

УДК 615.035.4

EDN: XMMPMG DOI: 10.31429/vestnik-21-4-38-44

Аналитическая тестовая задача течений с переменным по пространству ветровым воздействием

В. С. Кочергин  , С. В. Кочергин 

Морской гидрофизический институт РАН, ул. Капитанская 2, Севастополь, 299011, Россия

✉ Кочергин Владимир Сергеевич; ORCID 0000-0002-6767-1218; SPIN 9479-0245; e-mail: vskocher@gmail.com

Аннотация. В работе получено аналитическое решение для трехмерной модели ветровых течений при воздействии ветра сложной конфигурации. Наличие аналитических решений для баротропных компонент скорости, добавочных скоростей и вертикальной компоненты важны при тестировании и анализе разностных схем и алгоритмов в процессе построения гидродинамических моделей динамики водоемов.

Ключевые слова: безразмерная задача, ветровые течения, тестовая задача, аналитическое решение.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № FNNN-2024-0016 «Исследование пространственно-временной изменчивости океанологических процессов в береговой, прибрежной и шельфовых зонах Черного моря под воздействием природных и антропогенных факторов на основе контактных измерений и математического моделирования» (шифр «Прибрежные исследования»).


Цитирование: Кочергин В. С., Кочергин С. В. Аналитическая тестовая задача течений с переменным по пространству ветровым воздействием // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 4. С. 38–44. EDN: XMMPMG. DOI: 10.31429/vestnik-21-4-38-44

Поступила 18 ноября 2024 г. После доработки 3 декабря 2024 г. Принято 13 декабря 2024 г. Публикация 20 декабря 2024 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2024. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CCBY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Analytical Test Problem of Currents with Variable Spatial Wind Action

V. S. Kochergin , S. V. Kochergin

Marine Hydrophysical Institute, Kapitanskaya str., 2, Sevastopol, 299011, Russia

✉ Vladimir S. Kochergin; ORCID 0000-0002-6767-1218; e-mail: vskocher@gmail.com

Abstract. The paper considers an analytical solution for a three-dimensional model of wind currents under the influence of wind of complex configuration. The availability of analytical solutions for barotropic velocity components, additional velocities and vertical components is important when testing and analyzing difference schemes and algorithms in the process of constructing hydrodynamic models of reservoir dynamics. Numerical modeling of the dynamics of reservoirs is an important tool in solving urgent problems of environmental monitoring and climatic problems related to weather forecasting. The significant development of computer technology makes it possible to use an increase in the discretization of solved problems to increase the accuracy of describing the dynamic processes taking place in the ocean. However, the direction associated with the construction and correction of the models themselves, methods of their numerical implementation, is successfully developing, because when using available computer power and new computing circuits and algorithms together, it can lead to a significant joint effect. Solutions to the problem for determining barotropic, additional velocities (variables in space) and velocity components in the vertical direction have been found, comparison with which will allow testing various difference discretizations and computational algorithms in constructing dynamic models of reservoirs. The results can be used to solve various environmental problems in the waters of the Azov and Black Seas.

Keywords: dimensionless problem, wind currents, test problem, analytical solution.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment on the topic FNNN-2024-0016 “Study of spatiotemporal variability of oceanographic processes in the coastal, coastal and shelf zones of the Black Sea under the influence of natural and anthropogenic factors based on contact measurements and mathematical modeling” (code “Coastal Research”).

Cite as: Kochergin, V. S., Kochergin, S. V., Analytical test problem of currents with variable spatial wind action. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 4, pp. 38–44. DOI: 10.31429/vestnik-21-4-38-44

