

УДК 539.3

EDN: LEABMC DOI: 10.31429/vestnik-21-4-29-37

Построение упругих полей для анизотропных тел от действия нагрузки локального характера

Д. А. Иванычев¹✉, Д. И. Балыкин¹, Д. В. Ездакова¹, Е. А. Малявин²

¹ Липецкий государственный технический университет, ул. Интернациональная, 5, Липецк, 398600, Россия

² Воронежский государственный технический университет, ул. 20-летия Октября, 84, Воронеж, 394006, Россия

✉ Иванычев Дмитрий Алексеевич; ORCID 0000-0002-7736-9311; SPIN 5839-4063; e-mail: Lsivdml@mail.ru

Аннотация. В работе представлена математическая модель построения упругих неосесимметричных полей для анизотропного тела, ограниченного коаксиальными поверхностями вращения. Тело находится в равновесии под действием внешних сил, распределенных по поверхности тела нетривиальным образом. Материал цилиндра обладает прямолинейной трансверсальной изотропией. Модель строится на основе энергетического метода граничных состояний. Базис пространства внутренних состояний в составе метода граничных состояний формируется согласно общему представлению, выражающему пространственное напряженно-деформированное состояние через совокупность плоских вспомогательных состояний. В качестве таких состояний выступают решения задачи о плоской деформации. После формирования базиса внутренних состояний проводится его ортогонализация, и искомые характеристики напряженно-деформированного состояния раскладываются в ряд Фурье по элементам ортонормированного базиса, где в качестве коэффициентов выступают квадратуры. Приведено решение первой основной задачи теории упругости для кругового в плане цилиндра из трансверсально-изотропной горной породы. Поверхностные силы распределены по сложной функции. Результат представлен в графическом виде.

Ключевые слова: метод граничных состояний, трансверсально-изотропные материалы, пространственная задача, несимметричная задача.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Иванычев Д. А., Балыкин Д. И., Ездакова Д. В., Малявин Е. А. Построение упругих полей для анизотропных тел от действия нагрузки локального характера // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 4. С. 29–37. EDN: LEABMC. DOI: 10.31429/vestnik-21-4-29-37

Поступила 23 октября 2024 г. После доработки 29 ноября 2024 г. Принято 3 декабря 2024 г. Публикация 20 декабря 2024 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Construction of Elastic Fields for Anisotropic Bodies under the Action of a Local Load

D. A. Ivanychev¹✉, D. I. Balykin¹, D. V. Yezdakova¹, E. A. Malyavin²

¹ Lipetsk State Technical University, Iternationalnaya st., 5, Lipetsk, 398600, Russia

² Voronezh State Technical University, 20th anniversary of October st., 84, Voronezh, 394006, Russia

✉ Dmitry A. Ivanychev; ORCID 0000-0002-7736-9311; e-mail: Lsivdml@mail.ru

Abstract. The paper presents a mathematical model for constructing elastic non-axisymmetric fields for an anisotropic body bounded by coaxial surfaces of revolution. The body is in equilibrium under the action of external forces distributed over the body surface in a non-trivial manner. The cylinder material has rectilinear transverse isotropy. The model is constructed based on the energy method of boundary states. The basis of the space of internal states as part of the boundary state method is formed according to the general idea expressing the spatial stress-strain state through a set of plane auxiliary states. Such states are solutions to the problem of plane deformation. After forming the basis of internal states, it is orthogonalized, and the sought characteristics of the stress-strain state are expanded in a Fourier series by the elements of the orthonormal basis, where the coefficients are quadratures. The solution of the first main problem of elasticity theory for a circular cylinder made of transversely isotropic rock is presented. Surface forces are distributed over a complex function. The result is presented in graphical form.

