

УДК 563.24

EDN: NBFMDW DOI: 10.31429/vestnik-21-4-45-54

Реконструкция переменных теплофизических свойств прямоугольной области

С. А. Нестеров  

Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, ул. Ватутина, 53, Владикавказ, 362025, Россия

✉ Нестеров Сергей Анатольевич; ORCID 0000-0003-3780-5104; SPIN 4902-4083; e-mail: 1079@list.ru

Аннотация. Исследуется двумерная коэффициентная обратная задачи теплопроводности по реконструкции переменных теплофизических свойств прямоугольника. Решение прямой задачи в слабой постановке реализовано в конечно-элементном пакете FreeFem++. Исследовано влияние коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости на температуру верхней грани. Решение обратной задачи построено на проекционно-итерационной схеме. На каждом этапе итерационного процесса искомые функции представлены в виде разложений по заданным системам функций. Коэффициенты разложения определяются путем решения системы алгебраических уравнений, полученной при дискретизации интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. Представлены результаты отдельной реконструкции коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости прямоугольника для монотонных функций.

Ключевые слова: интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, идентификация, прямоугольная область, коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость, коэффициентная обратная задача, пакет FreeFem++, итерационно-проекционный подход.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Нестеров С. А. Реконструкция переменных теплофизических свойств прямоугольной области // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 4. С. 45–54. EDN: NBFMDW. DOI: 10.31429/vestnik-21-4-45-54

Поступила 14 октября 2024 г. После доработки 18 ноября 2024 г. Принято 27 ноября 2024 г. Публикация 20 декабря 2024 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Reconstruction of Variable Thermophysical Properties of a Rectangular Region

S. A. Nesterov  

Southern Mathematical Institute, a branch of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vatutina St., 53, Vladikavkaz, 362025, Russia

✉ Sergey A. Nesterov; ORCID 0000-0003-3780-5104; e-mail: 1079@list.ru

Abstract. The article studies a two-dimensional coefficient inverse problem of heat conductivity based on reconstruction of variable thermophysical properties of a rectangular region. Zero temperature is specified on the lower side of the functionally gradient rectangle, the lateral sides are thermally insulated, and an unsteady heat flux acts on the upper side. The temperature specified on the upper boundary of the rectangular region for some moments of time serves as additional information. The solution of the direct problem in a weak formulation is implemented in the finite element package FreeFem++. The influence of the thermal conductivity coefficient and specific heat capacity on the temperature of the upper face is investigated. A projection-iteration scheme for solving the inverse problem is proposed. Thermophysical characteristics at each stage of the iteration process are presented as an expansion in a system of polynomials. The expansion coefficients are determined by solving a system of algebraic equations obtained by discretizing the Fredholm integral equation of the first kind. Tikhonov's method is used to regularize the ill-conditioned algebraic system of equations. The results of separate reconstruction of the coefficient of thermal conductivity and specific heat capacity of a rectangle for monotone functions are presented.

Keywords: Fredholm integral equation of the first kind, identification, rectangular domain, coefficient of thermal conductivity, specific heat capacity, coefficient inverse problem, finite element package FreeFem++, iterative-projection approach..

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Nesterov, S. A., Reconstruction of variable thermophysical properties of a rectangular region. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 4, pp. 45–54. DOI: 10.31429/vestnik-21-4-45-54

Received 14 October 2024. Revised 18 November 2024. Accepted 27 November 2024. Published 20 December 2024.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](#) license.

Введение

В настоящее время для повышения термоустойчивости объектов, подвергающихся длительным термическим нагрузкам, вместо традиционных материалов широко используются функционально-градиентные материалы (ФГМ) — композиционные материалы, свойства которых непрерывно изменяются по пространственным координатам [1–4]. В [1] двунаправленный ФГМ прямоугольной области изготовлен из смеси трех материалов: 1) керамики ZrO_2 , объемная фракция которой достигает максимального значения на верхней грани; 2) металлов 6061– $T6$ и $Ti-6Al-4V$, объемные фракции которых достигают максимального значения на нижней грани. Теплофизические характеристики прямоугольника определяются по «правилу смеси» и имеют вид степенных функций, описывающих их одновременное непрерывное изменение по горизонтальной и вертикальной координатам вследствие изменения процентного соотношения объемных фракций всех составляющих. Следует учесть, что создание контролируемого распределения теплофизических характеристик — сложный многоэтапный технологический процесс [3].

Для оценки соответствия полученных и проектных законов изменения теплофизических характеристик необходимо совершенствовать технологию теплового контроля, теоретически опирающуюся на коэффициентные обратные задачи теплопроводности (КОЗТ) [5]. Если дополнительная информация измеряется на части внешней границы, то КОЗТ легко экспериментально реализовать. Однако в силу своей нелинейности и некорректности для решения КОЗТ в такой постановке требуется проведение процедур линеаризации и регуляризации.

Успешность решения обратных задач сильно зависит от точности решения прямых задач. В настоящее время наиболее распространенным способом решения задач теплопроводности неоднородных тел является метод конечных элементов (МКЭ) [6–8]. Для его удобной реализации были созданы различные конечно-элементные пакеты, такие как ANSYS, FEMLAB, Comsol, FlexPDE, FreeFem++ и др.