Received 18 November 2024. Revised 3 December 2024. Accepted 13 December 2024. Published 20 December 2024.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2024. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Численное моделирование динамики водоемов является важным инструментом при решении актуальных проблем экологического мониторинга и климатических задач, связанных с прогнозом погоды. Существенное развитие вычислительной техники позволяет использовать увеличение дискретизации решаемых задач для повышения точности описания происходящих динамических процессов в океане. Но направление, связанное с построением и корректировкой самих моделей, методов их численной реализации успешно развивается, т.к. при совместном использовании доступных компьютерных мощностей и новых вычислительных схем, и алгоритмов может привести к существенному совместному эффекту. При тестировании численных моделей динамики океана чаще всего происходит сравнение результатов, полученных по разным моделям, между собой, что часто имеет субъективный характер. Поэтому сравнение численного решения с точным аналитическим позволяет выбрать более корректную схему для численной реализации используемых моделей динамики океана, которые достаточно сложны. Аналитические решения для динамических моделей существуют только для самых простых постановок, например, модель Стоммела [1–4]. В [4] такая задача реализуется при помощи метода обращения динамического оператора для исследования применяемых вычислительных схем специального вида для вычисления полей скорости. В данной работе рассматривается более сложная задача, решение которой позволяет получить аналитическое решение для баротропной компоненты скорости, ее трехмерной добавочной части и вертикальной составляющей. В работе [5] такая задача решена при условии задания ветра в постановке Стоммела. В данной работе получены аналитические решения при задании достаточно общего ветрового воздействия.

1. Задача в безразмерном виде

Рассмотрим задачу ветровой циркуляции для рассматриваемого водоема, который в плоскости xOy имеет форму прямоугольника:

$$\Omega_0 = [0, r] \times [0, q],$$

а его глубина $H > 0$. Оси декартовой системы координат имеют следующие направления: $0x$ — на восток, $0y$ — на север, $0z$ — вертикально вниз. В трехмерной области $\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega_0, 0 \leq z \leq H\}$, рассмотрим систему уравнений движения в безразмерной [6] форме:

$$\begin{cases} -\ell v = -\frac{\partial P^s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \ell u = -\frac{\partial P^s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial v}{\partial z} \right), & t > 0, \quad (x, y, z) \in \overset{0}{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

с краевыми условиями

$$\left\{ z = 0, (x, y) \in \overset{0}{\Omega} \right\} : k \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, k \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y, w = 0; \quad (1.2)$$

$$\left\{ z = H, (x, y) \in \overset{0}{\Omega} \right\} : k \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x^b, k \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y^b, w = 0; \quad (1.3)$$

$$\{0 \leq z \leq H, (x, y) \in \partial\Omega_0\} : Un_x + Vn_y = 0. \quad (1.4)$$

В (1.4) интегральные скорости определены стандартным образом:

$$U(t, x, y) = \int_0^H u(t, x, y, z) dz, \quad V(t, x, y) = \int_0^H v(t, x, y, z) dz, \quad (1.5)$$

а в (1.3) используется вариант параметризации придонного трения

$$\tau_x^b = \mu U, \quad \tau_y^b = \mu V, \quad \mu \equiv \text{const} > 0. \quad (1.6)$$

Как и в модели Стоммела, пусть

$$\ell = \ell_0 + \beta y, \quad k \equiv \text{const}, \quad (1.7)$$

а компоненты касательного напряжения трения ветра будем задавать формулами

$$\begin{cases} \tau_x = [F_1 \cos(r_l x) + F_2 \sin(r_l x)] \cos(q_m y); \\ \tau_y = [G_1 \cos(r_s x) + G_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y), \end{cases} \quad (1.8)$$

в которых приняты обозначения

$$r_l = \frac{\pi l}{r}; \quad r_s = \frac{\pi s}{r}; \quad q_m = \frac{\pi m}{q}; \quad q_p = \frac{\pi p}{q},$$

$$l, s = 0, 1, 2, \dots; \quad m, p = 1, 2, \dots$$

Таким образом, модель ветра содержит ряд вещественных: F_1, F_2, G_1, G_2 и целых: l, m, s, p числовых параметров, выбор которых позволяет описывать достаточно общие ситуации ветрового форсинга.

Горизонтальные компоненты вектора скорости запишем в виде

$$u = U \cdot H^{-1} + \hat{u}, \quad v = V \cdot H^{-1} + \hat{v}, \quad (1.9)$$

где первые слагаемые называются баротропными, а вторые назовем добавочными компонентами скорости.

