УДК 539.3 EDN: EXYKTY DOI: 10.31429/vestnik-21-3-16-25

К исследованию вибрации пластин Кирхгофа на гидроупругом основании

М. Н. Колесников[1], **И. С. Телятников**[1,2]✉

[1] Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия
[2] Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, пр-кт Чехова, 41, Ростов-на-Дону, 344006, Россия

✉ Телятников Илья Сергеевич; ORCID 0000-0001-8500-2133; SPIN 5501-1491; e-mail: ilux_t@list.ru

Аннотация. В работе рассмотрена задача о колебаниях слоя жидкости между упругими структурами, вызванных локализованным виброисточником, погруженным в жидкость. Покрытие моделируется системой контактирующих протяженных пластин с осредненными по толщине параметрами. Применением интегрального подхода задача о колебаниях гидроупругой структуры сведена к функциональному уравнению относительно Фурье образов перемещений пластин покрытия, решаемому с помощью метода Винера–Хопфа. В вопросах сейсмологии изучение волнового поля поверхности среды позволяет построить модели естественных тектонических процессов, оценить возможные последствия от воздействий заглубленных источников. Представленный подход может быть использован при исследовании особенностей волновых процессов в гидроупругих средах, моделируемых многослойным основанием, содержащим заглубленные жидкие слои.

Ключевые слова: установившиеся колебания, пластины Кирхгофа, акустическая среда, упругое основание, сосредоточенный источник, метод факторизации.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Кубанского научного фонда № 24-21-20032.

Цитирование: Колесников М. Н., Телятников И. С. К исследованию вибрации пластин Кирхгофа на гидроупругом основании // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 3. С. 16–25. EDN: EXYKTY. DOI: 10.31429/vestnik-21-3-16-25

Поступила 19 августа 2024 г. После доработки 20 сентября 2024 г. Принято 23 сентября 2024 г. Публикация 24 сентября 2024 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

To the Study of Kirchhoff Plates Vibration on a Hydroelastic Foundation

M. N. Kolesnikov[1], **I. S. Telyatnikov**[1,2]✉

[1] Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia
[2] Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Prospekt Chekhova, 41, Rostov-on-Don, 344006, Russia

✉ Ilya S. Telyatnikov; ORCID 0000-0001-8500-2133; e-mail: ilux_t@list.ru

Abstract. The problem of studying the wave fields on the surface of geological structures is relevant in cases of monitoring dangerous endogeodynamic processes and unfavorable exogenous processes, as well as determining their connection with the tectonic behavior of territories. In this paper we consider the problem of oscillations for a liquid layer between elastic structures caused by a localized vibration source immersed in the liquid. The coating is modeled by a system of contacting extended plates with parameters averaged by thickness. By using the integral approach, we reduced the problem of oscillations for a hydroelastic structure to a functional equation relative to the Fourier images of the displacements for the coating plates, which is solved using the Wiener–Hopf method. In matters of seismology, the study of the wave field on the surface of the medium allows us to construct models of natural tectonic processes and assess the possible consequences caused by buried sources. The presented approach can be used to study the characteristics of wave processes in hydroelastic media modeled by a multilayer foundation containing immersed liquid layers.

Keywords: steady-state oscillations, Kirchhoff plates, acoustic medium, elastic base, concentrated source, factorization method.

Funding. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation and the Kuban Science Foundation No. 24-21-20032.

Cite as: Kolesnikov, M. N., Telyatnikov, I. S., To the study of Kirchhoff plates vibration on a hydroelastic foundation. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 3, pp. 16–25. DOI: 10.31429/vestnik-21-3-16-25

Received 19 August 2024. Revised 20 September 2024. Accepted 23 September 2024. Published 24 September 2024.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

Введение

Интерес к исследованию вибрационных воздействий различного генезиса на геологические структуры стимулируется как закономерностью развития наук о Земле, так и возникающими экологическими проблемами, связанными с воздействиями вибраций на горные породы. К настоящему времени проведен большой объем теоретических и экспериментальных работ по изучению волновых полей и физических эффектов, возникающих при вибрационном воздействии на геологическую среду, в том числе по анализу и сравнению результатов математического моделирования с экспериментальными данными [1–6 и др.]. Однако моделирование процессов в слоистых средах, в том числе содержащих пористо-упругие и заглубленные водные слои, по-прежнему не теряет актуальности в связи с многочисленными приложениями в сейсморазведке, геофизике и технологиях [7–10 и др.].

В продолжение работ [11, 12] рассмотрена задача о колебаниях слоя жидкости между упругими структурами, вызванных локализованным виброисточником, погруженным в жидкость.

1. Постановка задачи для слоя жидкости с составным покрытием на упругом основании

В плоской постановке рассматривается задача о вибрации слоя жидкости на упругом полупространстве под действием сосредоточенного внутреннего источника. На поверхности акустической среды расположено упругое покрытие в виде двух граничащих вдоль прямой $x_1 = 0$ полубесконечных пластин Кирхгофа $\Omega_+ = \{x_1 > 0\}$ и $\Omega_- = \{x_1 < 0\}$. Для установившегося режима колебаний (с частотой ω), выделяя временной множитель $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$, будем использовать во всех определяющих уравнениях и граничных условиях комплексные амплитуды соответствующих функций.

