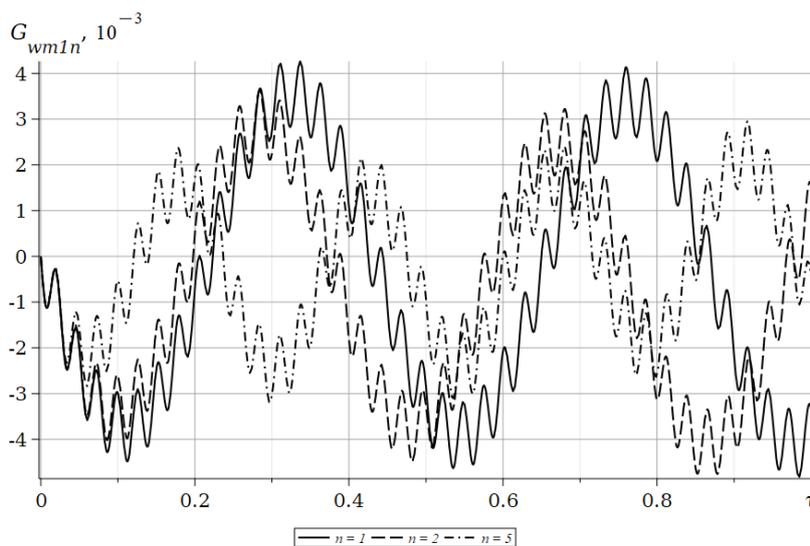


Рис. 2. Зависимости  $G_{wm1n}(\tau)$

Fig. 2. Dependencies  $G_{wm1n}(\tau)$

Соответствующие безразмерные параметры определяются так:

$$\kappa = 0,668, \quad \alpha = 0,655 \cdot 10^{-3},$$

$$\gamma_1 = 2,45, \quad \gamma_2 = 0,919, \quad \gamma_{\alpha+} = 2,45, \quad \nu = 5,1 \cdot 10^6.$$

На рис. 1–3 приведены зависимости от времени оригиналов коэффициентов  $G_{wqn}(\tau)$ ,  $G_{wm1n}(\tau)$  и  $G_{wM2n}(\tau)$ . Здесь сплошные кривые соответствуют  $n = 1$ , штриховые —  $n = 2$ , штрихпунктирные —  $n = 5$ . Видно, что с увеличением номера  $n$  максимальные по модулю значения этих функций уменьшаются.

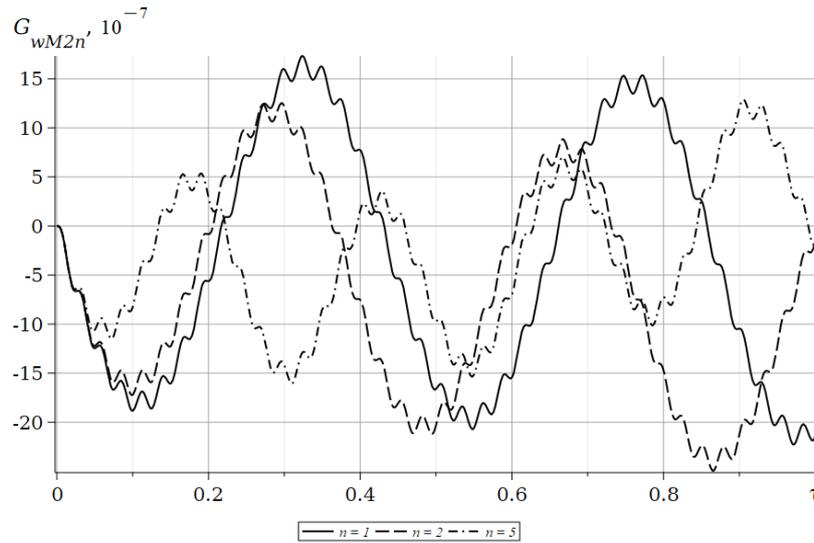


Рис. 3. Зависимости  $G_{wM2n}(\tau)$

Fig. 3. Dependencies  $G_{wM2n}(\tau)$

Далее рассмотрим воздействие на моментно упругий стержень сосредоточенной поперечной нагрузки вида

$$q(x, \tau) = f(\tau) \delta(x - x_0), \quad m_1 = \tilde{m}_{M2} = 0 \quad (0 < x_0 < 1), \quad (3.1)$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

Отсюда получаем

$$q_n(\tau) = 2f(\tau) \int_0^1 \delta(x - x_0) \sin \lambda_n x dx = 2f(\tau) \sin \lambda_n x_0. \quad (3.2)$$

При этом в правых частях равенств (2.11) остаются только первые слагаемые

$$\begin{aligned} w_n(\tau) &= G_{wqn}(\tau) * q_n(\tau), \quad \psi_n(\tau) = G_{\psiqn}(\tau) * q_n(\tau), \\ \omega_{2n}(\tau) &= G_{\omega_2qn}(\tau) * q_n(\tau). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отметим, что все интегралы в (3.3) вычисляются аналитически.

На рис. 4–6 приведены построенные зависимости функций  $w$ ,  $\psi$  и  $\omega_2$  при  $x_0 = 1/2$  и  $f(\tau) = H(\tau)$  от координаты и времени соответственно для различных значений  $\tau$  и  $x$ . Сплошные кривые соответствуют расчетам с учетом первых 10 членов, штриховые кривые — с учетом первых 20 членов, штрихпунктирные кривые — с учетом первых 30 членов ряда разложения (2.1), (2.2).