2. Аналитические решения. Баротропные составляющие

В системе уравнений (1.1)–(1.8) проинтегрируем оба уравнения по «z» от 0 до H с учетом краевых условий. В итоге получим задачу для интегральных скоростей:

$$\begin{cases} \mu U - \ell V = -H \frac{\partial P^s}{\partial x} + \tau_x; \\ \ell U + \mu V = -H \frac{\partial P^s}{\partial y} + \tau_y; \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \overset{0}{\Omega}; \\ U \cdot n_x + V \cdot n_y = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Из первых двух уравнений в (2.1) исключаем градиенты давления, используя перекрестное дифференцирование и вводя функцию тока $\Psi(x, y)$ по формулам

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

для отыскания функции тока получаем задачу:

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x}, & (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0; \\ \Psi = 0, & (x, y) \in \partial \Omega_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Решение уравнения (2.2) представим как сумму решений

$$\Psi(x, y) = \Psi_1(x, y) + \Psi_2(x, y),$$

удовлетворяющих следующим задачам:

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \tau_x}{\partial y}, & (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0; \\ \Psi_1 = 0, & (x, y) \in \partial \Omega_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_y}{\partial x}, & (x, y) \in \overset{0}{\Omega}_0; \\ \Psi_2 = 0, & (x, y) \in \partial \Omega_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Для решения каждой из задач (2.3), (2.4) найдем частные решения, а затем общее решение соответствующих однородных уравнений, суммируя их и удовлетворяя краевым условиям для этих задач, из-за произвола, содержащегося в общем решении однородного уравнения, в итоге имеем

$$\Psi_1(x, y) = [C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx} + D_1 \cos(r_1 x) + D_2 \sin(r_1 x)] \sin(q_m y),$$

$$\Psi_2(x, y) = [\bar{C}_1 e^{\bar{A}x} + \bar{C}_2 e^{\bar{B}x} + \bar{D}_1 \cos(r_s x) + \bar{D}_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y),$$

где

$$A = -\frac{\beta}{2\mu} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + q_m^2}; \quad B = -\frac{\beta}{2\mu} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + q_m^2},$$

$$D_1 = q_m \frac{\mu(r_l^2 + q_m^2)F_1 + \beta r_l F_2}{\mu(r_l^2 + q_m^2)^2 + \beta^2 r_l^2}, \quad D_2 = q_m \frac{\mu(r_l^2 + q_m^2)F_2 - \beta r_l F_1}{\mu(r_l^2 + q_m^2)^2 + \beta^2 r_l^2},$$

$$C_1 = D_1 \frac{e^{Br} - (-1)^l}{e^{Ar} - e^{Br}}, \quad C_2 = -D_1 \frac{(-1)^l - e^{Ar}}{e^{Ar} - e^{Br}},$$

$$\bar{A} = -\frac{\beta}{2\mu} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + q_p^2}; \quad \bar{B} = -\frac{\beta}{2\mu} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + q_p^2},$$

$$\bar{D}_1 = r_s \frac{\mu(r_s^2 + q_p^2)G_2 + \beta r_s G_1}{\mu^2(r_s^2 + q_p^2)^2 + \beta^2 r_s^2}, \quad \bar{D}_2 = r_s \frac{\mu(r_s^2 + q_p^2)G_1 + \beta r_s G_2}{\mu^2(r_s^2 + q_p^2)^2 + \beta^2 r_s^2},$$

$$\bar{C}_1 = \bar{D}_1 \frac{e^{\bar{B}r} - (-1)^s}{e^{\bar{A}r} - e^{\bar{B}r}}, \quad \bar{C}_2 = -\bar{D}_1 \frac{(-1)^s - e^{\bar{A}r}}{e^{\bar{A}r} - e^{\bar{B}r}}.$$

