УДК 539.3 EDN: ESLMXG DOI: 10.31429/vestnik-21-4-23-28

О контактной задаче в полосе

О. В. Евдокимова[1✉], **Д. А. Хрипков**[2], **В. В. Лозовой**[1], **А. В. Плужник**[1], **Е. М. Горшкова**[2], **Г. Н. Уафа**[1]

[1] Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, пр-кт Чехова, 41, Ростов-на-Дону, 344006, Россия
[2] Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия
✉ Евдокимова Ольга Владимировна; ORCID 0000-0003-1283-3870; SPIN 9756-7178; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru

Аннотация. В работе на основе выполненных ранее и опубликованных механико-математических исследований в теории двумерных интегральных уравнений выявляется зона повышенной сейсмической опасности территории, вблизи протяженной горной гряды. Известно, что среда горной территории имеет сложную анизотропную структуру. Механическое состояние протяженной горной среды в виде полосы описывается контактной задачей о действии штампа на анизотропное основание, каким являются литосферные плиты. Математически такие контактные задачи приводятся к решению двумерного интегрального уравнения Винера–Хопфа в области в виде полосы конечной ширины. Ранее такие контактные задачи исследовались только для изотропных оснований. В работе разработан метод, позволяющий исследовать решение контактной задачи в анизотропном случае для полосы разной ширины и выявить зоны повышенной сейсмичности.

Ключевые слова: контактная задача, анизотропная горная среда, интегральное уравнение, сейсмоопасная зона.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке ЮНЦ РАН (номер госрегистрации проекта 122020100341-0).

Цитирование: Евдокимова О. В., Хрипков Д. А., Лозовой В. В., Плужник А. В., Горшкова Е. М., Уафа Г. Н. О контактной задаче в полосе // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 4. С. 23–28. EDN: ESLMXG. DOI: 10.31429/vestnik-21-4-23-28

Поступила 1 ноября 2024 г. После доработки 29 ноября 2024 г. Принято 2 декабря 2024 г. Публикация 20 декабря 2024 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

On the Contact Problem in the Band

O. V. Evdokimova[1✉], **D. A. Khripkov**[2], **V. V. Lozovoy**[1], **A. V. Pluzhnik**[1], **E. M. Gorshkova**[2], **G. N. Uafa**[1]

[1] Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Prospekt Chekhova, 41, Rostov-on-Don, 344006, Russia
[2] Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia
✉ Olga V. Evdokimova; ORCID 0000-0003-1283-3870; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru

Abstract. Based on previously performed and published mechanical and mathematical studies in the theory of two-dimensional integral equations, a zone of increased seismic hazard of the territory near an extended mountain range is identified in the work. It is known that the environment of the mountainous territory has a complex anisotropic structure. The mechanical state of an extended rock medium in the form of a strip is described by the contact problem of the action of a stamp on an anisotropic base, such as lithospheric plates. Mathematically, such contact problems are reduced to solving the two-dimensional Wiener-Hopf integral equation in a region in the form of a strip of finite width. Previously, such contact problems were studied only for isotropic bases. A method has been developed that allows us to investigate the solution of the contact problem in the anisotropic case for bands of different widths and identify zones of increased seismicity.

Keywords: contact problem, anisotropic mountain environment, integral equation, seismic hazard zone.

Funding. The work was carried out with the financial support of the Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (state registration number of the project 122020100341-0).

Cite as: Evdokimova, O. V., Khripkov, D. A., Lozovoy, V. V., Pluzhnik, A. V., Gorshkova, E. M., Uafa, G. N., On the contact problem in the band. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 4, pp. 23–28. DOI: 10.31429/vestnik-21-4-23-28

Received 1 November 2024. Revised 29 November 2024. Accepted 2 December 2024. Published 20 December 2024.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

Введение

Теории анизотропных сред, описывающих композитные материалы, посвящено большое количество работ в связи с их важностью в различных областях инженерной практики [1–15]. Анизотропные структуры имеют природное и техногенное происхождение. Они встречаются как природные образования в коре Земли, а также в результате создания новых композитных материалов. Сложно охватить весь комплекс анизотропных структур. Некоторые анизотропные структуры изучены достаточно глубоко, что объясняется их широким применением в отраслях ответственного назначения. Это относится, в первую очередь, к кристаллам и полупроводниковым материалам, применяемым при создании элементной базы электроники. В большинстве своем для решения смешанных и контактных задач для таких материалов используются приближенные аналитические либо численные методы, не учитывающие концентраций контактных напряжений под штампами. Однако исследований по применению теории анизотропных сред в сейсмологии практически нет. В работе [16] впервые разработан строгий математический метод решения контактной задачи о действии полосового штампа на анизотропные основание. Контактная задача приведена к решению двумерного интегрального уравнения Винера–Хопфа в полосе с анизотропным символом интегрального уравнения. В настоящей работе развитый метод применяется для исследования и решения контактой задач для анизотропных материалов литосферных плит более сложной структуры. С помощью этого подхода выявляются зоны повышенной концентрации контактных напряжений, зависящие от анизотропных свойств среды.