На рис. 7–10 приведены распределения  $T_{13}$ ,  $T_{31}$ ,  $M_{11}$  и  $R_{12}$  от координаты и времени соответственно для различных значений  $\tau$  и  $x$ . Сплошные кривые соответствуют расчетам с учетом первых 10 членов, штриховые кривые — с учетом первых 20 членов, штрихпунктирные кривые — с учетом первых 30 членов ряда разложения (2.3).

## Заключение

Приведена математическая формула и построено решение задачи об изгибе моментного упругого стержня под действием сосредоточенной нестационарной нагрузки. Функции Грина для стержня упругого момента находятся аналитически. Представлены зависимости прогиба, независимого угла вращения, а также внутренних силовых факторов.

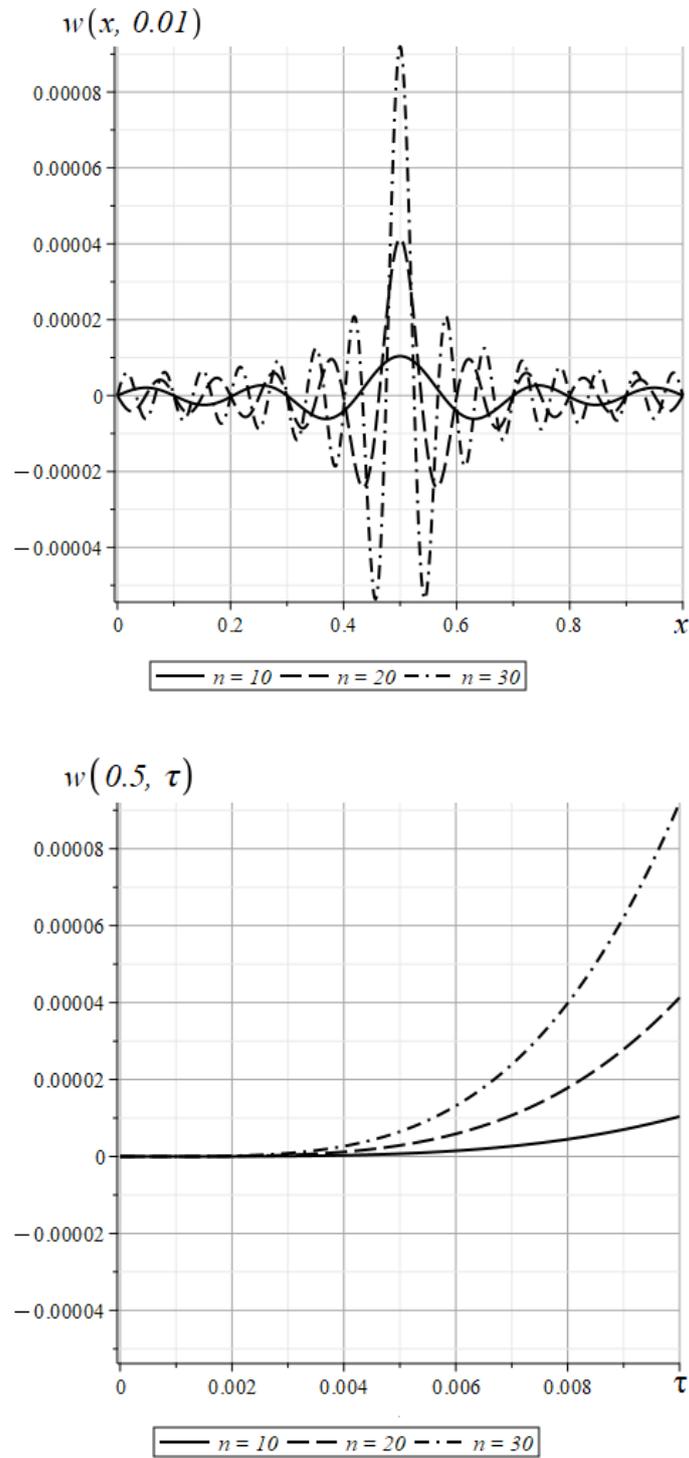


Рис. 4. Распределение  $w(x, \tau)$  по координате  $x$  при  $\tau = 0,01$  и во времени при  $x = 0,5$   
Fig. 4. Distribution of  $w(x, \tau)$  along the coordinate  $x$  for  $\tau = 0.01$  and in time for  $x = 0.5$