Keywords: boundary state method, transversely isotropic materials, spatial problem, asymmetric problem.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Ivanychev, D. A., Balykin, D. I., Yezdakova, D. V., Malyavin, E. A., Construction of elastic fields for anisotropic bodies under the action of a local load. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 4, pp. 29–37. DOI: 10.31429/vestnik-21-4-29-37

Received 23 October 2024. Revised 29 November 2024. Accepted 3 December 2024. Published 20 December 2024.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

В узлах машин и механизмов взаимодействие тел зачастую происходит не по всей поверхности контактируемых тел, а по некоторому его участку, что приводит если не к сосредоточенному воздействию, то к воздействию, распределенному по небольшому участку границы тела. Помимо локальности действия нагрузки, расчет напряженно-деформированного состояния усложняется еще и наличием анизотропии упругих свойств материала.

Целью настоящей работы является построение математической модели по определению неосесимметричных упругих полей для трансверсально-изотропных тел вращения, находящихся под действием нагрузки, локально распределенной по его поверхности.

1. Постановка задачи

Рассматривается упругое равновесие трансверсально-изотропного тела, ограниченного одной или несколькими коаксиальными поверхностями вращения (рис. 1) и находящийся под действием нагрузки локального характера. Ось анизотропии трансверсально-изотропного тела совпадает с геометрической осью вращения z . Принята цилиндрическая система координат. Массовые силы отсутствуют. Поверхность тела свободна от ограничений кинематического характера. Материал тела сплошной и однородный.

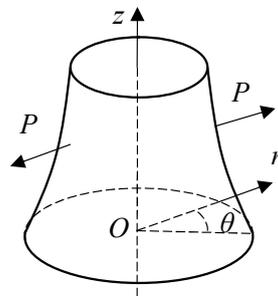


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения

Fig. 1. A transversally isotropic body of rotation

Задача состоит в определении напряженно-деформированного состояния, возникающего в теле, под действием приложенной нагрузки.

2. Дифференциальные и интегральные соотношения для трансверсально-изотропной среды

Дифференциальные уравнение равновесия при отсутствии массовых сил [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 0; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{zr}}{r} = 0.$$

Соотношения Коши [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{zr} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения совместности деформаций [1]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta}) &= 0; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z} &= 0; \\ -\frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial (r \varepsilon_{z\theta})}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial \theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta \partial z} &= 0; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta \partial z} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta \partial z} + r \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial z}) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial \theta}) &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial r \partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Обобщенный закон Гука [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z + \alpha_r T; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} [\sigma_z - \nu_z (\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha_z T; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z + \alpha_r T; \\ \gamma_{zr} &= \frac{1}{G_z} \tau_{zr}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_z} \tau_{z\theta}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_r} \tau_{r\theta} = \frac{2(1 + \nu_r)}{E_r} \tau_{r\theta}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь: u, v, w — компоненты вектора перемещения вдоль осей r, θ, z соответственно; $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{r\theta}, \gamma_{zr}, \gamma_{z\theta}$ — компоненты тензора деформаций; $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{zr}, \tau_{z\theta}$ — компоненты тензора напряжений; E_z и E_r — модули упругости соответственно в направлении оси z и в плоскости изотропии; ν_z — коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие вдоль оси r при растяжении вдоль оси z ; ν_r — коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскости изотропии при растяжении в этой же плоскости; G_r и G_z — модули сдвига в плоскости изотропии и перпендикулярной к ней.

3. Метод решения

В работе [1] методом интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженно-деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного тела вращения и некоторыми вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которого зависят от двух координат z и y (переменных). Ось η перпендикулярна плоскости zy . В качестве плоских вспомогательных состояний используется плоская деформация $\mathbf{u}^{pl} = \{u_y^{pl}, u_\eta^{pl}, u_z^{pl}\}$, возникающая в бесконечных цилиндрах, имеющих в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости zy (направление η).

Переход к пространственному состоянию в цилиндрических координатах осуществляется по зависимостям (показаны для перемещений):

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta + \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta \right); \\ v_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta - \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta \right); \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$w_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_z^{pl} \cos(n\beta) d\beta; \quad y = r \cos(\beta).$$

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=a}^b [u_n \cos(n\theta) + u_n \sin(n\theta)]; \quad v = \sum_{n=a}^b [-v_n \sin(n\theta) + v_n \cos(n\theta)]; \\ w &= \sum_{n=a}^b [w_n \cos(n\theta) + w_n \sin(n\theta)]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Деформации вычисляются через соотношения Коши (2.2), а напряжения через закон Гука (2.4).