Окончательно интегральные скорости находим по формулам

$$U(x, y) = q_m [C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx} + D_1 \cos(r_1 x) + D_2 \sin(r_1 x)] \cos(q_m y) + \\ + q_p [\bar{C}_1 e^{\bar{A}x} + \bar{C}_2 e^{\bar{B}x} + \bar{D}_1 \cos(r_s x) + \bar{D}_2 \sin(r_s x)] \cos(q_p y),$$

$$V(x, y) = -[AC_1 e^{Ax} + BC_2 e^{Bx} + r_l D_1 \sin(r_1 x) + r_l D_2 \cos(r_1 x)] \sin(q_m y) - \\ - [\bar{A}\bar{C}_1 e^{\bar{A}x} + \bar{B}\bar{C}_2 e^{\bar{B}x} - r_s \bar{D}_1 \cos(r_s x) + r_s \bar{D}_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y).$$

3. Аналитическое решение. Добавочные составляющие

Подставим в первые два уравнения системы (2.1) горизонтальные компоненты вектора скорости, записанные в форме (1.9). Учитывая уравнения для интегральных скоростей

$$\begin{cases} -\ell V H^{-1} = -\frac{\partial P^s}{\partial x} + \frac{\tau_x - \tau_x^b}{H}; \\ \ell U H^{-1} = -\frac{\partial P^s}{\partial y} + \frac{\tau_y - \tau_y^b}{H}, \end{cases}$$

получаем задачу для добавочных составляющих горизонтальных скоростей:

$$\begin{cases} -\ell \hat{v} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} \right) + \frac{\tau_x^b - \tau_x}{H}; \\ \ell \hat{u} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right) + \frac{\tau_y^b - \tau_y}{H}, \end{cases} \quad (x, y) \in \Omega_0, \quad 0 < z < H, \quad (3.1)$$

$$\{z = 0, (x, y) \in \Omega_0\} : k \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} = -\tau_x, \quad k \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} = -\tau_y; \quad (3.2)$$

$$\{z = H, (x, y) \in \Omega_0\} : k \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} = -\tau_x^b, \quad k \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} = -\tau_y^b. \quad (3.3)$$

Запишем задачу (3.1)–(3.3) в комплексной форме и введем следующие функции:

$$\theta = \hat{u} + i\hat{v}, \quad \tau^b = \tau_x^b + i\tau_y^b = \mu(U + iV),$$

$$\tau = \tau_x + i\tau_y = [F_1 \cos(r_l x) + F_2 \sin(r_l x)] \cos(q_m y) + i [G_1 \cos(r_s x) + G_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y).$$

Тогда имеем

$$\begin{cases} i\ell\theta - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{\tau^b - \tau}{H}, \quad 0 < z < H; \\ z = 0 : k \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\tau; \\ z = H : k \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\tau^b. \end{cases} \quad (3.4)$$

Общее решение уравнения из (3.4) найдем как сумму частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Введем следующие функции

$$C(z) = \cos(H - z)\eta \operatorname{ch}(H + z)\eta - \cos(H + z)\eta \operatorname{ch}(H - z)\eta,$$

$$S(z) = \sin(H - z)\eta \operatorname{sh}(H + z)\eta - \sin(H + z)\eta \operatorname{sh}(H - z)\eta;$$

где $\eta = \sqrt{\frac{\ell}{2k}}$.

$$L(z) = \frac{C(z)}{C(H)} - \frac{z}{H}, \quad M(z) = \frac{S(z)}{C(H)},$$

$$Cs(z) = \cos(H - z)\eta \operatorname{sh}(H + z)\eta + \cos(H + z)\eta \operatorname{sh}(H - z)\eta,$$

$$Sc(z) = \sin(H - z)\eta \operatorname{ch}(H + z)\eta + \sin(H + z)\eta \operatorname{ch}(H - z)\eta.$$