Колебания двух пластин Кирхгофа (с разными свойствами), моделирующих составное покрытие, после отделения временного множителя описываются линеаризованными уравнениями относительно амплитуд смещений их срединной плоскости $w_\pm(x_1)$ [11–13]. Во всех последующих формулах индекс «$+$» указывает на правую полуплоскость, «$-$» — на левую,

$$R_\pm(\partial x_1)\, w_\pm(x_1) - \varepsilon_{\pm 5} g_\pm(x_1) = 0, \quad x_1 \in \Omega_\pm, \tag{1.1}$$

где

$$R_\pm(\partial x_1) = \varepsilon_{\pm 3}\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x_1^4} - \varepsilon_{\pm 4}; \quad \varepsilon_{\pm 3} = h_\pm^2/12; \quad \varepsilon_{\pm 4} = \omega^2 \rho_\pm \left(1-\nu_\pm^2\right) E_\pm^{-1}; \quad \varepsilon_{\pm 5} = \left(1-\nu_\pm^2\right) E_\pm^{-1} h_\pm^{-1};$$

$\rho_\pm$ — плотности, $E_\pm$ — модули Юнга, $\nu_\pm$ — коэффициенты Пуассона, $h_\pm$ – толщины пластин; $g_\pm(x_1)$ — амплитуды напряжений на нижних границах пластин.

Оси декартовой системы координат выбраны, как показано на рис. 1. Ось Ox_1 проходит через срединную плоскость пластин, начало координат совпадает с разломом.

Условия взаимодействия в точке соприкосновения пластин $x_1 = 0$ задаются соотношениями

$$L_1(\partial x_1)\, w_+(x_1)\big|_{x_1=0+0} + L_2(\partial x_1)\, w_-(x_1)\big|_{x_1=0-0} = f. \tag{1.2}$$

Вид операторов $L_j(\partial x_1)$, $j = \overline{1,2}$, определяется заданными граничными условиями [14].

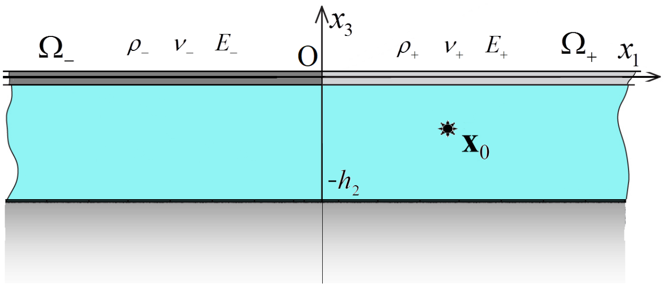

Рис. 1. Геометрия задачи

Fig. 1. Geometry of the problem

Гармонические колебания полосы жидкости, содержащей источник, погруженный на глубину x_{03}, описываются уравнением Гельмгольца для потенциала скоростей частиц жидкости $\varphi(\mathbf{x})$ в области $(-\infty < x_1 < +\infty, -h_2 \leqslant x_3 < 0)$

$$\Delta\varphi(\mathbf{x}) + \kappa^2\varphi(\mathbf{x}) = A_1\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_3)$, $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, -x_{03})$ — точка локализации осциллирующего источника, $\kappa = \omega/c$, c — скорость распространения акустических волн, Δ — двумерный оператор Лапласа.

Так как при установившихся колебаниях $p(\mathbf{x}) = \mathrm{i}\,\omega\rho_0\varphi(\mathbf{x})$, где ρ_0 — плотность жидкости, поле давления $p(\mathbf{x})$ также удовлетворяет уравнению Гельмгольца [15]

$$\Delta p(\mathbf{x}) + \kappa^2 p(\mathbf{x}) = A_0\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

где A_0 — характеристика интенсивности источника, $A_0 = \mathrm{i}\,\omega\rho_0 A_1$.

На границе пластин покрытия и полосы жидкости (при $x_3 = 0$) нормальная компонента напряжений равна по величине давлению

$$g_\pm(x_1) = -p(x_1,0) = -\mathrm{i}\,\omega\rho_0\varphi(x_1,0), \quad x_1 \in \Omega_\pm. \tag{1.4}$$

Вертикальные составляющие векторов скоростей для покрытия и жидкости в области контакта непрерывны

$$-\mathrm{i}\,\omega\, w_\pm(x_1) = \frac{\partial\varphi(x_1,0)}{\partial x_3}, \quad x_1 \in \Omega_\pm. \tag{1.5}$$

Определяющие уравнения для амплитудных значений смещений $\mathbf{u} = \{u_1, u_3\}$ упругой полуплоскости — уравнения Ламе [16] в случае установившегося процесса примут вид

$$(\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} = -\omega^2\rho\,\mathbf{u}, \tag{1.6}$$

λ, μ — упругие постоянные, ρ — плотность упругой среды.

На верхней границе полуплоскости касательные напряжения отсутствуют, для амплитуд нормальных давлений, подлежащих определению, принято обозначение

$$\sigma_{x_3}\big|_{x_3=-h_2} = q(x_1).$$

На бесконечности при $R = \sqrt{x_1^2 + x_3^2} \to \infty$ выполняется условие убывания смещений $\mathbf{u} \to 0$.

В области контакта жидкости с упругой полуплоскостью $(x_3 = -h_2)$ выполняется условие

$$-\mathrm{i}\,\omega\rho_0\varphi(x_1, -h_2) = q(x_1). \tag{1.7}$$

Идеальный межслойный контакт предполагает выполнение условия равенства вертикальных составляющих скоростей точек жидкости и упругой среды в зоне контакта, т.е.

$$-\mathrm{i}\,\omega\, u_3(x_1, -h_2) = \frac{\partial\varphi(x_1, -h_2)}{\partial x_3}. \tag{1.8}$$

Замыкают постановку задачи дополнительные условия излучения волн на бесконечность, для установления которых используется принцип предельного поглощения [17].

2. Решение граничной задачи для слоя жидкости

Для решения поставленной задачи проведем ее декомпозицию. Построим сначала решение краевой задачи для потенциала скоростей (1.3), (1.4), (1.7), считая $g_{\pm}(x_1)$ и $q(x_1)$ заданными.