1. Интегральное уравнение

Методом, описанным в [17], контактная задача о действии полосового жесткого штампа конечной ширины на анизотропную слоистую среду сводится к решению интегрального уравнения вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-a}^{a} k(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)q(\xi_1,\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 = f(x_1,x_2), \quad -a \leqslant x_1 \leqslant a, \quad |x_2| \leqslant \infty,$$
$$k(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(u_1,u_2)e^{-i(u_1x_1+u_2x_2)}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2, \tag{1.1}$$
$$K(u_1,u_2) > 0, \quad -\infty < u_1, u_2 < \infty.$$

Здесь $q(x_1,x_2)$ — контактные напряжения под штампом, $f(x_1,x_2)$ — перемещения в зоне контакта, $k(x_1,x_2)$ — ядро интегрального уравнения, функция $K(u_1,u_2)$ — преобразование Фурье ядра интегрального уравнения.

Считаем, что функция $K(u_1,u_2)$ является аналитической, зависящей от двух комплексных переменных, не обращающейся в ноль на вещественной оси по обоим параметрам. Двумерное интегральное уравнение (1.1) сводятся к одномерному с вещественным параметром u_2 в результате применения преобразования Фурье по координате x_2.

В результате интегральное уравнение (1.1) принимает вид

$$\int_{-a}^{a} k(x_1-\xi_1)q(\xi_1)\,\mathrm{d}\xi_1 = f(x_1), \quad q(\xi_1)=q(\xi_1,u_2), \quad k(x_1)=k(x_1,u_2),$$
$$k(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(u_1)e^{-iu_1x_1}\,\mathrm{d}u_1, \quad K(u_1)=K(u_1,u_2), \quad f(x_1)=f(x_1,u_2). \tag{1.2}$$

Ради краткости вещественный параметр u_2 временно опускается и возврат к нему будет осуществлен в конце статьи. Считаем, что непрерывная аналитическая функция $K(u_1)$ на бесконечности обладает асимптотическим поведением

$$K(u_1)=c_1u_1^{-1}+c_2\,|u|^{-1}+o(u_1^{-1}), \quad \operatorname{Im}u_1=0. \tag{1.3}$$

Таким свойством обладают ядра интегральных уравнений, построенные для статических смешанных задач на многослойной анизотропной среде.

Ниже используется развитый в [16] метод изучения и решения интегрального уравнения контактной задачи о действии полосового штампа на анизотропную слоистую среду. Для этого строится обобщенное решение интегрального уравнения.

2. Построение решения

Как и в предыдущем пункте, будем рассматривать интегральные уравнения (1.1) с ядром $K(u_1)$. Применим к ним метод блочного элемента, опирающийся на факторизационный подход [16]. Они приводятся к решению эквивалентной операторам интегральных уравнений (1.1) системы двух интегральных уравнений вида [16]. Их построение детально описано в [16, 18] и ниже не повторяется,

$$X(\zeta,\pm)=\mp\mathbf{M}(\zeta,a)X(u_1,\pm)+\alpha(\zeta,\pm),$$
$$\mathbf{M}(\zeta,a)X(u_1,\pm)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\frac{K_-(u_1)e^{-2aiu}}{K_+(u_1)(u_1+\zeta)}X_m(u_1,\pm)\,\mathrm{d}u_1,$$
$$\alpha(\zeta,\pm)=\pm\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\left[\frac{F_+(u_1)}{K_-(u_1)(u_1-\zeta)}\mp\frac{F_-(u_1)}{K_+(u_1)(u_1+\zeta)}\right]\mathrm{d}u_1,$$
$$[3mm]F_+(u_1)=\int_{-a}^{a} f(x)e^{iu_1(x+a)}\,\mathrm{d}x, \quad F_-(u_1)=\int_{-a}^{a} f(x)e^{iu_1(x-a)}\,\mathrm{d}x, \tag{2.1}$$
$$[3mm]\Phi_-(u_1)=\int_{-\infty}^{-a}\phi_-(x)e^{iu_1(x+a)}\,\mathrm{d}x, \quad \Phi_+(u_1)=\int_{a}^{\infty}\phi_+(x)e^{iu_1(x-a)}\,\mathrm{d}x,$$
$$[3mm]X(\zeta,\pm)=\left[\Phi_+(-\zeta)\pm\Phi_-(\zeta)\right]K_-^{-1}(\zeta).$$

Здесь $K_\pm(u_1)$ — результат факторизации функции $K(u_1)$ относительно вещественной оси [16, 18]. Непрерывный контур σ расположен в нижней комплексной полуплоскости, асимптотически уходит на бесконечность так, что содержит часть отрицательной мнимой полуоси, пересекая ее в одной точке. Главным его свойством является огибание сверху находящихся в нижней комплексной полуплоскости комплексных особенностей всех аналитических функций $K(u_1)$. Считаем, что контур расположен строго ниже вещественной оси, то есть $0>-c>\max\operatorname{Im}u_1$, $u_1\in\sigma$, $c>0$.