С учетом краевых условий на поверхности и дне из (3.4) можно получить

$$\begin{aligned} \hat{u} = & \frac{\mu V - [G_1 \cos(r_s x) + G_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y)}{\ell H} + \\ & + \frac{\eta}{\ell C(H)} \{ ([G_1 \cos(r_s x) + G_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y) + [F_1 \cos(r_l x) + F_2 \sin(r_l x)] \cos(q_m y)) Cs(H - z) + \\ & + ([G_1 \cos(r_s x) + G_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y) - [F_1 \cos(r_l x) + F_2 \sin(r_l x)] \cos(q_m y)) Sc(H - z) - \\ & - \mu(U + V)Cs(z) + \mu(U - V)Sc(z) \}, \end{aligned}$$

$$\hat{v} = -\frac{[G_1 \cos(r_s x) + G_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y) - \mu V}{\ell H} +$$

$$+ \frac{\eta}{\ell C(H)} \{ ([G_1 \cos(r_s x) + G_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y) - [F_1 \cos(r_l x) + F_2 \sin(r_l x)] \cos(q_m y)) Cs(H - z) +$$

$$+ ([G_1 \cos(r_s x) + G_2 \sin(r_s x)] \sin(q_p y) + [F_1 \cos(r_l x) + F_2 \sin(r_l x)] \cos(q_m y)) Sc(H - z) +$$

$$+ \mu(U - V)Cs(z) - \mu(U + V)Sc(z) \}.$$

4. Аналитическое решение. Вертикальная компонента вектора скорости

Вертикальную компоненту « w » вектора скорости определяем из уравнения неразрывности, для этого проинтегрируем уравнение неразрывности по переменной z от 0 до z , учитывая краевое условие (1.3) и уравнение неразрывности для интегральных скоростей

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Можно получить

$$w(z) = D + C,$$

где

$$D = - (q_p [G_1 \cos(r_s x) + G_2 \sin(r_s x)] \cos(q_p y) - r_l [F_1 \cos(r_l x) + F_2 \sin(r_l x)] \cos(q_m y)) \frac{M(H - z)}{l} +$$

$$+ (\mu(q_m [AC_1 e^{Ax} + BC_2 e^{Bx} - r_l D_1 \sin(r_l x) + r_l D_2 \cos(r_l x)] \cos(q_m y)) \frac{M(z)}{l} +$$

$$+ (\mu(q_p [\overline{AC_1} e^{\overline{A}x} + \overline{BC_2} e^{\overline{B}x} - r_s \overline{D_1} \cos(r_s x) + r_s \overline{D_2} \sin(r_s x)] \cos(q_p y)) \frac{M(z)}{l} +$$

$$+ (r_s [G_1 \sin(r_s x) + G_2 \cos(r_s x)] \sin(q_p y) - q_m [F_1 \cos(r_l x) + F_2 \sin(r_l x)] \sin(q_m y)) \frac{L(H - z)}{l} -$$

$$- (\mu([A^2 C_1 e^{Ax} + B^2 C_2 e^{Bx} - r_l^2 D_1 \cos(r_l x) + r_l^2 D_2 \sin(r_l x)] \sin(q_m y)) \frac{L(z)}{l} +$$

$$+ (\mu([\overline{AC_1} e^{\overline{A}x} + \overline{BC_2} e^{\overline{B}x} - r_s^2 \overline{D_1} \cos(r_s x) + r_s^2 \overline{D_2} \sin(r_s x)] \sin(q_p y)) \frac{L(z)}{l}.$$

Для вычисления величины C , определим необходимые функции

$$P(z) = (H + z) [\cos(H - z) \eta \operatorname{sh}(H + z) \eta + \sin(H + z) \eta \operatorname{ch}(H - z) \eta],$$

$$Q(z) = (H + z) [\sin(H - z) \eta \operatorname{ch}(H + z) \eta - \cos(H + z) \eta \operatorname{sh}(H - z) \eta],$$

$$CY(z) = \frac{\beta}{4k\eta C(H)} [P(z) - P(-z)], \quad SY(z) = \frac{\beta}{4k\eta C(H)} [Q(z) - Q(-z)].$$

Тогда

$$C = \frac{[F_1 \cos(r_l x) + F_2 \sin(r_l x)] \cos(q_m y)}{\ell} \left\{ CY(H - z) - CY(H) \left[L(H - z) + \frac{H - z}{H} \right] \right\} -$$

$$- \frac{\mu U}{\ell} \left\{ CY(z) - CY(H) \left[L(z) + \frac{z}{H} \right] \right\} - \frac{\mu V}{\ell} [SY(z) - CY(H) M(z)].$$

Заключение

Построено аналитическое решение модели ветровой циркуляции со сложным ветровым воздействием для использования его в качестве тестового решения [7–9] при анализе схем [10, 11] и алгоритмов при построении динамических моделей водоемов. Найдены решения задачи для определения баротропных, дополнительных скоростей (переменных по пространству) и компоненты скорости в вертикальном направлении, сравнение с которыми позволит протестировать различные разностные дискретизации и вычислительные алгоритмы при построении динамических моделей водоемов.