Перемещения и напряжения плоских вспомогательных состояний определяются общим решением [1, 2]:

$$\begin{aligned} u_y^{pl} &= \operatorname{Re}[iq_1\varphi_1(\zeta_1) + iq_2\varphi_2(\zeta_2)]; \quad u_z^{pl} = \operatorname{Re}[p_1\varphi_1(\zeta_1) + p_2\varphi_2(\zeta_2)]; \\ \sigma_z^{pl} &= -\operatorname{Re}[\gamma_1^2\varphi_1'(\zeta_1) + \gamma_2^2\varphi_2'(\zeta_2)]; \quad \sigma_y^{pl} = \operatorname{Re}[\varphi_1'(\zeta_1) + \varphi_2'(\zeta_2)]; \\ \sigma_{zy}^{pl} &= -\operatorname{Re}[\gamma_1\varphi_1'(\zeta_1) + \gamma_2\varphi_2'(\zeta_2)]; \\ \sigma_{z\eta}^{pl} &= \operatorname{Re}[i\gamma_3\varphi_3(\zeta_3)]; \quad \sigma_{y\eta}^{pl} = -\operatorname{Re}[\varphi_3(\zeta_3)]; \\ \sigma_\eta^{pl} &= \nu_r\sigma_y^{pl} + \nu_z\frac{E_r}{E_z}\sigma_z^{pl}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где константы q_i, p_i и γ_3 определены упругими параметрами материала; $\zeta_j = z/\gamma_j + iy$; γ_1 и γ_2 — комплексные корни характеристического уравнения [1]; функции $\varphi_j(\zeta_j)$ — аналитические по своим переменным.

Следует отметить, что в отличие от осесимметричной задачи, в неосесимметричной требуется учитывать возможную депланацию плоских вспомогательных состояний.

Переход от плоских вспомогательных состояний к пространственным осуществляется по зависимостям (3.1) и (3.2).

Определение упругого состояния анизотропного тела осуществляется средствами метода граничных состояний (МГС) [3]. В качестве базиса в пространстве внутренних состояний Ξ принимаются наборы:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}; \quad \xi_k = \left\{ u_i^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)} \right\}.$$

Базис пространства Ξ можно сконструировать, придавая функциям $\varphi_j(\zeta_j)$ в (3.3) поочередно следующие значения:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi_1(\zeta_1) \\ \varphi_2(\zeta_2) \\ \varphi_3(\zeta_3) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \zeta_1^m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_2^m \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta_3^m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\zeta_1^m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i\zeta_2^m \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i\zeta_3^m \end{pmatrix}, \dots \right\}, \\ m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Ортонормирование базиса пространства Ξ осуществляется по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [4], где в качестве перекрестных скалярных произведений принимаются (например, для 1-го и 2-го состояний):

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV.$$

После построения множества плоских вспомогательных состояний (3.3) по зависимостям (3.1) и (3.2) осуществляется переход к множеству пространственных неосесимметричных состояний, образуя тем самым пространство внутренних состояний Ξ .

Окончательно решение представляет собой ряд Фурье

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k; \\ u_i &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^k; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^k; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^k. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В случае первой основной задачи теории упругости коэффициенты Фурье представляют собой скалярные произведения

$$c_k = \int_S p_i u_i^{(k)} dS, \quad (3.5)$$

где $u_i^{(k)}$ — компоненты вектора перемещения в базисных элементах пространства Ξ , p_i — компоненты заданных сил.