Исследованию как одномерных, так и двумерных КОЗТ для неоднородных материалов посвящено достаточно много работ [9–22]. При этом для решения обратных задач применяются различные подходы: составление функционала невязки и его минимизация градиентными методами [9–15] или эволюционными алгоритмами [16]; метод обращения разностных схем [17]; метод квазиобращения [18]; итерационный алгоритм ньютоновского типа для нахождения поправок на основе решения операторных уравнений [5, 19–22], проекционный метод Галеркина [24].

При решении КОЗТ для двумерных областей в [11–13] в качестве дополнительной информации выступает температура, измеренная внутри области. При этом, применяя минимизацию функционала невязки методом сопряженных градиентов, восстанавливается коэффициент теплопроводности как кусочно-постоянная функция. В работе [21] дополнительная информация измеряется на верхней грани прямоугольника в некоторые моменты времени. Однако двумерная обратная задача термоупругости благодаря особым граничным условиям после применения метода разделения переменных сводится к ряду одномерных задач для различных гармоник, для решения которых применяется итерационный алгоритм. При этом для решения одномерных прямых задач применяется метод пристрелки.

В статье [23] представлено решение двумерной обратной задачи теории упругости об идентификации неоднородного преднапряженного состояния прямоугольной пластинки при анализе ее установившихся колебаний. Решение прямой задачи основано на ее слабой постановке

и применении МКЭ в пакете FreeFem++. Решение обратной задачи основано на итерационном алгоритме с его доработкой с помощью проекционного подхода, предложенного в [24].

В данной работе исследуется обратная задача о реконструкции двумерных законов изменения теплофизических характеристик прямоугольной области. Решение прямой задачи реализовано в пакете FreeFem++. Проведено исследование влияния коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости на температуру верхней грани. Реализована итерационно-проекционная схема решения обратной задачи. Представлены результаты раздельной реконструкции коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости.

1. Постановка двумерной обратной задачи теплопроводности

Рассмотрим задачу о распределении температуры $T(x_1, x_2, t)$ в различные моменты времени в прямоугольнике $S = \{x_1, x_2 \mid x_1 \in [0, L], x_2 \in [0, h]\}$ с границей $l = \partial S = l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4$. Нижняя сторона прямоугольника $l_1 = \{x_1, x_2 \mid 0 \leq x_1 \leq L, x_2 = 0\}$ поддерживается при нулевой температуре, боковые стороны $l_2 = \{x_1, x_2 \mid x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq h\}$, $l_4 = \{x_1, x_2 \mid x_1 = L, 0 \leq x_2 \leq h\}$ теплоизолированы, а на верхней стороне $l_3 = \{x_1, x_2 \mid 0 \leq x_1 \leq L, x_2 = h\}$ действует тепловой поток $q = q_0 r(x_1, t)$. Начальная температура — нулевая. Теплофизические свойства материала описываются коэффициентом теплопроводности k и удельной теплоемкостью c , которые изменяются по продольной и поперечной координатам. Начально-краевая задача теплопроводности имеет вид [6–8]

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(x_1, x_2) \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k(x_1, x_2) \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) = c(x_1, x_2) \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$T|_{l_1} = 0, \quad - \left(k \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) \Big|_{l_3} = q_0 r(x_1, t), \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} \Big|_{l_2} = \frac{\partial T}{\partial x_1} \Big|_{l_4} = 0, \quad (1.2)$$

$$T(x_1, x_2, 0) = 0. \quad (1.3)$$

Перейдем в (1.1)–(1.3) к безразмерным параметрам и функциям

$$y_1 = \frac{x_1}{L}, \quad y_2 = \frac{x_2}{h}, \quad \bar{k} = \frac{k}{k_0}, \quad \bar{c} = \frac{c}{c_0},$$

$$H = \frac{h}{L}, \quad W = \frac{k_0 T}{q_0 L}, \quad \tau = \frac{k_0 t}{c_0 L^2}, \quad Q = \frac{q}{q_0}.$$

После обезразмеривания постановка задачи (1.1)–(1.3) примет вид

$$\nabla \cdot (\bar{k} \nabla W) = \bar{c} \frac{\partial W}{\partial \tau}, \quad (1.4)$$

$$W|_{l_1} = 0, \quad - \left(\bar{k} \frac{\partial W}{\partial y_2} \right) \Big|_{l_3} = Q(y_1, \tau), \quad \frac{\partial W}{\partial y_1} \Big|_{l_2} = \frac{\partial W}{\partial y_1} \Big|_{l_4} = 0, \quad (1.5)$$

$$W(y_1, y_2, 0) = 0. \quad (1.6)$$

Обратная задача состоит в восстановлении теплофизических характеристик $(\bar{k}(y_1, y_2), \bar{c}(y_1, y_2))$ из (1.4)–(1.6) по информации о температуре, измеренной на части границы l_3 в некотором временном отрезке

$$W|_{l_3} = f(y_1, \tau), \quad y_1 \in [0, 1], \quad \tau \in [c, d]. \quad (1.7)$$

2. Конечно-элементная реализация решения начально-краевой задачи теплопроводности в пакете FreeFem++

В случае неоднородного материала решение начально-краевой задачи теплопроводности (1.4)–(1.6) можно получить только численно, например, с помощью МКЭ, реализованного

в каком-либо конечно-элементном пакете, например, на FreeFem++, где используется слабая постановка задачи.