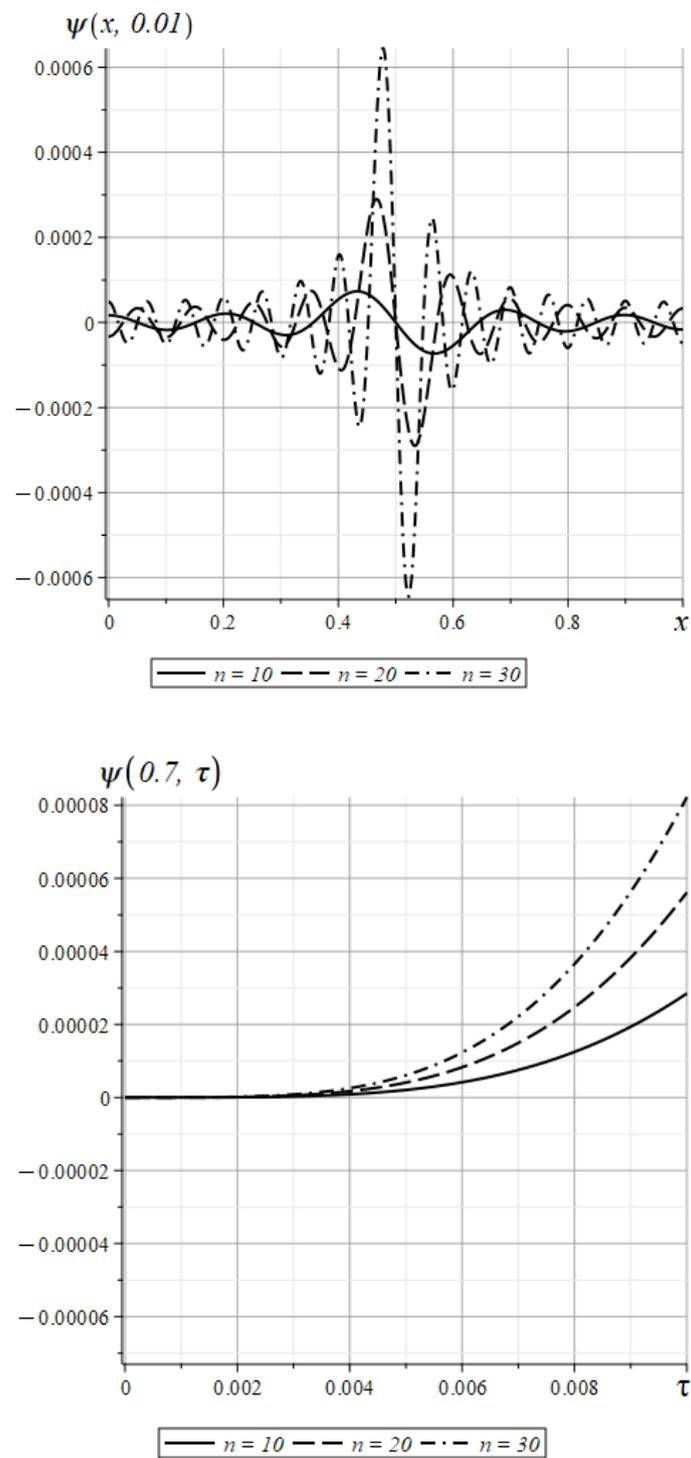


Рис. 5. Распределение  $\psi(x, \tau)$  по координате  $x$  при  $\tau = 0,01$  и во времени при  $x = 0,7$ . В средней точке стержня  $x = 0,5$ ,  $\psi(x, \tau)$  имеют значение 0

Fig. 5. Distribution of  $\psi(x, \tau)$  along the coordinate  $x$  at  $\tau = 0.01$  and in time at  $x = 0.7$ . At the midpoint of the rod  $x = 0.5$ ,  $\psi(x, \tau)$  have the value 0

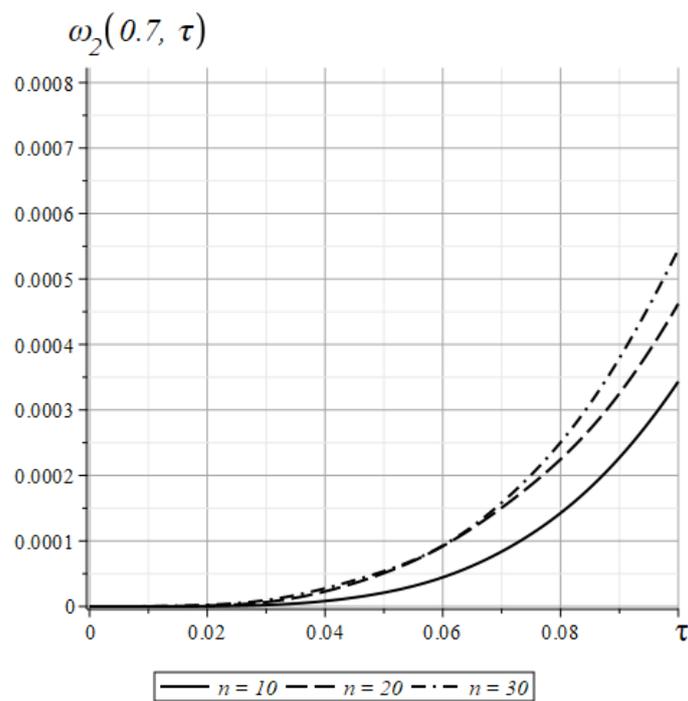
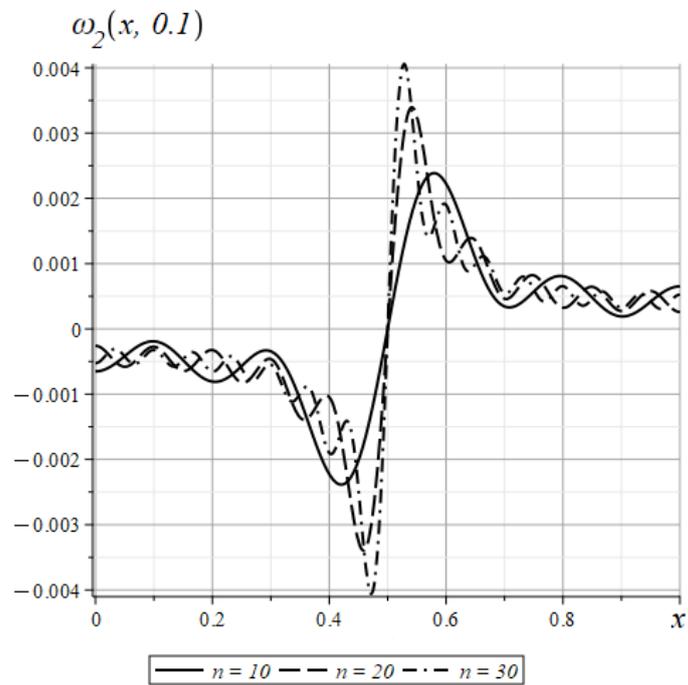