Воспользуемся интегральным преобразованием Фурье по горизонтальной координате x_1. Найдем Фурье образ $\varphi(x_1, x_3)$, для этого введем обозначение

$$\Phi(\alpha_1, x_3) = \mathrm{V}\varphi(x_1, x_3) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_3) \exp(\mathrm{i}\,\alpha_1 x_1)\, \mathrm{d}x_1.$$

Здесь V — оператор преобразования Фурье.

Применив интегральное преобразование Фурье к уравнению (1.3) для $\varphi(\mathbf{x})$ и граничным условиям (1.4), (1.7), получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\Phi''(\alpha_1, x_3) + \left(\kappa^2 - \alpha_1^2\right)\Phi(\alpha_1, x_3) = A_1 \delta(x_3 + x_{03}) \exp(\mathrm{i}\alpha_1 x_{01}), \tag{2.1}$$

где штрихом обозначена производная по переменной x_3, с граничными условиями

$$\Phi(\alpha_1, 0) = \frac{\mathrm{i}}{\omega\rho_0} G(\alpha_1), \quad \Phi(\alpha_1, -h_2) = \frac{\mathrm{i}}{\omega\rho_0} Q(\alpha_1), \tag{2.2}$$

$$G(\alpha_1) = G_+(\alpha_1) + G_-(\alpha_1), \quad G_{\pm}(\alpha_1) = \mathrm{V}g_{\pm}(x_1), \quad Q(\alpha_1) = \mathrm{V}q(x_1).$$

С помощью интегрального представления δ-функции Дирака [18]

$$\delta(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\xi} \mathrm{d}\xi,$$

уравнение (2.1) можно записать

$$\Phi''(\alpha_1, x_3) + \left(\kappa^2 - \alpha_1^2\right)\Phi(\alpha_1, x_3) = \frac{A_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1 x_{01}}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(x_3 + x_{03})} \mathrm{d}\xi. \tag{2.3}$$

Общее решение (2.3) представляется в виде

$$\Phi(\alpha_1, x_3) = \Phi_0(\alpha_1, x_3) + \Phi_1(\alpha_1,\ x_3). \tag{2.4}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\Phi_0(\alpha_1,\ x_3) = C_1 \mathrm{e}^{\sigma_0 x_3} + C_2 \mathrm{e}^{-\sigma_0 x_3}, \quad \sigma_0 = \sqrt{\alpha_1^2 - \kappa^2},$$

частное решение неоднородного уравнения

$$\Phi_1(\alpha_1, x_3) = -\frac{A_1 \exp(\mathrm{i}\alpha_1 x_{01}) \exp(-\sigma_0 |x_3 + x_{03}|)}{2\sigma_0}.$$

Граничные условия (2.2) позволяют определить константы C_1, C_2

$$C_1 + C_2 = \frac{\mathrm{i}}{\omega\rho_0} G(\alpha_1) - \Phi_1(\alpha_1, 0),$$

$$C_1 \exp(-\sigma_0 h_2) + C_2 \exp(\sigma_0 h_2) = \frac{\mathrm{i}}{\omega\rho_0} Q(\alpha_1) - \Phi_1(\alpha_1, -h_2).$$

Решив систему, из (2.4) получим

$$\Phi(\alpha_1, x_3) = \Delta_0^{-1} \Big\{ \Delta_0 \Phi_1(\alpha_1, x_3) + \mathrm{i}(\omega\rho_0)^{-1} \left[G(\alpha_1) \operatorname{sh}(\sigma_0(x_3 + h_2)) - Q(\alpha_1) \operatorname{sh}(\sigma_0 x_3) \right] + \\ + \Phi_1(\alpha_1, -h_2) \operatorname{sh}(\sigma_0 x_3) - \Phi_1(\alpha_1, 0) \operatorname{sh}(\sigma_0(x_3 + h_2)) \Big\}, \tag{2.5}$$

$$\Delta_0(\alpha_1) = \operatorname{sh}(\sigma_0 h_2).$$

3. Решение краевой задачи для покрытия

В отличие от использованного в [13] метода блочного элемента в [11] использован метод собственных функций, позволяющий облегчить построение представлений решений скалярной краевой задачи для пластин.

Общие решения уравнений (1.1), удовлетворяющие условию ограниченности и принципу предельного поглощения в заданных областях, соответствующие распространяющимся в горизонтальном направлении волнам, имеют вид [11]

$$w_\pm(x_1) = A_{\pm 1} e^{\mp q_\pm x_1} + A_{\pm 2} e^{\pm i q_\pm x_1} + V^{-1}(x_1) R_\pm^{-1}(\alpha_1)\varepsilon_{\pm 5} G_\pm(\alpha_1), \quad x_1 \in \Omega_\pm.$$

Здесь $A_{\pm j}$, $j = \overline{1,2}$ — произвольные постоянные; $q_\pm \in R$, $q_\pm > 0$ — нули функций$R_\pm(\alpha_1)$. Тогда их можно записать $R_\pm(\alpha_1) = \varepsilon_{\pm 3}(\alpha_1 - q_\pm)(\alpha_1 - i q_\pm)(\alpha_1 + q_\pm)(\alpha_1 + i q_\pm)$.