Получим слабую формулировку задачи (1.4)–(1.6). Умножим (1.4) на тестовую функцию v , удовлетворяющую главному граничному условию $v|_{l_1} = 0$, и проинтегрируем по области S

$$\iint_S \left[\nabla \cdot (\bar{k} \nabla W) - \bar{c} \frac{\partial W}{\partial \tau} \right] v \, dS = 0. \quad (2.1)$$

С учетом того, что $\nabla \cdot (\bar{k} \nabla W) v = \nabla \cdot (\bar{k} \nabla W v) - \bar{k} \nabla W \cdot \nabla v$, получим

$$\iint_S \left(\nabla \cdot (\bar{k} \nabla W v) - \bar{k} \nabla W \cdot \nabla v - \bar{c} \frac{\partial W}{\partial \tau} v \right) dS = 0. \quad (2.2)$$

Тогда, применяя к первому слагаемому (2.2) формулу Грина, получим

$$\iint_S \left(\bar{k} \nabla W \cdot \nabla v + \bar{c} \frac{\partial W}{\partial \tau} v \right) dS = \int_l \bar{k} \nabla W \cdot n v \, dl. \quad (2.3)$$

С учетом граничных условий (1.5) выражение (2.3) примет вид

$$\iint_S \left(\bar{k} \nabla W \cdot \nabla v + \bar{c} \frac{\partial W}{\partial \tau} v \right) dS = \int_{l_3} Q(y_1, \tau) v \, dl. \quad (2.4)$$

Покоординатная форма записи выражения (2.4) имеет вид

$$\iint_S \left(\bar{k}(y_1, y_2) \left(\frac{\partial W}{\partial y_1} \frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial W}{\partial y_2} \frac{\partial v}{\partial y_2} \right) + \bar{c}(y_1, y_2) \frac{\partial W}{\partial \tau} \right) dy_1 dy_2 = \int_{l_3} Q(y_1, \tau) v \, dy_1. \quad (2.5)$$

Для решения задачи (1.4)–(1.6), записанной в слабой постановке (2.5), разработана конечно-элементная схема, реализованная на FreeFem++. При этом алгоритм решения задачи (1.4)–(1.6) в пакете FreeFem++ состоит из следующих этапов: 1) задание геометрических размеров и функций коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости; 2) задание прямоугольной области S в параметрическом виде; 3) триангуляция области при помощи встроенного генератора сеток; 4) задание пространства конечных элементов с аппроксимацией решения кусочно-квадратичными функциями; 4) запись слабой формулировки задачи с использованием конечно-разностной аппроксимации производной температуры по времени; 5) организация пошагового решения задачи теплопроводности в заданные моменты времени; 6) вывод результатов.

Исследована связь температуры на верхней грани прямоугольной области, которая выступает дополнительной информацией при решении обратной задачи, с законами неоднородности теплофизических характеристик. В расчетах использовалась сетка с разбиением 80×40 , а также полагалось $H = 0,5$, $Q(y_1, \tau) = 2y_1(1 - y_1)\tau e^{-\tau}$. Результаты расчета зависимости температуры от времени в точке $(0,5; 0,5)$ представлены на рис. 1. При этом на рис. 1а исследовано влияние на температуру при $\bar{c}(y_1, y_2) = 1$ различных законов изменения коэффициентах теплопроводности: а) $\bar{k}(y_1, y_2) = 1$ (сплошная линия); б) $\bar{k}(y_1, y_2) = 1 + y_1^2 + y_2^2$ (точки); в) $\bar{k}(y_1, y_2) = 2 - \cos(\pi(y_1 + 2y_2))$ (пунктир). На рис. 1б исследовано влияние на температуру при $\bar{k}(y_1, y_2) = 1$ различных законов изменения удельной теплоемкости: а) $\bar{c}(y_1, y_2) = 1$ (сплошная линия); б) $\bar{c}(y_1, y_2) = 1/2(e^{y_1} + e^{-3y_2})$ (точки); в) $\bar{c}(y_1, y_2) = 1 + e^{y_1} \sin(3y_2)$ (пунктир).

Из рис. 1 следует, что различные законы неоднородности по-разному влияют на температуру верхней грани прямоугольника, поэтому такая дополнительная информация является информативной и ее можно использовать при построении операторных уравнений для решения обратных задач.