4. Решение задачи

Рассмотрим круговой в плане цилиндр из алевролита крупного темно-серого [5]. По упругим свойствам эта горная порода является трансверсально-изотропной. Задача решается в безразмерном виде; упругие характеристики материала, а также область тела подлежат процедуре безразмеривания [6]. После процедуры безразмеривания параметров задачи, упругие характеристики материала: $E_z = 6,21$; $E_r = 5,68$; $G_r = 2,29$; $G_z = 2,55$; $\nu_z = 0,22$; $\nu_r = 0,24$; область цилиндра $V = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -1 \leq z \leq 1\}$.

Если ранее (в работах [7] и [8]) задавались функции, описывающие граничные условия более гладкого характера, вида $r^k z^m \cos[n\theta]$ или $r^k z^m \sin[n\theta]$, то в настоящей работе покажем способ построения упруго поля от действия внешних сил, приложенных к участкам границы более локально.

Рассмотрим нагрузку, приложенную к боковой поверхности цилиндра: $R = z^2 \sin^5[2\theta] \cos^4[4\theta]$, $Q = z^2 \cos^5[2\theta] \sin^4[4\theta]$, $Z = 0$ (рис. 2).

Разложим заданную функцию в ряд Фурье по синусам:

$$\begin{aligned} R = z^2 \left(\frac{21}{64} \sin[2\theta] - \frac{71}{256} \sin[6\theta] + \frac{51}{256} \sin[10\theta] - \frac{15}{128} \sin[14\theta] + \frac{7}{128} \sin[18\theta] - \right. \\ \left. - \frac{5}{256} \sin[22\theta] + \frac{1}{256} \sin[26\theta] \right). \end{aligned}$$

Решить задачу для такого рода распределения заданных поверхностных сил, построив только один базис внутренних состояний, невозможно. Здесь возникает необходимость в применении принципа независимости действия сил и в решении отдельной задачи теории упругости для каждого слагаемого. Окончательным результатом будет являться сумма решений семи задач.

В каждой задаче при построении базиса внутренних состояний будем пользоваться рекомендациями, описанными в работах [7] и [9]. Если заданная функция зависит только от синуса, то

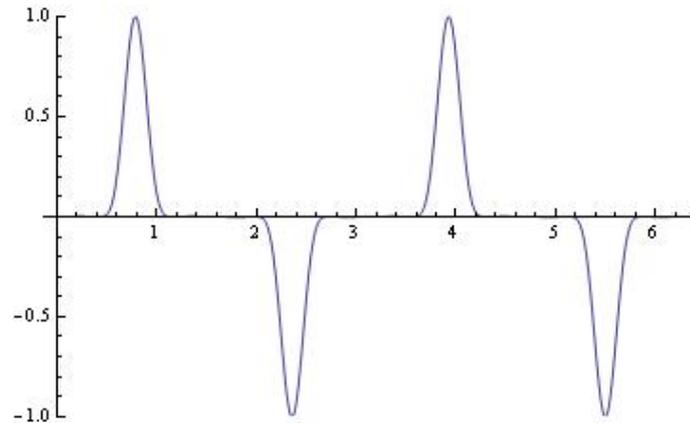


Рис. 2. Форма распределения заданных сил

Fig. 2. The form of distribution of the specified forces

Таблица 1. Ортонормированные компоненты вектора перемещения

Table 1. Orthonormal components of the displacement vector

	u	v	w
ξ_1	$0,0263 r^{25} \sin[26 \theta]$	$0,0263 r^{25} \cos[26 \theta]$	0
ξ_2	$-0,0456 r^{25} z \sin[26 \theta]$	$-0,0456 r^{25} z \cos[26 \theta]$	0
ξ_3	$-0,027 r^{25} \sin[26 \theta] -$ $-0,0018 r^{27} z \sin[26 \theta] +$ $+0,088 r^{25} z^2 \sin[26 \theta]$	$-0,027 r^{25} \cos[26 \theta] -$ $-0,0017 r^{27} z \cos[26 \theta] +$ $+0,088 r^{25} z^2 \cos[26 \theta]$	$0,0068 r^{26} z \sin[26 \theta]$

базис пространства внутренних состояний будем формировать из правых частей выражений (3.2):

$$u = \sum_{n=a}^b [u_n \sin(n\theta)]; \quad v = \sum_{n=a}^b [v_n \cos(n\theta)]; \quad w = \sum_{n=a}^b [w_n \sin(n\theta)]. \quad (4.1)$$

Причем, в каждой задаче в выражениях (4.1) $n = a = b = 4i - 2$, где i — номер задачи.