В результате применения к (1.1) преобразования Фурье по координате x_1, в трансформантах получим

$$W_\pm(\alpha_1) = \frac{\pm i A_{\pm 1}}{\alpha_1 \pm i q_+} + \frac{\pm i A_{\pm 2}}{\alpha_1 \pm q_\pm} + \varepsilon_{\pm 5}\left[R_\pm^{-1}(\alpha_1) G_\pm(\alpha_1)\right]^\pm,$$
$$W_\pm(\alpha_1) = \mathrm{V} w_\pm(x_1).$$

Последнее слагаемое в правой части подлежит факторизации в виде суммы. Верхний индекс «+» квадратной скобки указывает на регулярность функции в верхней полуплоскости комплексной переменной α_1, «−» — на регулярность в нижней полуплоскости. Воспользовавшись тем, что $F^\pm(\alpha_1) = F(\alpha_1) - F^\mp(\alpha_1)$, получим [11]

$$W_\pm(\alpha_1) = \varepsilon_{\pm 5} R_\pm^{-1} G_\pm(\alpha_1) + \frac{\pm i A_{\pm 1}}{\alpha_1 \pm i q_\pm} + \frac{\pm i A_{\pm 2}}{\alpha_1 \pm q_\pm} \mp \frac{\varepsilon_{\pm 5}}{4 q_\pm^3 \varepsilon_{\pm 3}}\left[\frac{G_\pm(\pm q_\pm)}{\alpha_1 \mp q_\pm} + \frac{i G_j(\pm i q_\pm)}{\alpha_1 \mp i q_\pm}\right]. \quad (3.1)$$

Из соотношений (3.1) можно выразить преобразования Фурье амплитуд контактных напряжений на нижних поверхностях пластин

$$G_\pm(\alpha_1) = \frac{R_\pm W_\pm(\alpha_1)}{\varepsilon_{\pm 5}} - \frac{R_\pm}{\varepsilon_{\pm 5}}\left(\frac{\pm i A_{\pm 1}}{\alpha_1 \pm i q_\pm} + \frac{\pm i A_{\pm 2}}{\alpha_1 \pm q_\pm}\right) \pm \frac{R_\pm}{4 q_\pm^3 \varepsilon_{\pm 3}}\left[\frac{G_\pm(\pm q_\pm)}{\alpha_1 \mp q_\pm} + \frac{i G_\pm(\pm i q_\pm)}{\alpha_1 \mp i q_\pm}\right]. \quad (3.2)$$

4. Решение задачи для упругой полуплоскости

Уравнения для упругой полуплоскости в трансформантах Фурье принимают вид

$$\begin{gathered} \mu U_1'' - \left(\alpha_1^2(\lambda + 2\mu) - \rho\omega^2\right) U_1 - i\alpha_1(\lambda_j + \mu_j) U_2' = 0, \\ (\lambda + 2\mu) U_3'' - \left(\alpha_1^2 \mu - \rho\omega^2\right) U_3 - i\alpha_1(\lambda + \mu) U_1' = 0. \end{gathered} \quad (4.1)$$

Граничные условия для полуплоскости запишутся

$$\left.(U_1' - i\alpha_1 U_3)\right|_{x_3 = -h_2} = 0, \quad \left.((\lambda + 2\mu) U_3' - i\alpha_1 \lambda U_1)\right|_{x_3 = -h_2} = Q(\alpha_1); \quad (4.2)$$

$$U_1, U_3 \to 0, \quad x_3 \to \infty. \quad (4.3)$$

Здесь

$$U_j(\alpha, x_3) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_j(x_1, x_3) \exp(i\alpha_1 x_1)\, dx_1, \quad j = 1, 3.$$

Используя известную технику построения решения задачи (4.1)–(4.3) [17], для полуплоскости будем иметь

$$U_1(\alpha_1, x_3) = \frac{i\alpha_1 Q(\alpha_1)}{2\mu(\alpha_1^2 \sigma_1 \sigma_2 - \eta^2)}\left(\eta \exp(-\sigma_1(h_2 + x_3)) - \sigma_1\sigma_2 \exp(-\sigma_2(h_2 + x_3))\right); \quad (4.4)$$

$$U_3(\alpha_1, x_3) = \frac{\sigma_1 Q(\alpha_1)}{2\mu(\alpha_1^2 \sigma_1 \sigma_2 - \eta^2)}\left(\alpha_1^2 \exp(-\sigma_2(h_2 + x_3)) - \eta \exp(-\sigma_1(h_2 + x_3))\right). \quad (4.5)$$

Здесь

$$\sigma_k = \sqrt{\alpha_1^2 - \gamma_k^2}, \quad k = 1, 2, \quad \gamma_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad \gamma_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}, \quad \eta = \alpha_1^2 - 0{,}5\gamma_2^2.$$

5. Определение контактных напряжений на границах жидкого слоя

Для определения амплитудных значений нормального давления на границах жидкого слоя вернемся к условиям (1.8), которые после применения интегрального преобразования Фурье примут вид

$$-\mathrm{i}\,\omega U_3\left(\alpha_1,-h_2\right)-\Phi'\left(\alpha_1,-h_2\right)=0.$$

В области контакта жидкости с упругой полуплоскостью

$$\frac{\sigma_1\left(\alpha_1^2-\eta\right)Q\left(\alpha_1\right)}{2\mu\left(\alpha_1^2\sigma_1\sigma_2-\eta^2\right)}=\sigma_0\left(\omega^2\rho_0\Delta_0\right)^{-1}\left(Q\left(\alpha_1\right)\operatorname{ch}\left(\sigma_0h_2\right)-G\left(\alpha_1\right)\right)+\Theta_1\left(\alpha_1\right), \tag{5.1}$$

$$\Theta_1\left(\alpha_1\right)=\mathrm{i}\left(\omega\Delta_0\right)^{-1}\left[\sigma_0\left(\Phi_1\left(\alpha_1,-h_2\right)\operatorname{ch}\left(\sigma_0h_2\right)-\Phi_1\left(\alpha_1,0\right)\right)+\Phi_1'\left(\alpha_1,-h_2\right)\Delta_0\right],$$

где

$$\Phi_1'\left(\alpha_1,x_3\right)=\frac{A_1}{2}\operatorname{sgn}\left(x_3+x_{03}\right)\exp\left(-\sigma_0\left|x_3+x_{03}\right|\right)\exp\left(\mathrm{i}\alpha_1x_{01}\right).$$