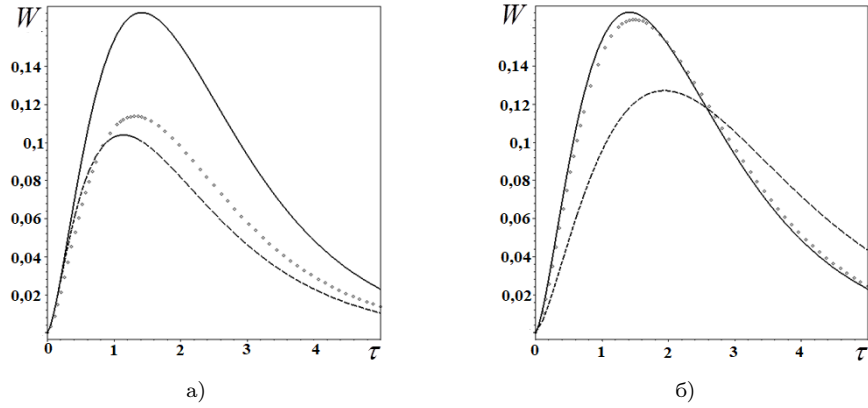


Рис. 1. Изменение температуры от времени в точке (0,5;0,5) при различных законах:
а) коэффициента теплопроводности; б) удельной теплоемкости

Fig. 1. History of temperature over time at a point (0,5;0,5) under different laws: а) coefficient of thermal conductivity; б) specific heat capacity

3. Проекционно-итерационная схема решения обратной задачи теплопроводности

На основе слабой постановки (2.4) можно получить операторные уравнения для решения нелинейной обратной задачи (1.4)–(1.7) с помощью итерационного процесса, на каждом шаге которого решается линейная задача.

Рассмотрим два состояния системы, которым соответствует два набора характеристик: а) $W^{(1)}, \bar{k}^{(1)}, \bar{c}^{(1)}$; б) $W^{(2)}, \bar{k}^{(2)}, \bar{c}^{(2)}$. Слабые постановки для каждого состояния примут вид

$$\iint_S \left(\bar{k}^{(1)} \nabla W^{(1)} \cdot \nabla v^{(1)} + \bar{c}^{(1)} \frac{\partial W^{(1)}}{\partial \tau} v^{(1)} \right) dS = \int_{l_3} Q(y_1, \tau) v^{(1)} dl, \quad (3.1)$$

$$\iint_S \left(\bar{k}^{(2)} \nabla W^{(2)} \cdot \nabla v^{(2)} + \bar{c}^{(2)} \frac{\partial W^{(2)}}{\partial \tau} v^{(2)} \right) dS = \int_{l_3} Q(y_1, \tau) v^{(2)} dl. \quad (3.2)$$

Найдем разность (3.1) и (3.2), положив $v^{(1)} = W^{(2)}, v^{(2)} = W^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \iint_S \left((\bar{k}^{(2)} - \bar{k}^{(1)}) \nabla W^{(1)} \cdot \nabla W^{(2)} + \bar{c}^{(2)} \frac{\partial W^{(2)}}{\partial \tau} W^{(1)} - \bar{c}^{(1)} \frac{\partial W^{(1)}}{\partial \tau} W^{(2)} \right) dS = \\ = \int_{l_3} Q(y_1, \tau) (W^{(1)} - W^{(2)}) dl. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Пусть n — номер итерации. Полагая в (3.3) $\bar{k}^{(1)} = \bar{k}^{(n-1)}, \bar{c}^{(1)} = \bar{c}^{(n-1)}, W^{(1)} = W^{(n-1)}, \bar{k}^{(2)} = \bar{k}^{(n-1)} + \delta \bar{k}^{(n-1)}, \bar{c}^{(2)} = \bar{c}^{(n-1)} + \delta \bar{c}^{(n-1)}, W^{(2)} = W^{(n-1)} + \delta W^{(n-1)}$, ограничившись только линейными слагаемыми и учитывая дополнительную информацию (1.7), получим

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\delta \bar{k}^{(n-1)} \nabla W^{(n-1)} \cdot \nabla W^{(n-1)} + \delta \bar{c}^{(n-1)} \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial \tau} W^{(n-1)} \right) dS = \\ = \int_{l_3} Q(y_1, \tau) (f - W^{(n-1)}) dl, \quad \tau \in [c, d]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Покоординатная форма записи выражения (3.4) имеет вид

$$\iint_S \delta \bar{k}^{(n-1)} \left(\left(\frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial y_2} \right)^2 \right) dy_1 dy_2 + \iint_S \delta \bar{c}^{(n-1)} \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial \tau} W^{(n-1)} dy_1 dy_2 = \int_{l_3} Q(y_1, \tau) (f - W^{(n-1)}) dl, \quad \tau \in [c, d]. \quad (3.5)$$

Операторное уравнение (3.5) является интегральным уравнением Фредгольма (ИУФ) 1-го рода.