Покажем ход решения для задачи с $n = 26$. Заданная нагрузка для данной задачи $R = z^2 \sin[26 \theta]$, $Q = z^2 \cos[26 \theta]$, $Z = 0$.

После построения базиса внутренних состояний по соотношениям (3.2), проводится ортонормирование его элементов, которое включает в себя исключение линейно зависимых элементов. Компоненты вектора перемещения ортонормированного базиса представлены в табл. 1 (показано 3 элемента).

Для решения задачи потребовался базис внутренних состояний из 5 элементов. Коэффициенты Фурье (3.5) $c_1 = 0,1104$; $c_2 = 0$; $c_3 = 0,0987$; $c_4 = -0,00064$; $c_5 = -0,0002$. Решение формируется рядами (3.4).

Оценка точности осуществляется верификацией функций заданных усилий на границе с полученными в результате решения.

Полученные усилия на участке границы $S_1(r = 1; -1 \leq z \leq 1; 0 \leq \theta \leq 2\pi)$:

$$p_r = -0,00113 \sin[26 \theta] + z^2 \sin[26 \theta]; \quad p_\theta = -0,0004 \sin[26 \theta] + z^2 \cos[26 \theta];$$

$$p_z = 0,0398 z \sin[26 \theta].$$

Усилия на участке границы $S_2(z = -1; 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \theta \leq 2\pi)$:

$$p_r = 0,0398 r^{25} \sin[26 \theta]; \quad p_\theta = 0,0398 r^{25} \cos[26 \theta]; \quad p_z = 0,0007 r^{26} \sin[26 \theta].$$