Рис. 6. Распределение  $\omega_2(x, \tau)$  по координате  $x$  при  $\tau = 0,1$  и во времени при  $x = 0,7$ . В средней точке стержня  $x = 0,5$ ,  $\omega_2(x, \tau)$  имеют значение 0

Fig. 6. Distribution of  $\omega_2(x, \tau)$  along the coordinate  $x$  at  $\tau = 0.1$  and in time at  $x = 0.7$ . At the midpoint of the rod  $x = 0.5$ ,  $\omega_2(x, \tau)$  have the value 0

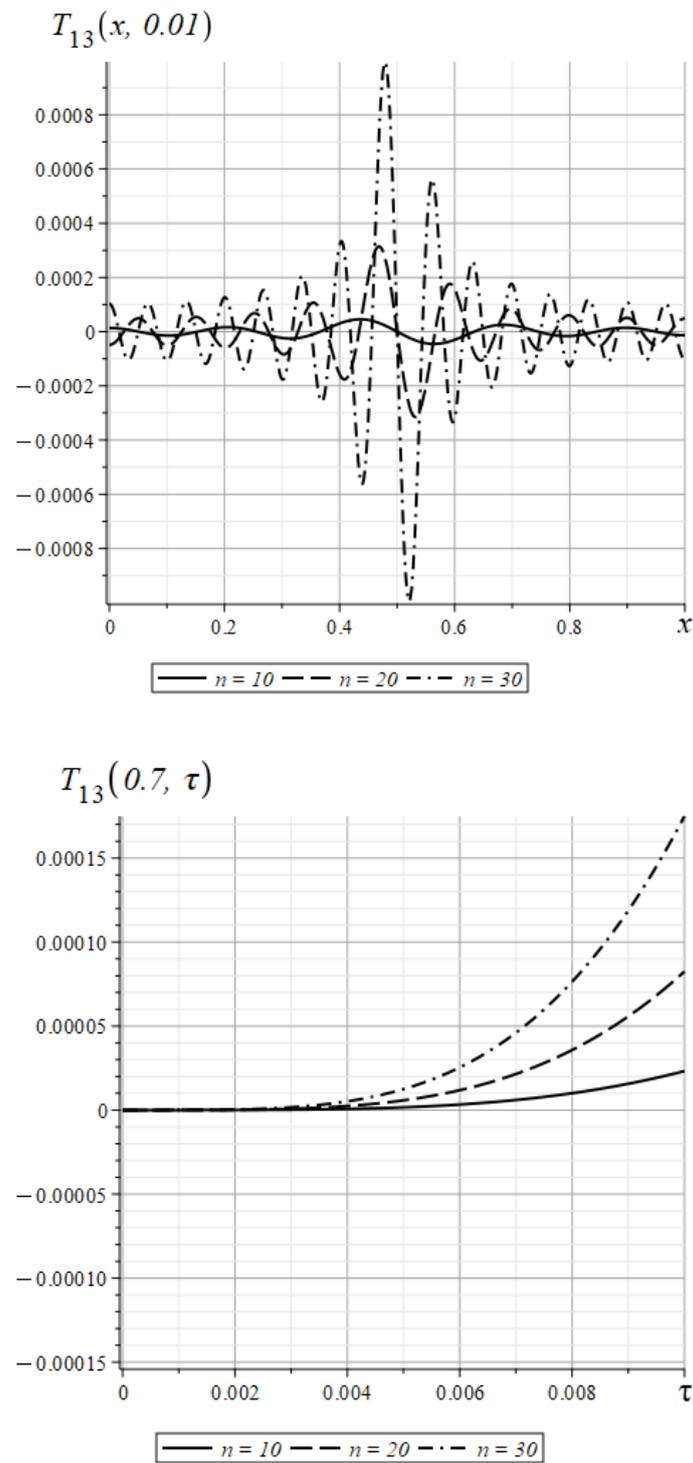


Рис. 7. Распределение  $T_{13}(x, \tau)$  по координате  $x$  при  $\tau = 0,01$  и во времени при  $x = 0,7$ . В средней точке стержня  $x = 0,5$ ,  $T_{13}(x, \tau)$  имеют значение 0  
 Fig. 7. Distribution of  $T_{13}(x, \tau)$  along the coordinate  $x$  for  $\tau = 0.01$  and in time for  $x = 0.7$ . At the midpoint of the rod  $x = 0.5$ ,  $T_{13}(x, \tau)$  have the value 0