В случае раздельного восстановления теплофизических характеристик уравнение (3.5) упрощается и имеет вид:

а) для нахождения поправок коэффициента теплопроводности

$$\iint_S \delta \bar{k}^{(n-1)} \left(\left(\frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial y_2} \right)^2 \right) dy_1 dy_2 = \int_{l_3} Q(f - W^{(n-1)}) dl, \quad (3.6)$$

$$\tau \in [c, d];$$

б) для нахождения поправок удельной теплоемкости

$$\iint_S \delta \bar{c}^{(n-1)} \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial \tau} W^{(n-1)} dy_1 dy_2 = \int_{l_3} Q(f - W^{(n-1)}) dl, \quad \tau \in [c, d]. \quad (3.7)$$

Процедура раздельной идентификации теплофизических характеристик на основе итерационного процесса состоит из трех этапов.

На первом этапе находят начальные приближения искомых функций среди констант, которые доставляют минимум функционалу невязки

$$J = \sqrt{\sum_{j=1}^N \int_{l_3} (W(y_1, H, \tau_j) - f(y_1, \tau_j))^2 dl}. \quad (3.8)$$

На втором этапе путем решения операторного уравнения (3.6) для заданных моментов времени находят поправки $\delta \bar{k}^{(n-1)}$, предварительно рассчитав в пакете FreeFem++ поле температур. Затем происходит уточнение искомых функций по формуле $\bar{k}^{(n)} = \bar{k}^{(n-1)} + \delta \bar{k}^{(n-1)}$. Аналогично находят поправки и для удельной теплоемкости.

Используя проекционный метод, рассмотренный в [23, 24] представим поправки к искомым функциям в виде разложений по некоторым системам линейно независимых функций вида

$$\delta \bar{k}(y_1, y_2) = \sum_{m=1}^M a_m \psi_m(y_1, y_2), \quad \delta \bar{c}(y_1, y_2) = \sum_{m=1}^M b_m \psi_m(y_1, y_2). \quad (3.9)$$

Подставив первое разложение (3.9) в (3.6), получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для нахождения коэффициентов разложения a_m на $(n-1)$ -й итерации

$$\sum_{m=1}^M a_m^{(n-1)} R_{mj}^{(n-1)} = F_j^{(n-1)}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.10)$$

Здесь

$$R_{mj}^{(n-1)} = \iint_S \psi_m(y_1, y_2) \left(\left(\frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial y_1}(y_1, y_2, \tau_j) \right)^2 + \left(\frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial y_2}(y_1, y_2, \tau_j) \right)^2 \right) dS,$$

$$F_j^{(n-1)} = \int_{l_3} Q(y_1, \tau_j) \left(f(y_1, \tau_j) - W^{(n-1)}(y_1, H, \tau_j) \right) dl.$$

СЛАУ (3.10) является плохо обусловленной, для решения которой успешно применяется метод регуляризации А.Н. Тихонова [25] даже в случае, если число уравнений N не равно числу неизвестных коэффициентов разложения M . Выбор параметра регуляризации в методе А.Н. Тихонова осуществлялся автоматически в соответствии с принципом обобщенной невязки.

На третьем этапе проверяются условие выхода из итерационного процесса. Итерационный процесс останавливается, если выполняется одно из условий выхода:

- 1) величина функционала невязки (3.8) станет меньше 10^{-4} ;
- 2) количество итераций превысит $n = 30$.

4. Результаты раздельной реконструкции двумерных законов изменения теплофизических характеристик

В данном разделе представлены результаты вычислительных экспериментов по раздельной реконструкции двумерных законов изменения коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости. В расчетах принято: $H = 0,5$, $Q(y_1, \tau) = 2y_1(1 - y_1)\tau e^{-\tau}$, $(c; d) = (0,05; 0,65)$, $N = 4$, $M = 6$. При этом в разложениях (3.9) функции ψ_m имеют вид: $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = y_1$, $\psi_3 = y_2$, $\psi_4 = y_1 y_2$, $\psi_5 = y_1^2$, $\psi_6 = y_2^2$.

Погрешность реконструкции искомых характеристик, например, безразмерного коэффициента теплопроводности в точках (y_1, y_2) прямоугольной области, рассчитывалась по формуле

$$\beta(y_1, y_2) = \frac{|\bar{k}_{exact}(y_1, y_2) - \bar{k}_{rec}(y_1, y_2)|}{\bar{k}_{exact}(y_1, y_2)} \cdot 100\%, \quad (4.1)$$

где $\bar{k}_{exact}(y_1, y_2)$ — точный закон неоднородности, $\bar{k}_{rec}(y_1, y_2)$ — восстановленный закон неоднородности.

Исследовано влияние выбора временного интервала и количества точек измерения внутри него. Выяснено, что 1) наиболее информативным является тот интервал, на котором скорость изменения дополнительной информации максимальна и который находится в зоне, наиболее близкой к началу отчета времени; 2) для успешной реконструкции монотонных функций достаточно провести измерения в 3–4 точках, а немонотонных — в 6 точках внутри выбранных информативных интервалов.

В результате вычислительных экспериментов выяснено, что: 1) погрешность реконструкции теплофизических характеристик не превышала 9 %; 2) наибольшая погрешность возникала в области границы; 3) для выполнения первого условия выхода из итерационного процесса требовалось не более 21 итерации.