Литература [References]

1. Stommel, H., The westward intensification of wind-driven ocean currents. *Trans. Amer. Geoph. Un.*, 1948, vol. 29, pp. 202–206.
2. Stommel H. *The Gulf Stream. A Physical and Dynamical Description*. University of California Press, 1958.
3. Стоммел, Г., *Гольфстрим*. Москва, ИЛ, 1965. [Stommel, G., *Gol'fstrim = Gulf Stream*. Moscow, Inostrannaya literatura, 1965. (in Russian)]
4. Еремеев, В.Н., Кочергин, В.П., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., *Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов*. Севастополь, «Экоси-гидрофизика», 2002. [Eremeev, V.N., Kochergin, V.P., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki glubokovodnykh basseynov = Mathematical modeling of hydrodynamics of deep-water basins*. Sevastopol, «Ekosi-gidrofizika», 2002. (in Russian)]
5. Кочергин, В.С., Кочергин, С. В., Скляр, С.Н., Аналитическая тестовая задача ветровых течений. *Процессы в геосредах*, № 2(20), 2019, с. 198–203. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical test problem of wind currents. *Protsessy v geosredakh = Processes in geoenvironments*, no. 2(20), 2019, pp. 198–203. (in Russian)]
6. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Переход к безразмерной задаче в модели ветровой циркуляции. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2019, т. 16, № 4, с. 25–30. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Transition to a dimensionless problem in the wind circulation model. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tse ntrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2019, vol. 16, no. 4, pp. 25–30. (in Russian)] DOI: [10.31429/vestnik-16-4-25-30](https://doi.org/10.31429/vestnik-16-4-25-30)
7. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., Аспекты численного решения нестационарной задачи ветрового движения жидкости. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2023, т. 20, № 1, с. 12–18. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Aspects of numerical solution of non-stationary problem of wind-induced fluid motion. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tse ntrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 1, pp. 12–18.] DOI: [10.31429/vestnik-20-1-12-18](https://doi.org/10.31429/vestnik-20-1-12-18)
8. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., Вычисление компонент полного потока в моделях ветрового движения жидкости. *Морской гидрофизический журнал*, 2023, т. 39, № 3, с. 299–313. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Calculation of the components of the total flow in models of wind-induced fluid motion. *Morskoy gidrofizicheskiy zhurnal = Marine Hydrophysical Journal*, 2023, vol. 39, no. 3, pp. 299–313.] EDN: RUBXPZ. DOI: [10.29039/0233-7584-2023-3-299-313](https://doi.org/10.29039/0233-7584-2023-3-299-313)
9. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., Тестирование разностных схем при решении уравнения для функции тока на основе решения задачи ветровых течений. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 2, с. 53–61. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Testing difference schemes in solving the equation for the stream function based on the solution of the wind current problem. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tse ntrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 2, pp. 53–61.] DOI: [10.31429/vestnik-19-2-53-61](https://doi.org/10.31429/vestnik-19-2-53-61)
10. Ильин, А.М., Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. *Математические заметки*, 1969, т. 6, вып. 2, с. 237–248. [Ilyin, A.M., Difference scheme for a differential equation with a small parameter at the highest derivative. *Matematicheskie zametki = Mathematical notes*, 1969, vol. 6, iss. 2, pp. 237–248. (in Russian)]
11. Самарский, А.А., *Теория разностных схем*. Москва, Наука, 1983. [Samarskii, A.A., *Theory of difference schemes*. Moscow, Nauka, 1983. (in Russian)]