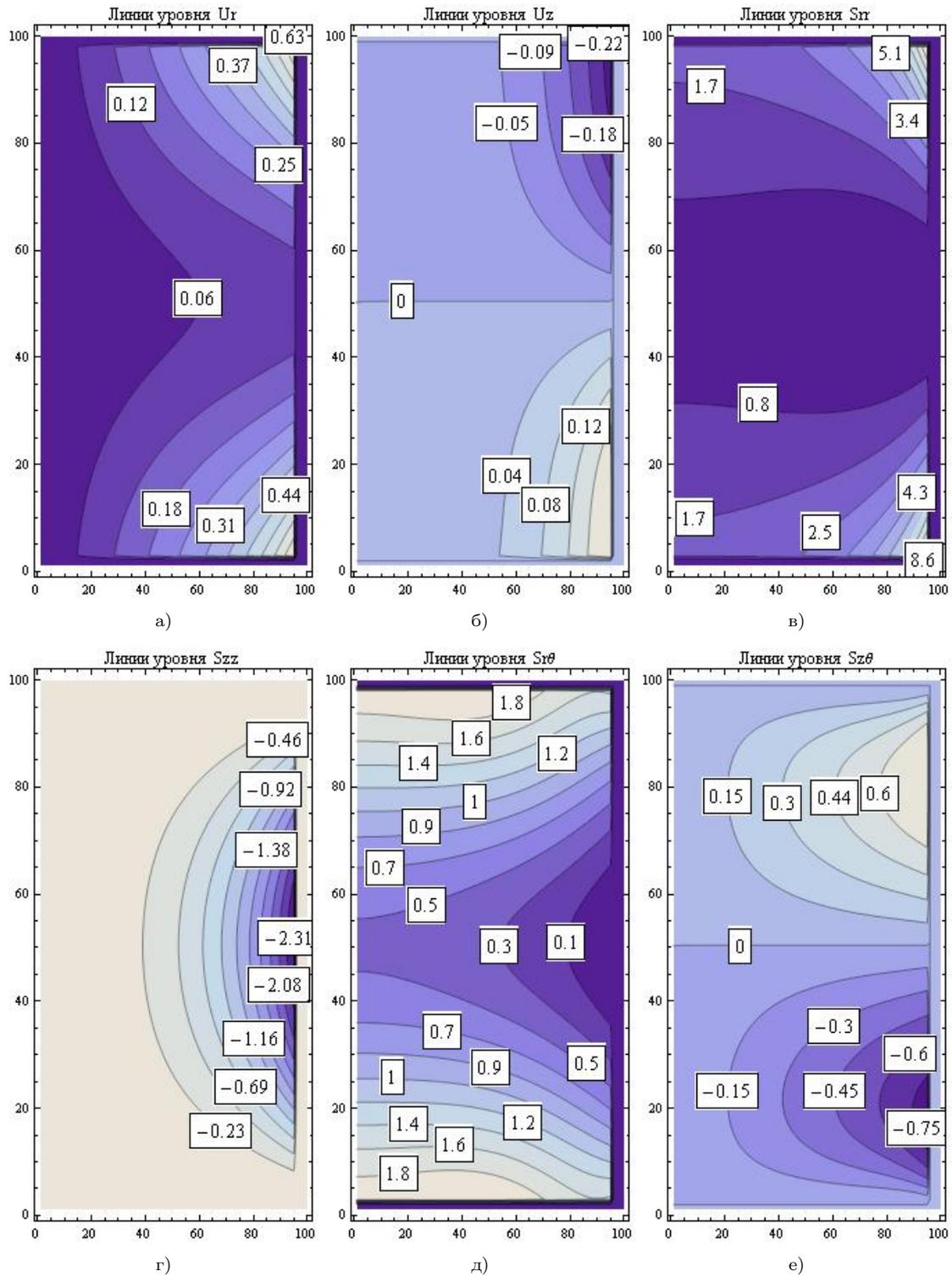


Рис. 3. Изолинии, а – перемещение u , $\theta = \pi/4$, б – перемещение w , $\theta = \pi/4$, в – напряжение σ_{rr} , $\theta = \pi/4$, г – напряжение σ_{zz} , $\theta = \pi/4$, д – напряжение $\tau_{r\theta}$, $\theta = 0$, е – напряжение $\tau_{z\theta}$, $\theta = 0$

Fig. 3. Isolines, а – displacement u , $\theta = \pi/4$, б – displacement w , $\theta = \pi/4$, в – stress σ_{rr} , $\theta = \pi/4$, г – stress σ_{zz} , $\theta = \pi/4$, д – stress $\tau_{r\theta}$, $\theta = 0$, е – stress $\tau_{z\theta}$, $\theta = 0$

Усилия на участке границы $S_3(z = 1; 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \theta \leq 2\pi)$:

$$p_r = 0,0398 r^{25} \sin[26 \theta]; \quad p_\theta = 0,0398 r^{25} \cos[26 \theta]; \quad p_z = -0,0007 r^{26} \sin[26 \theta].$$

Анализ полученного решения показал, что максимальная относительная погрешность составила 4 %. Точность решения задачи повышается при увеличении числа используемых элементов базиса внутренних состояний.

Окончательное решение задачи имеет громоздкий вид и в явном виде необозримо. На рис. 3 компоненты упругого поля показаны в виде изолиний.

В силу симметрии компонент напряженно-деформированного состояния (НДС), показано меридианное сечение тела с координатами $0 \leq z \leq 1$ и $-1 \leq z \leq 1$. Значения на графике указаны в масштабе с масштабным коэффициентом $\kappa = 0,1$, т.е. истинное значение показанной характеристики НДС равно значению на графике, умноженному на κ .

Полученные компоненты упругого поля строго удовлетворяют соотношениям теории упругости для трансверсально-изотропной среды [10].

Вывод

Таким образом, в работе показана математическая модель построения напряженно-деформированного состояния анизотропного тела, вызванного действием поверхностных сил, описанных сложной функцией. Компоненты упругого поля зависят от всех трех координат и носят неосесимметричный характер.