Для оценки устойчивости предложенного подхода решения обратной задачи к измерительной ошибке съема дополнительной информации проведено ее зашумление по формуле

$$f_\beta(y_1, \tau) = f(y_1, \tau)(1 + \beta\gamma), \quad (4.2)$$

где β — амплитуда зашумления, γ — случайная величина с равномерным законом распределения на отрезке $[-1, 1]$.

Выяснено, что с увеличением амплитуды зашумления максимальная погрешность реконструкции возрастает, например, при 1 %-м шуме достигает 16 %.

Для удобства визуального сравнения точных и восстановленных функций на рис. 2, 3 изображены результаты реконструкции двумерных законов не во всей области S , а на срезах, например, $y_1 = 0,35$ или $y_2 = 0,35$; при этом точные функции изображены сплошной линией, а реконструированные — точками.

На рис. 2 представлены результаты восстановления коэффициента теплопроводности: а) $\bar{k}(y_1, y_2) = 1 + y_1^2 + y_2^2$; б) $\bar{k}(y_1, y_2) = 2 - \cos(\pi(y_1 + 2y_2))$ при $y_2 = 0,35$.

На рис. 3 изображены результаты реконструкции удельной теплоемкости: а) $\bar{c}(y_1, y_2) = 1/2(e^{y_1} + e^{-3y_2})$; б) $\bar{c}(y_1, y_2) = 1 + e^{y_1} \sin(3y_2)$ при $y_1 = 0,35$.

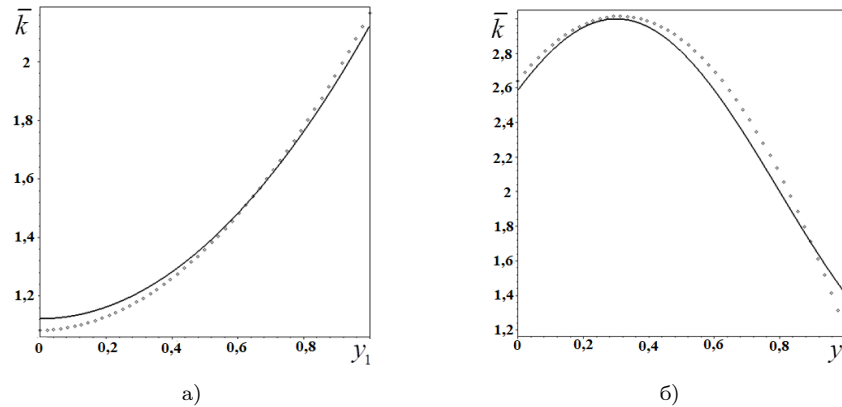


Рис. 2. Результаты восстановления коэффициента теплопроводности: а) $\bar{k}(y_1, y_2) = 1 + y_1^2 + y_2^2$; б) $\bar{k}(y_1, y_2) = 2 - \cos(\pi(y_1 + 2y_2))$ при $y_2 = 0,35$

Fig. 2. Results of thermal conductivity coefficient reconstruction: а) $\bar{k}(y_1, y_2) = 1 + y_1^2 + y_2^2$; б) $\bar{k}(y_1, y_2) = 2 - \cos(\pi(y_1 + 2y_2))$ at $y_2 = 0,35$

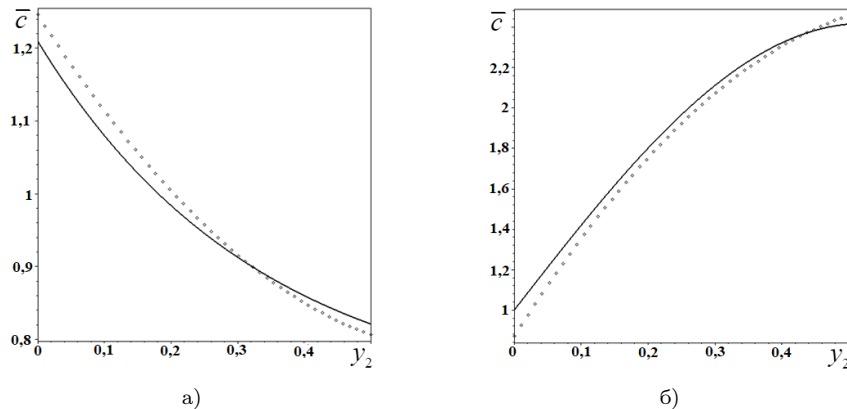


Рис. 3. Результаты реконструкции удельной теплоемкости: а) $\bar{c}(y_1, y_2) = 1/2(e^{y_1} + e^{-3y_2})$; б) $\bar{c}(y_1, y_2) = 1 + e^{y_1} \sin(3y_2)$ при $y_1 = 0,35$

Fig. 3. Results of reconstruction of specific heat capacity: а) $\bar{c}(y_1, y_2) = 1/2(e^{y_1} + e^{-3y_2})$; б) $\bar{c}(y_1, y_2) = 1 + e^{y_1} \sin(3y_2)$ at $y_1 = 0,35$