Условия сопряжения покрытия со слоем жидкости (1.5) в образах Фурье запишутся

$$W_+\left(\alpha_1\right)+W_-\left(\alpha_1\right)=\sigma_0\left(\omega^2\rho_0\Delta_0\right)^{-1}\left(Q\left(\alpha_1\right)-\left(G_+\left(\alpha_1\right)+G_-\left(\alpha_1\right)\right)\operatorname{ch}\left(\sigma_0h_2\right)\right)+\Theta_2\left(\alpha_1\right). \tag{5.2}$$

Для удобства дальнейших построений введено обозначение

$$\Theta_2\left(\alpha_1\right)=\mathrm{i}\left(\omega\Delta_0\right)^{-1}\left[\sigma_0\left(\Phi_1\left(\alpha_1,-h_2\right)-\Phi_1\left(\alpha_1,0\right)\operatorname{ch}\left(\sigma_0h_2\right)\right)+\Phi_1'\left(\alpha_1,0\right)\Delta_0\right].$$

Используя (5.1) для выражения $Q\left(\alpha_1\right)$ через $G\left(\alpha_1\right)$ и (5.2), из условий сопряжения пластин покрытия и полуплоскости с акустической средой и выражений трансформант Фурье напряжений (3.2) получим функциональное уравнение относительно интегральных характеристик перемещений

$$M_1\left(\alpha_1\right)W_+\left(\alpha_1\right)+M_2\left(\alpha_1\right)W_-\left(\alpha_1\right)=Q_0\left(\alpha_1\right)+$$
$$+P\left(\alpha_1\right)\sum_{j=1}^{2}\left[A_{+j}Q_{+j}\left(\alpha_1\right)+A_{-j}Q_{-j}\left(\alpha_1\right)+Q_{+j}^q\left(\alpha_1\right)G_+\left(q_j^+\right)+Q_{-j}^q\left(\alpha_1\right)G_-\left(q_j^-\right)\right]. \tag{5.3}$$

Здесь в функциях $M_j\left(\alpha_1\right)$, где

$$M_j\left(\alpha_1\right)=\frac{\varepsilon_{\pm5}\omega^2\rho_0\Delta_0\Delta_1-\sigma_0R_\pm\left(\Psi\left(\alpha_1\right)-\Delta_1\operatorname{ch}\left(\sigma_0h_2\right)\right)}{\varepsilon_{\pm5}\omega^2\rho_0\Delta_0\Delta_1},$$

$$\Delta_1\left(\alpha_1\right)=\omega^2\rho_0\Delta_0\sigma_1\left(\alpha_1^2-\eta\right)-\sigma_0\operatorname{ch}\left(\sigma_0h_2\right)2\mu\left(\alpha_1^2\sigma_1\sigma_2-\eta^2\right),$$

$$\Psi\left(\alpha_1\right)=\sigma_02\mu\left(\eta^2-\alpha_1^2\sigma_1\sigma_2\right),$$

индекс «1» соответствует верхнему знаку в этажных символах «±», индекс «2» — нижнему. Функции $M_1\left(\alpha_1\right)$ и $M_2\left(\alpha_1\right)$ являются четными и имеют на вещественной оси конечное число простых полюсов и нулей.

В (5.3) также введены обозначения

$$Q_0\left(\alpha_1\right)=\frac{\Delta_1\Theta_2\left(\alpha_1\right)-\sigma_0\Psi\left(\alpha_1\right)\Theta_1\left(\alpha_1\right)}{\Delta_1},\quad Q_{\pm1}\left(\alpha_1\right)=\frac{\pm\mathrm{i}R_\pm\left(\alpha_1\right)}{\varepsilon_{\pm5}\left(\alpha_1\pm\mathrm{i}q_\pm\right)},\quad Q_{\pm2}\left(\alpha_1\right)=\frac{\pm\mathrm{i}R_\pm\left(\alpha_1\right)}{\varepsilon_{\pm5}\left(\alpha_1\pm q_\pm\right)},$$

$$Q_{\pm1}^q=\frac{\pm R_\pm\left(\alpha_1\right)}{4q_\pm^3\varepsilon_{\pm3}\left(\alpha_1\mp q_\pm\right)},\quad Q_{\pm2}^q=\frac{\pm\mathrm{i}R_\pm\left(\alpha_1\right)}{4q_\pm^3\varepsilon_{\pm3}\left(\alpha_1\mp\mathrm{i}q_\pm\right)},\quad q_1^\pm=\pm q_\pm,\quad q_2^\pm=\pm\mathrm{i}q_\pm.$$

$$G_\pm\left(\alpha_1\right)=\frac{R_\pm W_\pm\left(\alpha_1\right)}{\varepsilon_{\pm5}}-\frac{R_\pm}{\varepsilon_{\pm5}}\left(\frac{\pm\mathrm{i}A_{\pm1}}{\alpha_1\pm\mathrm{i}q_\pm}+\frac{\pm\mathrm{i}A_{\pm2}}{\alpha_1\pm q_\pm}\right)\pm\frac{R_\pm}{4q_\pm^3\varepsilon_{\pm3}}\left[\frac{G_\pm\left(\pm q_\pm\right)}{\alpha_1\mp q_\pm}+\frac{\mathrm{i}G_\pm\left(\pm\mathrm{i}q_\pm\right)}{\alpha_1\mp\mathrm{i}q_\pm}\right],$$

$$P\left(\alpha_1\right)=\frac{\sigma_0\left(\Psi\left(\alpha_1\right)-\Delta_1 \operatorname{ch}\left(\sigma_0 h_2\right)\right)}{\omega^2 \rho_0 \Delta_0 \Delta_1}.$$

Для решения функционального уравнения (5.3) воспользуемся подходом, изложенным в [11]. Поделив левую и правую части соотношения (5.3) на функцию $M_1\left(\alpha_1\right)$, придем к функциональныому уравнению, которое с учетом регулярности функций $W_{\pm}\left(\alpha_1\right)$ в соответствующих областях может быть решено методом Винера–Хопфа [19].