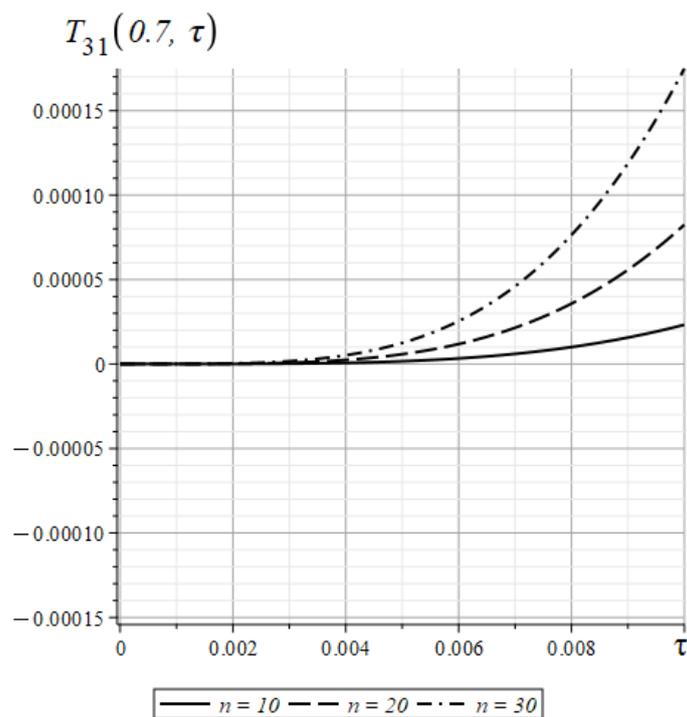
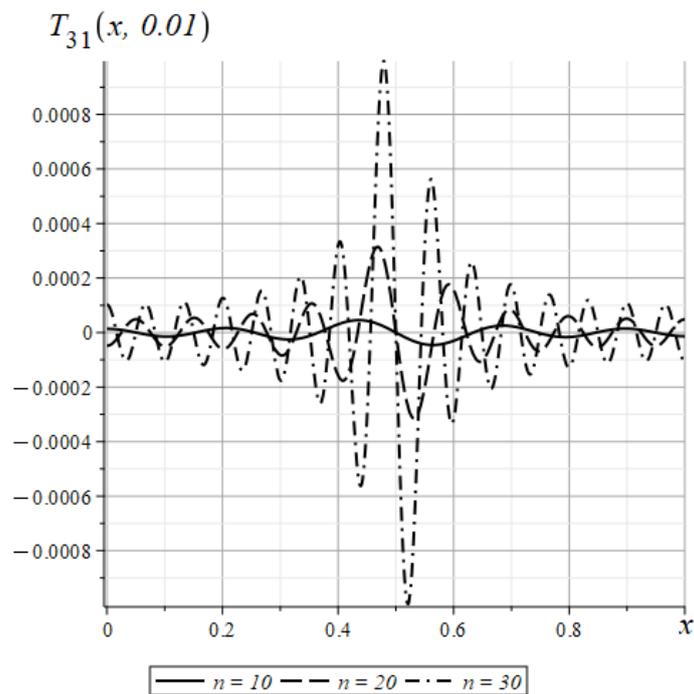


Рис. 8. Распределение  $T_{31}(x, \tau)$  по координате  $x$  при  $\tau = 0,01$  и во времени при  $x = 0,7$ . В средней точке стержня  $x = 0,5$ ,  $T_{31}(x, \tau)$  имеют значение 0

Fig. 8. Distribution of  $T_{31}(x, \tau)$  along the coordinate  $x$  for  $\tau = 0.01$  and in time for  $x = 0.7$ . At the midpoint of the rod  $x = 0.5$ ,  $T_{31}(x, \tau)$  have the value 0

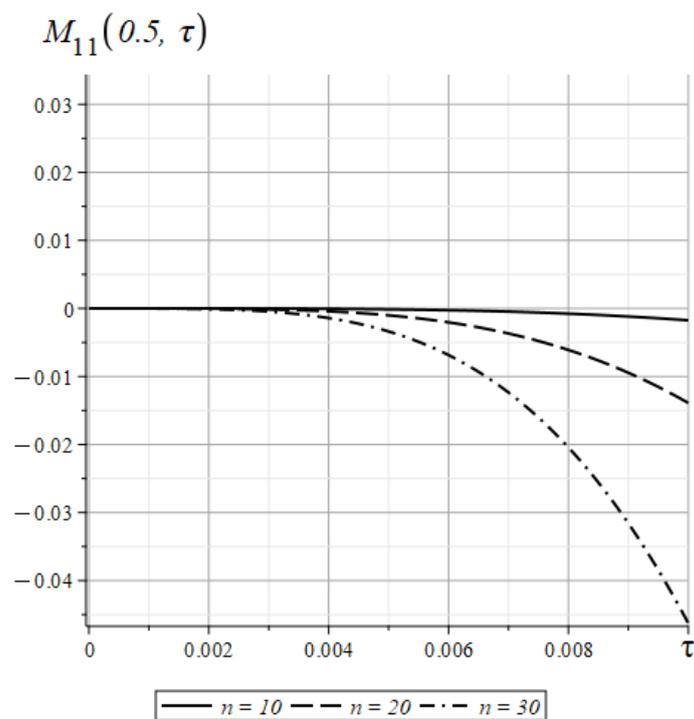
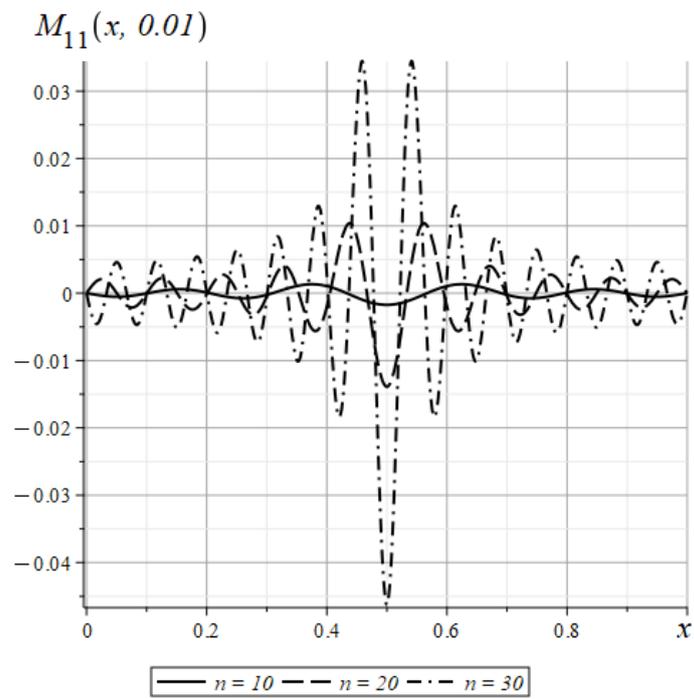