Заключение

Рассмотрена обратная задача по идентификации теплофизических характеристик, являющихся функциями двух координат при измерении температуры на части внешней границы на некотором временном отрезке. В пакете FreeFem++ реализована конечно-элементная схема решения прямой задачи, основанная на ее слабой постановке. Получены операторные уравнения и представлена итерационная схема решения обратной задачи. Операторные уравнения решены с помощью проекционного метода, при котором поправки представлены в виде разложений по системе полиномов. Выяснено, что 1) погрешность реконструкции теплофизических характеристик не превышала 9 %; 2) наибольшая погрешность возникала в области границы. Преимущество проекционно-итерационного подхода по сравнению с методом минимизации функционала невязки градиентными методами состоит в том, что требуется меньше обращений к решению прямой задачи, отсутствуют требования к целевой функции. Практическая значимость работы определяется возможностью применения разработанного алгоритма решения двумерных коэффициентных обратных задач теплопроводности для усовершенствования теоретической базы тепловых методов диагностики свойств функционально-градиентных материалов.

Литература [References]

1. Nemat-Alla, M., Reduction of thermal stresses by composition optimization of two-dimensional functionally graded materials. *Acta Mechanica*, 2009, vol. 208, pp. 147–161. DOI: [10.1007/s00707-008-0136-1](https://doi.org/10.1007/s00707-008-0136-1)
2. Kieback, B., Neubrand, A., Riedel, H., Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering: A*, 2003, vol. 362, pp. 81–105. DOI: [10.1016/S0921-5093\(03\)00578-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00578-1)
3. Birman, V., Byrd, L.W., Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Applied Mechanics Reviews*, 2007, vol. 60(5), pp. 195–216. DOI: [10.1115/1.2777164](https://doi.org/10.1115/1.2777164)
4. Gupta, A., Talha, M., Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Progress in Aerospace Sciences*, 2015, vol. 79, pp. 1–14. DOI: [10.1016/j.paerosci.2015.07.001](https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2015.07.001)
5. Ватульян, А.О., Нестеров, С.А., *Коэффициентные обратные задачи термомеханики*. Ростов-на-Дону – Таганрог, Издательство Южного федерального университета, 2022. [Vatulyan, A.O., Nesterov, S.A., *Koeffitsiyentnyye obratnyye zadachi termomekhaniki = Coefficientinverse problems of thermomechanics*. Rostov-on-Don – Taganrog, Southern Federal University Publishing House, 2022. (in Russian)]
6. Полатов, А., Икрамов, А., Жуманиёзов, С., Сапаев, Ш., Компьютерное моделирование двумерных нестационарных задач теплопроводности для неоднородных тел методом конечных элементов. *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, 2022, № 2(39), с. 61–71. [Polatov, A., Ikramov, A., Zhumaniyozov, S., Sapayev, Sh., Computer modeling of two-dimensional non-stationary heat conduction problems for inhomogeneous bodies by the finite element method. *Problemy vychislitel'noy i prikladnoy matematiki = Problems of Computational and Applied Mathematics*, 2022, no. 2(39), pp. 67–71 (in Russian)]
7. Жуков, М.Ю., Ширяева, Е.В., *Решение задач математической физики при помощи пакета конечных элементов FreeFem++*. Ростов-на-Дону, Издательство Южного федерального университета, 2005. [Zhukov, M.Yu., Shirayeva, E.V., *Resheniye zadach matematicheskoy fiziki pri pomoshchi paketa konechnykh elementov FreeFem++ = Solving problems of mathematical physics using the finite element package FreeFem++*. Rostov on Don, Southern Federal University Publishing House, 2005. (in Russian)]
8. Font, R., Periago, F. The finite element method with FreeFem++ for beginners. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 2013, vol. 7, no. 4, pp. 289–307.
9. Алифанов, О.М., Артюхин, Е.А., Румянцев, С.В., *Экстремальные методы решения некорректных задач*. Москва, Наука, 1988. [Alifanov, O.M., Artyukhin, E.A., Rumyantsev, S.V., *Ekstremal'nyye metody resheniya nekorrektnykh zadach = Extreme methods for solving ill-posed problems*. Moscow, Nauka, 1988. (in Russian)]
10. Кабанихин, С.И., Гасанов, А., Пененко, А.В., Метод градиентного спуска для решения коэффициентной обратной задачи теплопроводности. *Сибирский журнал вычислительной математики*, 2008, т. 11, № 1, с. 41–54. [Kabanikhin, S.I., Hasanov, A., Penenko, A.V., A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat conduction problem. *Numerical Analysis and Applications*, 2008, vol. 1, no. 1, pp. 34–45. DOI: [10.1134/S1995423908010047](https://doi.org/10.1134/S1995423908010047)] DOI: [10.1007/s12258-008-1004-x](https://doi.org/10.1007/s12258-008-1004-x)
11. Cao, K., Lesnic, D., Determination of space-dependent coefficients from temperature measurements using the conjugate gradient method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2018, vol. 34, no. 4, pp. 1370–1400. DOI: [10.1002/num.22262](https://doi.org/10.1002/num.22262)
12. Dulikravich, G.S., Reddy, S.R., Pasqualetto, M.A., Colaco, M.J., Orlande, H.R., Coverston, J., Inverse determination of spatially varying material coefficients in solid objects. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 2016, vol. 24, pp. 181–194. DOI: [10.1515/jiip-2015-0057](https://doi.org/10.1515/jiip-2015-0057)
13. Huang, C.H., Chin, S.C., A two-dimensional inverse problem in imaging the thermal conductivity of a non-homogeneous medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2000, vol. 43(22), pp. 4061–4071. DOI: [10.1016/S0017-9310\(00\)00044-2](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(00)00044-2)
14. Huang, C.H., Huang, C.Y., An inverse problem in estimating simultaneously the effective thermal conductivity and volumetric heat capacity of biological tissue. *Applied Mathematical Modelling*, 2007, vol. 31(9), pp. 1785–1797. DOI: [10.1016/j.apm.2006.06.002](https://doi.org/10.1016/j.apm.2006.06.002)
15. Reddy, S.R., Dulikravich, G.S., Zeidi, S.M.J., Non-destructive estimation of spatially varying thermal conductivity in 3D objects using boundary thermal measurements. *International Journal of Thermal Sciences*, 2017, vol. 118, pp. 488–496. DOI: [10.1016/j.ijthermalsci.2017.05.011](https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2017.05.011)
16. Raudensky, M., Woodbary, K. A., Kral, J., Genetic algorithm in solution of inverse heat conduction