После обращения уравнений (2.1) представления решений интегральных уравнений (1.1) даются формулами [16, 18]

$$q(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{F(u_1)}{K(u_1)} - \frac{X_0^-(u_1)e^{-iau_1}}{K_+(u_1)} - \frac{X_2^+(u_1)e^{iau_1}}{K_-(u_1)}\right\}e^{-ixu_1}\,\mathrm{d}u_1,$$
$$2X_2^+(-u_1) = X(u_1,-) + X(u_1,+), \quad 2X_0^-(u_1) = X(u_1,-) - X(u_1,+). \tag{2.2}$$

В [18] доказано, что операторы $\mathbf{M}(\zeta, a)$ в правой части (2.1) на контуре σ являются вполне непрерывными в пространстве $C(\lambda)$, $0 \leqslant \lambda < 1$, вводимом нормой $\|f\| = \max\left|u_1^\lambda f(u_1)\right|$, $u_1 \in \sigma$.

Методами, детально описанными в [16, 19], осуществим факторизацию в виде произведения каждой функции $K(u)$.

Примем во внимание представление функций $K(u)$ в виде

$$K_\pm(u_1) = \exp\left(\pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln K(\xi)}{\xi - u_1}\,\mathrm{d}\xi\right), \quad u_1 \in \Pi_\pm. \tag{2.3}$$

Здесь Π_+, Π_- — верхняя и нижняя комплексные полуплоскости. Из (1.3) для факторизованных функций следует свойство

$$K_-(u_1) \to O(u^{-\nu_1}), \quad K_+(u_1) \to O(u_1^{-\nu_2}), \quad \nu_1 + \nu_2 = \nu + |\nu|, \quad c_1 = c_2, \quad |u_1| \to \infty, \quad u_1 \in \sigma.$$

Лемма [16, 18]. Оператор $\mathbf{M}(\zeta, a)$ является аналитической функцией параметра a, регулярной в области $\operatorname{Re} a > 0$. Существует такое $a_0 \geqslant 0$, что имеет место неравенство $\|\mathbf{M}(\zeta, a)\|_{C(\lambda)} < 1$, $\operatorname{Re} a > a_0$

3. Результат исследования

Используя подход, изложенный в [16], доказывается, что интегральное уравнение (1.1) имеет единственное решение для любых $0 < a < \infty$ и может быть построено методом Ньютона–Канторовича [19].

Анализируя свойства решения (2.2), можно выявить концентрацию контактных напряжений, которая возникает в случае анизотропной среды.

Принимая во внимание поведение функций

$$X_0^-(u_1) = O(u_1^{-1}), \quad X_2^+(-u_1) = O(u_1^{-1}),$$

и свойства функций $K_-(u_1)$, $K_+(u_1)$, после несложной оценки интеграла (2.2)

$$q(x) = O\left[(a - x)^{-\nu_1}\right], \quad x \to a, \qquad q(x) = O\left[(a + x)^{-\nu_2}\right], \quad x \to -a.$$

Таким образом, сейсмоопасными являются границы горной гряды при переходе в равнину. В зависимости от величины значений ν_m, $m = 1, 2$, будет более сейсмоопасной соответствующая сторона горной гряды.

Вывод

Исследование показало, что даже в статических условиях горная гряда имеет области повышенной сейсмичности, расположенные в зонах перехода горной гряды в равнинные участки.

Литература [References]