Рис. 9. Распределение  $M_{11}(x, \tau)$  по координате  $x$  при  $\tau = 0,01$  и во времени при  $x = 0,5$   
 Fig. 9. Distribution of  $M_{11}(x, \tau)$  along coordinate  $x$  at  $\tau = 0.01$  and in time at  $x = 0.5$

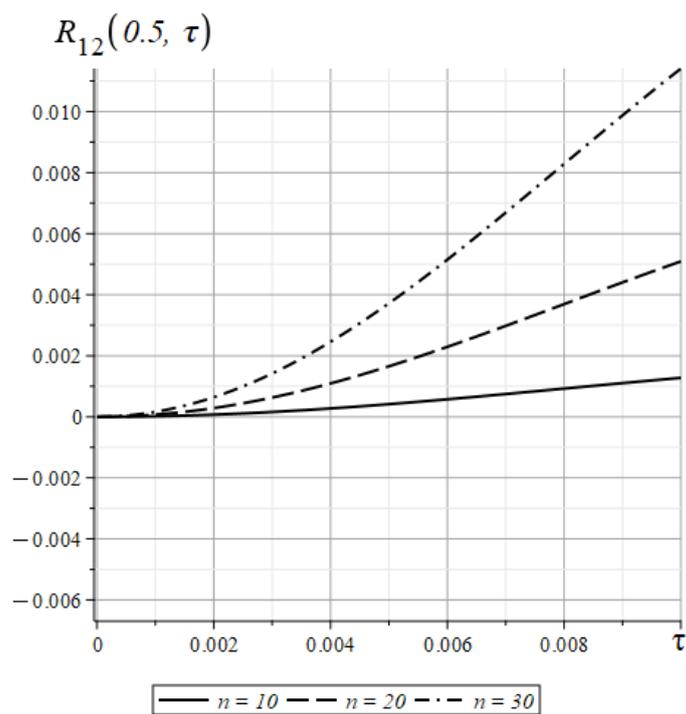
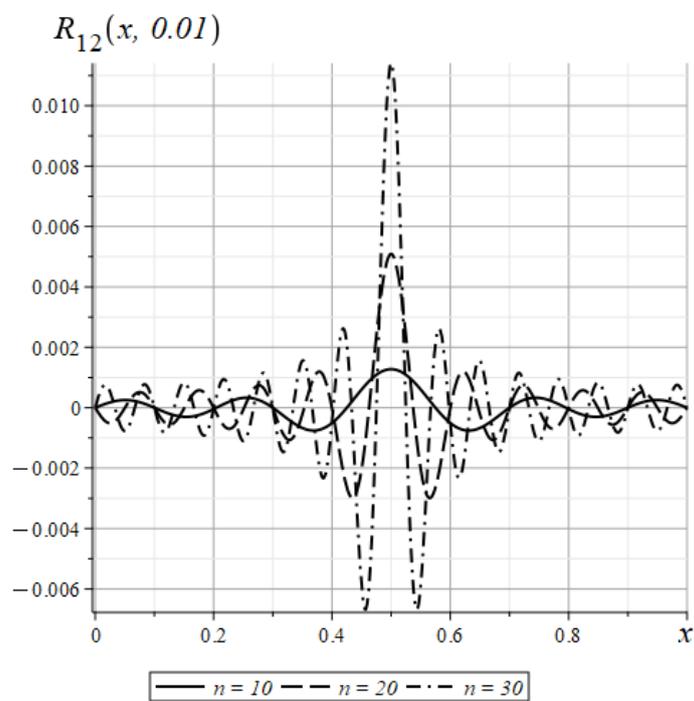


Рис. 10. Распределение  $R_{12}(x, \tau)$  по координате  $x$  при  $\tau = 0,1$  и во времени при  $x = 0,5$   
Fig. 10. Distribution of  $R_{12}(x, \tau)$  along the coordinate  $x$  for  $\tau = 0.1$  and in time for  $x = 0.5$