Факторизовав функцию $M\left(\alpha_1\right)=M_2\left(\alpha_1\right) M_1^{-1}\left(\alpha_1\right)$ относительно контура σ, почти всюду совпадающего с вещественной осью, в виде произведения $M\left(\alpha_1\right)=M_{+}\left(\alpha_1\right) M_{-}\left(\alpha_1\right)$ по параметру α_1 и умножив последнюю систему на $M_{+}^{-1}\left(\alpha_1\right)$, придем к соотношению

$$\begin{gathered}
M_{+}^{-1}\left(\alpha_1\right) W_{+}\left(\alpha_1\right)+M_{-}\left(\alpha_1\right) W_{-}\left(\alpha_1\right)=P_0\left(\alpha_1\right)+ \\
+\sum_{j=1}^2\left[A_{+j} P_{+j}\left(\alpha_1\right)+A_{-j} P_{-j}\left(\alpha_1\right)+P_{+j}^q\left(\alpha_1\right) G_{+}\left(q_j^{+}\right)+P_{-j}^q\left(\alpha_1\right) G_{-}\left(q_j^{-}\right)\right],
\end{gathered}$$

$$P_0\left(\alpha_1\right)=\frac{Q_0\left(\alpha_1\right)}{M_{+}\left(\alpha_1\right) M_1\left(\alpha_1\right)}, \quad P_{\pm j}\left(\alpha_1\right)=\frac{P\left(\alpha_1\right) Q_{\pm j}\left(\alpha_1\right)}{M_{+}\left(\alpha_1\right) M_1\left(\alpha_1\right)}, \quad P_{\pm 1}^q\left(\alpha_1\right)=\frac{P\left(\alpha_1\right) Q_{\pm 1}^q\left(\alpha_1\right)}{M_{+}\left(\alpha_1\right) M_1\left(\alpha_1\right)}.$$

Произведем факторизацию слагаемых правой части по параметру α_1 в виде сумм относительно контура σ

$$\begin{gathered}
M_{+}^{-1} W_{+}+M_{-} W_{-}=P_0^{+}+P_0^{-}+ \\
+\sum_{j=1}^2\left[A_{+j}\left\{P_{+j}\right\}^{+}+A_{-j}\left\{P_{-j}\right\}^{+}+G_{+}\left(q_j^{+}\right)\left\{P_{+j}^q\right\}^{+}+G_{-}\left(q_j^{-}\right)\left\{P_{-j}^q\right\}^{+}\right]+ \\
+\sum_{j=1}^2\left[A_{+j}\left\{P_{+j}\right\}^{-}+A_{-j}\left\{P_{-j}\right\}^{-}+G_{+}\left(q_j^{+}\right)\left\{P_{+j}^q\right\}^{-}+G_{-}\left(q_j^{-}\right)\left\{P_{-j}^q\right\}^{-}\right]. \quad (5.4)
\end{gathered}$$

Перенеся в левую часть все слагаемые, регулярные выше контура, а в правую — ниже контура, воспользовавшись обобщенной теоремой Лиувилля [20], получаем систему функциональных уравнений, из которой определяются выражения для образов Фурье $W_{\pm}\left(\alpha_1\right)$ перемещений покрытия

$$\begin{gathered}
W_{\pm}\left(\alpha_1\right)=W_{\pm}^0\left(\alpha_1\right)+ \\
+\sum_{j=1}^2\left[A_{+j} W_{\pm}^{j+}\left(\alpha_1\right)+A_{-j} W_{\pm}^{j-}\left(\alpha_1\right)+W_{q \pm}^{j+}\left(\alpha_1\right) G_{+}\left(q_j^{+}\right)+W_{q \pm}^{j-}\left(\alpha_1\right) G_{-}\left(q_j^{-}\right)\right], \quad (5.5)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
W_{+}^0\left(\alpha_1\right)=M_{+}\left(\alpha_1\right) P_0^{+}\left(\alpha_1\right) ; \quad W_{-}^0\left(\alpha_1\right)=M_{-}^{-1}\left(\alpha_1\right) P_0^{-}\left(\alpha_1\right) ; \quad W_{+}^{j \pm}\left(\alpha_1\right)=M_{+}\left(\alpha_1\right)\left\{P_{\pm j}\left(\alpha_1\right)\right\}^{+} ; \\
W_{-}^{j \pm}\left(\alpha_1\right)=M_{-}^{-1}\left(\alpha_1\right)\left\{P_{\pm j}\left(\alpha_1\right)\right\}^{-} ; \quad W_{q+}^{j \pm}\left(\alpha_1\right)=M_{+}\left(\alpha_1\right)\left\{P_{j \pm}^q\left(\alpha_1\right)\right\}^{+} ; \\
W_{q-}^{j \pm}\left(\alpha_1\right)=M_{-}^{-1}\left(\alpha_1\right)\left\{P_{j \pm}^q\left(\alpha_1\right)\right\}^{-} .
\end{gathered}$$