1. Лехницкий, С.Г., *Теория упругости анизотропного тела.* Москва, Наука, 1977. [Lekhnitsky, S.G., *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela = Theory of elasticity of an anisotropic body.* Moscow, Nauka, 1977. (in Russian)]
2. Кристенсен, Р., *Введение в механику композитов.* Москва, Мир, 1982. [Christensen, R., *Vvedenie v mekhaniku kompozitov = Introduction to Mechanics of Composites.* Moscow, Mir, 1982. (in Russian)]
3. Kushch, V.I., *Micromechanics of composites: multipole expansion approach.* Oxford, Waltham, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013.
4. McLaughlin, R., A study of the differential scheme for composite materials. *International Journal of Engineering Science*, 1977, vol. 15, pp. 237–244. DOI: 10.1016/0020-7225(77)90058-1
5. Garces, G. Bruno G., Wanner A., Load transfer in short fibre reinforced metal matrix composites. *Acta Materialia*, 2007, vol. 55, pp. 5389–5400. DOI: 10.1016/j.actamat.2007.06.003
6. Levandovskiy, A.N., Melnikov, B., Finite element modeling of porous material structure represented by a uniform cubic mesh. *Applied Mechanics and Materials*, 2015, vol. 725, pp. 928–936. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.725-726.928
7. Калинчук, В.В., Белянкова, Т.И., *Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел.* Москва, Физматлит, 2002. [Kalinchuk, V.V., Belyankova, T.I., *Dinamicheskie kontaktnye zadachi dlya predvaritel'no napryazhennykh tel = Dynamic contact problems for prestressed bodies.* Moscow, Fizmatlit, 2002. (in Russian)]
8. Бребия, К., Теллес, Ж., Вроубел, Л., *Методы граничных элементов.* Москва, Мир, 1987. [Brebia, K., Telles, J., Wroubel, L., *Metody granichnykh elementov = Boundary Element Methods.* Moscow, Mir, 1987. (in Russian)]
9. Горячева, И.Г., *Механика фрикционного взаимодействия.* Москва, Наука, 2001. [Goryacheva, I.G., *Mekhanika friktsionnogo vzaimodeystviya = Mechanics of frictional interaction.* Moscow, Nauka, 2001. (in Russian)]
10. Kolesnikov, V.I., Suvorova, T.V., Belyak, O.A., Modeling antifriction properties of composite based on dynamic contact problem for a heterogeneous foundation. *Materials Physics and Mechanics*, 2020, no. 3, pp. 17–27. DOI: 10.18720/MPM.4612020_14
11. Айзикович, С.М., Александров, В.М., Белоконь, А.В., Кренев, Л.И., Трубчик, И.С., *Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред.* Москва, Физматлит, 2006. [Aizikovich, S.M., Aleksandrov, V.M., Belokon, A.V., Krenev, L.I., Trubchik, I.S., *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodnykh sred = Contact Problems of Elasticity Theory for Inhomogeneous Media.* Moscow, Fizmatlit, 2006. (in Russian)]
12. Ватульян, А.О., Контактные задачи со сцеплением для анизотропного слоя. *ПММ*, 1977, т. 40, вып. 4, с. 727–734. [Vatulyan, A.O., Contact problems with adhesion for an anisotropic layer. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 1977, vol. 40, iss. 4, pp. 727–734. (in Russian)]
13. Баженов, В.Г., Игумнов, Л.А., *Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов.* Москва, Физматлит, 2008. [Bazhenov, V.G., Igumnov, L.A., *Metody granichnykh integral'nykh uravneniy i granichnykh elementov = Methods of Boundary Integral Equations and Boundary Elements.* Moscow, Fizmatlit, 2008. (in Russian)]
14. Гуз, А.Н., Томашевский, А.Т., Шульга, Н.А., Яковлев, В.С., *Технологические напряжения и деформации в композитных материалах.* Киев, Вища школа, 1988. [Guz, A.N., Tomashevsky, A.T., Shulga, N.A., Yakovlev, V.S., *Tekhnologicheskie napryazheniya i deformatsii v kompozitnykh materialakh = Technological Stresses and Deformations in Composite Materials.* Kyiv, Vishcha school, 1988. (in Russian)]
15. Акбаров, А.Н., Гузь, А.Н., Мовсумов, Э.А., Мустафаев, С.М., *Механика материалов с искривленными структурами.* Киев, Наукова Думка, 1995. [Akbarov, A.N., Guz, A.N., Movsumov, E.A., Mustafaev, S.M., *Mekhanika materialov s iskrivlennymi strukturami = Mechanics of Materials with Curved Structures.* Kyiv, Naukova Dumka, 1995. (in Russian)]
16. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Евдокимов, В.С., К теории контактных задач для композитных сред с анизотропной структурой. *ДАН*, 2024, т. 518, № 5, с. 24–31. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Evdokimov, V.S., On the theory of contact problems for composite media with anisotropic structure. *Doklady akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences of the Russian Federation*, 2024, v. 518, no. 5, pp. 24–31. (in Russian)]

17. Ворович, И.И., Александров, В.М., Бабешко, В.А., *Неклассические смешанные задачи теории упругости.* Москва, Наука, 1974. [Vorovich, I.I., Aleksandrov, V.M., Babeshko, V.A., *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti = Nonclassical Mixed Problems of Elasticity Theory.* Moscow, Nauka, 1974. (in Russian)]
18. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.* Москва, Наука, 1979. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical regions.* Moscow, Nauka, 1979. (in Russian)]
19. Канторович, Л.В., Акилов, Г.П., *Функциональный анализ.* Москва, Наука, 1977. [Kantorovich, L.V., Akilov, G.P., *Funktsional'nyy analiz = Functional Analysis.* Moscow, Nauka, 1977. (in Russian)]