## Литература [References]

1. Cosserat, E., Cosserat, F., *Theorie des corps deformables*. Paris, A. Hermann et fils, 1909. (Reprint 2009)
2. Ерофеев, В.И., *Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой*. Москва, Изд-во Моск. ун-та, 1999. [Erofeev, V.I., *Volnovye protsessy v tverdykh telakh s mikrostrukturoy = Wave Processes in Solids with Microstructure*. Moscow, Moscow University Press, 1999. (in Russian)]
3. Кулеш, М.А., Грекова, Е.Ф., Шардаков, И.Н., Задача о распространении поверхностной волны в редуцированной среде Коссера. *Акустический журнал*, 2009, т. 55, № 2, с. 216–225. [Kulesh, M.A., Grekova, E.F., Shardakov, I.N., The problem of surface wave propagation in a reduced Cosserat medium. *Akusticheskiy zhurnal = Acoustical Physics*, 2009, vol. 55, № 2, pp. 216–225 (in Russian)]
4. Кулеш, М.А., Матвеев, В.П., Улитин, М.В., Шардаков, И.Н., Анализ волнового решения уравнений эластокинетики среды Коссера в случае плоских объемных волн. *ПМТФ*, 2008, т. 49, № 2, с. 196–203. [Kulesh, M.A., Matveenko, V.P., Ulitin, M.V., Shardakov, I.N., Analysis of the wave solution of the Cosserat medium elastokinetic equations in the case of plane body waves. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika = Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2008, vol. 49, no. 2, pp. 196–203. (in Russian)]
5. Кулеш, М.А., Матвеев, В.П., Шардаков, И.Н., Дисперсия и поляризация поверхностных волн Рэлея для среды Коссера. *Изв. РАН. МТТ*, 2007, № 4, с. 100–113. [Kulesh, M.A., Matveenko, V.P., Shardakov, I.N., Dispersion and polarization of rayleigh surface waves for a Cosserat medium. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela = Mechanics of Solids*, 2007, no. 4, pp. 100–113. (in Russian)]
6. Кулеш, М.А., Матвеев, В.П., Шардаков, И.Н., О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера. *Акустический журнал*, 2006, т. 52, № 2, с. 227–235. [Kulesh, M.A., Matveenko, V.P., Shardakov, I.N., On the propagation of elastic surface waves in a Cosserat medium. *Akusticheskiy zhurnal = Acoustical Physics*, 2006, vol. 52, № 2, pp. 227–235. (in Russian)]
7. Лай, Тхань Туан, Тарлаковский, Д.В., Распространение нестационарных кинематических возмущений от сферической полости в псевдоконтинууме Коссера. *МКМК*, 2011, т. 17, № 2, с. 184–195. [Lay, Tkhan Tuan, Tarlakovskiy, D.V., Propagation of nonstationary kinematic perturbations from a spherical cavity in the Cosserat pseudocontinuum. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy = Journal on Composite Mechanics and Design*, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 184–195. (in Russian)]
8. Лай, Тхань Туан, Тарлаковский, Д.В., Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера. *Электронный журнал «Труды МАИ»*, 2012, № 53. [Lay, Tkhan Tuan, Tarlakovskiy, D.V., Propagation of nonstationary axisymmetric perturbations from the surface of a sphere filled with a pseudoelastic Cosserat medium. *Elektronnyy zhurnal "Trudy MAI" = Electronic journal "Proceedings of MAI"*, 2012, no. 53. (in Russian)] URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29267>
9. Лай, Тхань Туан, Тарлаковский, Д.В., Дифракция нестационарных волн на сферической полости в псевдоконтинууме Коссера. *РЭНСИТ*, 2013, т. 5, № 1, с. 119–125. [Lay, Tkhan Tuan, Tarlakovskiy, D.V., Diffraction of nonstationary waves by a spherical cavity in the Cosserat pseudocontinuum. *Radioelektronika. Nanosistemy. Informatsionnye tekhnologii = Radioelectronics. Nanosystems. Information technologies*, 2013, vol. 5, № 1, pp. 119–125. (in Russian)]
10. Ерофеев, В.И., Кажаяев, В.В., Семерикова, Н.П., Макромеханическое моделирование упругой и вязкоупругой сред Коссера. *Вычисл. мех. сплош. сред*, 2009, т. 2, № 2, с. 40–47. [Erofeev, V.I., Kazhaev, V.V., Semerikova, N.P., Macromechanical modeling of elastic and viscoelastic Cosserat media. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred = Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2009, vol. 2. no. 2, pp. 40–47. (in Russian)]
11. Садовский, В.М., Садовская, О.В., Варыгина, М.П., Численное моделирование пространственных волновых движений в моментных средах. *Вычисл. мех. сплош. сред*, 2009, т. 2, № 4, с. 111–121. [Sadovskiy, V.M., Sadovskaya, O.V., Varygina, M.P., Numerical simulation of spatial wave motions in moment media. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred = Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2009, vol. 2, № 4. pp. 111–121 (in Russian)]
12. Саркисян, С.О., Хачатрян, М.В., Математическая модель статической деформации микрополярного упругого стержня с круговой осью и метод конечных элементов. *60 Международная научная конференция «Актуальные проблемы прочности»*, Витебск, 14–18 мая 2018 года. Витебск: Витебский государственный технологический университет, 2018, с. 198–200. [Sarkisyan, S.O., Khachatryan, M.V., Mathematical model of static deformation of a micropolar elastic rod with a circular axis and the finite element method. *60 Mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsiya "Aktualnye"*