- problems. *Numerical Heat Transfer. Part B: Fundamentals*, 1995, vol. 28, no. 3, pp. 293–306. DOI: [10.1080/10407799508928835](https://doi.org/10.1080/10407799508928835)
17. Yeung, W.K., Lam, T.T., Second-order finite difference approximation for inverse determination of thermal conductivity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1996, vol. 39 (17), pp. 3685–3693. DOI: [10.1016/0017-9310\(96\)00028-2](https://doi.org/10.1016/0017-9310(96)00028-2)
 18. Danilaev, P.G., *Coefficient inverse problems for parabolic type equations and their applications*. Utrecht, Boston, Koln, Tokyo, VSP, 2001.
 19. Xu, M.H., Cheng, J.C., Chang, S.Y., Reconstruction theory of the thermal conductivity depth profiles by the modulated photo reflectance technique. *Journal of Applied Physics*, 2004, vol. 84, no. 2, pp. 675–682. DOI: [10.1063/1.368122](https://doi.org/10.1063/1.368122)
 20. Nedin, R., Nesterov, S., Vatulyan, A., Identification of thermal conductivity coefficient and volumetric heat capacity of functionally graded materials. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016, vol. 102, pp. 213–218. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.06.027](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.06.027)
 21. Ватульян, А.О., Нестеров, С.А., Об особенностях идентификации переменных термомеханических характеристик функционально-градиентного прямоугольника. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2023, т. 16, № 4, с. 504–516. [Vatulyan, A.O., Nesterov, S.A., On the features of identification of variable thermomechanical characteristics of a functionally graded rectangle. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred = Computational Continuum Mechanics*, 2023, vol. 16, no. 4, pp. 504–516. (in Russian)] DOI: [10.7242/1999-6691/2023.16.4.42](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.4.42)
 22. Нестеров, С.А., О различных подходах к решению коэффициентной обратной задачи теплопроводности для неоднородного стержня. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 3, с. 32–44. [Nesterov, S.A., On various approaches to solving the coefficient inverse problem of heat conductivity for a inhomogeneous rod. *Ekologicheskiiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 3, pp. 32–44. (in Russian)]. DOI: [10.31429/vestnik-21-3-32-44](https://doi.org/10.31429/vestnik-21-3-32-44) EDN: IXLFIG
 23. Богачев, И.В., Недин, Р.Д., Идентификация двумерных полей предварительных напряжений в неоднородных пластинах. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*, 2023, т. 23, № 4, с. 456–471. [Bogachev, I.V., Nedin, R.D., Identification of two-dimensional prestress fields in inhomogeneous plates. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika = Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, no. 4, pp. 456–471. (in Russian)] DOI: [10.18500/1816-9791-2023-23-4-456-471](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-456-471)
 24. Ватульян, А.О., Богачев, И.В., О проекционном методе идентификации характеристик неоднородных тел. *ДАН*, 2018, т. 478, № 5, с. 532–535. [Vatulyan, A.O., Bogachev, I.V., The projection method for identification of the characteristics of inhomogeneous solids. *Doklady Physics*, 2018, vol. 63, pp. 82–85. DOI: [10.1134/S1028335818020088](https://doi.org/10.1134/S1028335818020088)] DOI: [10.7868/S0869565218050079](https://doi.org/10.7868/S0869565218050079)
 25. Тихонов, А.Н., Гончарский, А.В., Степанов, В.В., Ягола, А.Г., *Численные методы решения некорректных задач*. Москва, Наука, 1990. [Tikhonov, A.N., Goncharsky, A.V., Stepanov, V.V., Yagola, A.G., *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach = Numerical methods for solving ill-posed problems*, Moscow, Nauka, 1990. (In Russian)]