Предложенная методика, однако, не является общей для любого класса рассматриваемых областей (односвязных и многосвязных) и вида заданной функции, например $r^{-k} z^{-m} \sin[n\theta]$.

Полученное решение имеет аналитический вид, что позволяет легко проводить анализ полученных характеристик напряженно-деформированного состояния деталей, применяемых в машиностроении.

Литература [References]

1. Александров, А.Я., Соловьев, Ю.И., *Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного)*. Москва, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1978. [Aleksandrov, A.Ya., Solov'ev, Yu.I., *Spatial problems of the theory of elasticity (application of methods of the theory of functions of a complex variable)*, Moscow, Nauka, Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury, 1978. (in Russian)]
2. Лехницкий, С.Г., *Анизотропные пластинки*. Москва, ОГИЗ, 1947. [Lekhnitsky, S.G., *Anisotropic plates*. Moscow, OGIZ, 1947. (in Russian)]
3. Пеньков В.Б., Пеньков В.В., Метод граничных состояний для решения задач линейной механики. *Дальневосточный математический журнал*, 2001, т. 2, №2, с.115–137. [Penkov, V.B., Penkov, V.V., The boundary state method for solving linear mechanics problems. *Dal'nevostochny'j matematicheskij zhurnal*, 2001, vol. 2, no. 2, pp. 115–137. (in Russian)]
4. Саталкина, Л.В., Нарращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений. В *Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета*. Липецк, ЛГТУ, 2007, с. 130–131. [Satalkina, L.V., Building up the basis of the state space with hard constraints on the energy intensity of computations. In *Sbornik tezisov dokladov nauchnoj konferencii studentov i aspirantov Lipeckogo gosudarstvennogo texnicheskogo universiteta*. Lipeck, LGTU, 2007, pp. 130–131. (in Russian)]
5. Лехницкий, С.Г., *Теория упругости анизотропного тела*. Москва, Наука, 1977. [Lekhnitskij, S.G. *Theory of elasticity of anisotropic body*. Izd. 2, Moscow, Nauka, 1977. (in Russian)]
6. Левина, Л.В., Новикова, О.С., Пеньков, В.Б., Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела. *Вестник ЛГТУ*, 2016, № 2 (28), с. 16–24. [Levina, L.V., Novikova, O.S., Penkov, V.B., Full-parameter solution of the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body. *Vestnik LGTU*, 2016, no. 2 (28), pp. 16–24. (in Russian)]
7. Иваньчев, Д.А., Решение неосесимметричной задачи эластостатики для трансверсально-изотропного тела вращения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2022, № 2(101), с. 4–21. [Ivanychev, D.A., Solution of a non-axisymmetric elastostatic problem for

- a transversely isotropic body of revolution. *Bulletin of Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*. 2022, no. 2(101), pp. 4–21. (in Russian)] DOI: [10.18698/1812-3368-2022-2-4-21](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-2-4-21)
8. Иванычев, Д.А., Решение смешанной неосесимметричной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2022, № 2, с. 85–97. [Ivanychev, D.A., Solution of a mixed non-axisymmetric problem of elasticity theory for anisotropic bodies of revolution. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*. 2022, no. 2, pp. 85–97. (in Russian)] DOI: [10.15593/perm.mech/2022.2.08](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.2.08)
 9. Иванычев, Д.А., Левина, Е.Ю., Определение неосесимметричных упругих полей в анизотропных телах вращения, вызванных действием объемных сил. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2022, № 4(103), с. 22–38. [Ivanychev, D.A., Levina, L.V., Determination of non-axisymmetric elastic fields in anisotropic bodies of revolution caused by the action of volume forces. *Bulletin of Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*. 2022, no. 4(103), pp. 22–38. (in Russian)] DOI: [10.18698/1812-3368-2022-4-22-38](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-4-22-38)
 10. Лурье, А.И., *Пространственные задачи теории упругости*. Москва, Госиздат технико-теоретической литературы, 1955. [Lur'ye, A.I. *Spatial problems of the theory of elasticity*. Moscow, Gosizdat tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1955. (in Russian)]