- problemy prochnosti* = 60th International Scientific Conference "Actual Problems of Strength", Vitebsk, May 14–18, 2018. Vitebsk, Vitebsk State Technological University, 2018, pp. 198–200. (in Russian)]
13. Саркисян, С.О., Хачатрян, М.В., Построение модели изгиба микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью и ее реализация методом конечных элементов. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2020, т. 13, № 3, с. 256–268. [Sarkisyan, S.O., Khachatryan, M.V., Construction of a bending model for micropolar elastic thin rods with a circular axis and its implementation by the finite element method. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred = Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2020, vol. 13, № 3, pp. 256–268. (in Russian)]
  14. Илюхин, А.А., Тимошенко, Д.В., Построение основных соотношений одномерной микрополярной теории упругих стержней. *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Информатика*, 2008, т. 8, № 4, с. 52–61. [Ilyukhin, A.A., Timoshenko, D.V., Construction of the main relations of the one-dimensional micropolar theory of elastic rods. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika = Izvestia Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2008, vol. 8, no. 4, pp. 52–61. (in Russian)]
  15. Илюхин, А.А., Попов, А.К., Растяжение микрополярного естественно закрученного стержня. *Научно-технический вестник Поволжья*, 2011, № 6, с. 37–42. [Ilyukhin, A.A., Popov, A.K., Stretching of a micropolar naturally twisted rod. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Povolzhya = Scientific and Technical Bulletin of the Volga Region*, 2011, no. 6, pp. 37–42. (in Russian)]
  16. Aganović, I., Tambača, J., Tutek, Z., Derivation of the model of elastic curved rods from three-dimensional micropolar elasticity. *Annali dell'Universita di Ferrara*, 2007, vol. 53, iss. 2, p. 109–133. DOI: [10.1007/s11565-007-0017-x](https://doi.org/10.1007/s11565-007-0017-x)
  17. Михайлова, Е.Ю., Тарлаковский, Д.В., Федотенков, Г.В., Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек. *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 2018, т. 160, кн. 3, с. 561–577. [Mihajlova, E.Y., Tarlakovskii, D.V., Fedotenko, G.V., A generalized linear model of dynamics of thin elastic shells. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 3, pp. 561–577. (in Russian)]
  18. Mai, Q.C., Ryazantseva, M.Y., Tarlakovskii, D.V., Generalized linear model of dynamics of elastic moment shells. In: Altenbach, H., Eremeyev, V.A., Igumnov, L.A., Bragov, A. (eds), *Deformation and Destruction of Materials and Structures Under Quasi-static and Impulse Loading. Advanced Structured Materials*, 2023. vol. 186, Springer, Cham. DOI: [10.1007/978-3-031-22093-7\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-031-22093-7_11)
  19. Тарлаковский, Д.В., Федотенков, Г.В., Май, Куок Чиен, Продольные нестационарные колебания конечного моментного упругого стержня. *Проблемы прочности и пластичности*, 2023, т. 85, № 3, с. 390–403. [Tarlakovskii, D.V., Fedotenko, G.V., Mai, Quoc Chien, Longitudinal transient vibrations of a finite moment elastic rod. *Problemy prochnosti i plastichnosti = Journal Problems of Strength and Plasticity*, 2023, vol. 85, no. 3, pp. 390–403. (in Russian)] DOI: [10.32326/1814-9146-2023-85-3-390-403](https://doi.org/10.32326/1814-9146-2023-85-3-390-403)
  20. Okonechnikov, A.S., Tarlakovsky, D.V., Fedotenko, G.V., Spatial non-stationary contact problem for a cylindrical shell and absolutely rigid body. *Mechanics of Solids*, 2020, vol. 55, iss. 3, pp. 366–376. DOI: [10.3103/S0025654420030127](https://doi.org/10.3103/S0025654420030127)
  21. Vahterova, Y.A., Fedotenko, G.V., The inverse problem of recovering an unsteady linear load for an elastic rod of finite length. *Journal of Applied Engineering Science*, 2020, vol. 18, iss. 4, pp. 687–692. DOI: [10.5937/jaes0-28073](https://doi.org/10.5937/jaes0-28073)
  22. Fedotenko, G.V., Tarlakovsky, D.V., Vahterova, Y.A., Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, no. 4, pp. 439–447. DOI: [10.1134/S1995080219040061](https://doi.org/10.1134/S1995080219040061)
  23. Fedotenko, G.V., Gritskov, A.V., Levitskiy, D.Y., Vahterova, Y.A., Sun, Y., Timoshenko beam and plate non-stationary vibrations. *INCAS Bulletin*, 2021, vol. 13, Special Issue, pp. 41–56. DOI: [10.13111/2066-8201.2021.13.S.5](https://doi.org/10.13111/2066-8201.2021.13.S.5)
  24. Lokteva, N.A., Serdyuk, D.O., Skopintsev, P.D., Transient deformation of an anisotropic cylindrical shell with structural features. *Journal of The Institution of Engineers (India): Series C*, 2023, vol. 104, iss. 2, pp. 455–466. DOI: [10.1007/s40032-023-00915-2](https://doi.org/10.1007/s40032-023-00915-2)
  25. Lokteva, N.A., Serdyuk, D.O., Skopintsev, P.D., Non-stationary influence function for an unbounded anisotropic Kirchhoff-love shell. *Journal of Applied Engineering Science*, 2020, vol. 18, iss. 4, pp. 737–744. DOI: [10.5937/jaes0-28205](https://doi.org/10.5937/jaes0-28205)