В соотношения (5.5) входят четыре неизвестных величины $G_{\pm}\left(q_j^{\pm}\right)$, $j=1,2$. Чтобы исключить их из выражений для $W_{\pm}\left(\alpha_1\right)$, найдем из соотношений (5.4) выражения $W_{\pm}\left(q_j^{\pm}\right)$, $j=1,2$, и подставим их соответственно в выражения $G_{\pm}\left(q_j^{\pm}\right)$ из (3.2). В результате приходим к линейной алгебраической системе уравнений относительно неизвестных $G_{\pm}\left(q_j^{\pm}\right)$, разрешив которую, $G_{\pm}\left(q_j^{\pm}\right)$ можно исключить из выражения (5.5) для $W_{\pm}\left(\alpha_1\right)$. Таким образом, в представлении образов Фурье смещений пластин $W_{\pm}\left(\alpha_1\right)$ останутся лишь произвольные постоянные $A_{\pm j}$, $j=1,2$. В результате выражения для $W_{\pm}\left(\alpha_1\right)$ могут быть представлены в следующем виде:

$$W_{\pm}\left(\alpha_1\right)=\tilde{W}_{\pm}^0\left(\alpha_1\right)+\sum_{j=1}^2 A_{+j} \tilde{W}_{\pm}^{j+}\left(\alpha_1\right)+\sum_{j=1}^2 A_{-j} \tilde{W}_{\pm}^{j-}\left(\alpha_1\right). \quad (5.6)$$

Значения $A_{\pm j}$, $j = 1, 2$, могут быть определены с помощью заданных граничных условий (1.2), как описано в [11]. Для этого к выражениям Фурье образов перемещений $W_{\pm}(\alpha_1)$ (5.6) применяется обратное преобразование Фурье V^{-1}

$$w_{\pm}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} W_{\pm}(\alpha_1) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_1 x_1} \mathrm{d}\alpha_1.$$

после подстановки $w_{\pm}(x_1)$ в (1.2) и нахождения $A_{\pm j}$, $j = 1, 2$, из алгебраической системы будем иметь

$$w_{\pm}(x_1) = \tilde{w}^0_{\pm}(x_1) + \sum_{j=1}^{2} A_{+j} \tilde{w}^{j+}_{\pm}(x_1) + \sum_{j=1}^{2} A_{-j} \tilde{w}^{j-}_{\pm}(x_1).$$

Следует отметить, что факторизация функции $M(\alpha_1)$ в виде произведения осуществляется приближенно. Для этого строится аппроксимирующая функция $M^A(\alpha_1)$ [21]. Для удобства аналитического обращения преобразований Фурье $W_{\pm}(\alpha_1)$ функции в правой части соотношений (5.4) также заменяются аппроксимациями, как это описано в работе [21].

Заключение

Интерес к исследованиям волновых процессов в слоистых гидроупругих средах стимулируется, в первую очередь, потребностями сейсморазведки и гидроакустики в надежной интерпретации данных наблюдений. Кроме того, моделирование динамики взаимодействия жидкости и упругих конструкций связано с потребностями техники и строительства.

В работе представлен подход к решению задачи о вибрации составного упругого покрытия на поверхности протяженной акустической среды (слоя на упругом полупространстве) под действием гармонического сосредоточенного источника, расположенного в акустической среде.

Рассмотренная модель может быть использована при исследовании особенностей волновых процессов в гидроупругих средах, моделируемых многослойным основанием, содержащим заглубленные жидкие слои. Представленный подход может быть распространен на решение задач о распространении акустических волн в слоистых средах, содержащих пористые флюидонасыщенные прослойки.

Литература [References]

1. Николаев, А.В., *Сейсмика неоднородных и мутных сред.* Москва, Наука, 1977. [Nikolaev, A.B., *Seysmika neodnorodnykh i mutnykh sred = Seismics of Heterogeneous and Turbid Media.* Moscow, Nauka, 1977. (in Russian)]
2. Золотарев, А.А., Пряхина, О.Д., Селезнев, М.Г., Смирнова, А.В., О возбуждении волн в слоистых средах осциллирующей нагрузкой. В сб.: *Проблемы вибрационного просвечивания Земли.* Москва, Наука, 1977, с. 75–79. [Zolotarev, A.A., Pryakhina, O.D., Seleznev, M.G., Smirnova, A.V., On the excitation of waves in layered media by an oscillating load. In: *Problemy vibratsionnogo prosvechivaniya Zemli = Problems of Vibrational Scanning of the Earth.* Moscow, Nauka, 1977, pp. 75–79. (in Russian)]
3. Бабешко, В.А., Селезнев, М.Г., Шагинян, А.С., Способ определения параметров смещения упругой среды при гармоническом воздействии. *Прикладная геофизика*, 1983, вып. 106, с. 32–39. [Babeshko, V.A., Seleznev, M.G., Shaginyan, A.S., Method for determining the parameters of displacement of an elastic medium under harmonic action. *Prikladnaya geofizika = Applied Geophysics*, 1983, iss. 106, pp. 32–39. (in Russian)]
4. Бабешко, В.А., Бабешко, О.М., Собисевич, А.Л., Исследование поведения вязкой жидкости при вибровоздействии. *ДАН*, 1993, т. 336, № 6, с. 760–762. [Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Sobisevich, A.L., Study of the behavior of a viscous liquid under vibration action. *Doklady Akademii nauk = Rep. of the Academy of Sciences*, 1993, vol. 336, no. 6, pp. 760–762. (in Russian)]
5. Barabanov, V.L., Nikolaev, A.V., Sobisevich, A.L. et. al., On effects of vibrations on water-saturated media. *Seismicity and Related Processes in the Environment*, 1994, vol. 1, pp. 75–77.
6. Ляпин, А.А., Селезнев, М.Г., Собисевич, Л.Е., Собисевич, А.Л., *Механико-математические модели в задачах активной сейсмологии.* ГНТП «Глобальные изменения природной среды и

климата». Москва, ГНИЦ ПГК, 1999. [Lyapin, A.A., Seleznev, M.G., Sobisevich, L.E., Sobisevich, A.L., *Mekhaniko-matematicheskie modeli v zadachakh aktivnoy seysmologii = Mechanical and mathematical models in active seismology problems.* Moscow, GNITs PGK, 1999. (in Russian)]

7. Pride, S.R., Tromeur, E., Berryman, J.G., Biot slow-wave effects in stratified rock. *Geophysics*, 2002, vol. 67, iss. 1, pp. 271–281. DOI: 10.1190/1.1451799

8. Gurevich B. Effect of fluid viscosity on elastic wave attenuation in porous rocks. *Geophysics*, 2002, vol. 67, iss. 1, pp. 264–270. DOI: 10.1190/1.1451798

9. Суворова, Т.В., Беляк, О.А., Моделирование волновых процессов в неоднородном гетерогенном основании. В сб. *Труды конференции «Транспорт: наука, образование, производство (Транспорт-2019)», Ростов-на-Дону, 23–26 апреля 2019 года*, 2019, т. 4, с. 262–266. [Suvorova, T.V., Belyak, O.A., Modeling of wave processes in an inhomogeneous heterogeneous foundation. In the collection *Trudy konferentsii "Transport: nauka, obrazovanie, proizvodstvo (Transport-2019)", Rostov-na-Donu, 23–26 aprelya 2019 goda = Proc. of the Conference "Transport: Science, Education, Production (Transport-2019)", Rostov-on-Don, April 23–26, 2019*, 2019, vol. 4, pp. 262–266. (in Russian)]

10. Кондратов, Д.В., Кондратова, Т.С., Попов, В.С, Попова, А.А., Моделирование гидроупругого отклика пластины, установленной на нелинейно-упругом основании и взаимодействующей с пульсирующим слоем жидкости. *Компьютерные исследования и моделирование*, 2023, т. 15, № 3, с. 581–597. [Kondratov, D.V., Kondratova, T.S., Popov, V.S., Popova, A.A., Modeling the hydroelastic response of a plate mounted on a nonlinear elastic foundation and interacting with a pulsating fluid layer. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie = Computer Research and Modeling*, 2023, v. 15, no. 3, pp. 581–597. (in Russian)] DOI: 10.20537/2076-7633-2023-15-3-581-597

11. Телятников, И.С., Колесников, М.Н., Павлова, А.В., Рубцов, С.Е., К исследованию вибрации пластин Кирхгофа на акустическом основании. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 4, с. 91–99. [Telyatnikov, I.S., Kolesnikov, M.N., Pavlova, A.V., Rubtsov, S.E., On the study of vibration of Kirchhoff plates on an acoustic foundation. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, v. 19, no. 4, pp. 91–99. (in Russian)] DOI: 10.31429/vestnik-19-4-91-99 EDN: HTFHNV

12. Telyatnikov, I.S., Pavlova, A.V., Rubtsov, S.E., Study of harmonic oscillations in an acoustic medium with a coating, excited by an internal concentrated source. *Springer Proceedings in Physics*, 2023, vol. 1067, pp. 322–328. DOI: 10.1007/978-981-97-1872-6_44

13. Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Бабешко, В.А., Телятников, И.С., Хрипков, Д.А., Уафа, Г.Н., Мухин, А.С., Горшкова, Е.М., О литосферных плитах из многокомпонентных материалов. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 1, с. 66–70. [Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Babeshko, V.A., Telyatnikov, I.S., Khripkov, D.A., Uafa, G.N., Mukhin, A.S., Gorshkova, E.M., On lithospheric plates made of multicomponent materials. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 1, pp. 66–70. (in Russian)] DOI: 10.31429/vestnik-19-1-65-69 EDN: EAXJGX

14. Гольденвейзер, А.Л., *Теория упругих тонких оболочек.* Москва, Наука, 1976. [Goldenweiser, A.L., *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek = Theory of Elastic Thin Shells.* Moscow, Nauka, 1976. (in Russian)]

15. Исакович, М.А., *Общая акустика.* Москва, Наука, 1973. [Isakovich, M.A., *Obshchaya akustika = General Acoustics.* Moscow, Nauka, 1973. (in Russian)]

16. Тимошенко, С.П., Гудьер, Дж., *Теория упругости.* Москва, Наука, 1975. [Timoshenko, S.P., Goodyer, J., *Teoriya uprugosti = Theory of Elasticity.* Moscow, Nauka, 1975. (in Russian)]

17. Бабешко, В.А., Глушков, Е.В., Зинченко, Ж.Ф., *Динамика неоднородных линейно-упругих сред.* Москва, Наука, 1989. [Babeshko, V.A., Glushkov, E.V., Zinchenko, Zh.F., *Dinamika neodnorodnykh lineyno-uprugikh sred = Dynamics of Inhomogeneous Linear-elastic Media.* Moscow, Nauka, 1989. (in Russian)]

18. Тихонов, А.Н., Самарский, А.А., *Уравнения математической физики.* Москва, Наука, 2004. [Tikhonov, A.N., Samarsky, A.A., *Uravneniya matematicheskoy fiziki = Equations of Mathematical Physics.* Moscow, Nauka, 2004. (in Russian)]

19. Noble, B., *Methods Based on the Wiener–Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations.* New York, Pergamon Press, 1958.

20. Лаврентьев, М.А., Шабат, Б.В., *Методы теории функций комплексного переменного.* Москва, Наука, 1973. [Lavrentiev, M.A., Shabat, B.V., *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo =*

Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable. Moscow, Nauka, 1973. (in Russian)]

21. Колесников, М.Н., Телятников, И.С., О методах изучения динамики контактирующих литосферных структур. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2017, № 4, вып. 1, с. 50–61. [Kolesnikov, M.N., Telyatnikov, I.S., On methods for studying the dynamics of contacting lithospheric structures. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2017, no. 4, iss. 1, pp. 50–61. (in Russian)] EDN: ZXPYMZ