



УДК 539.3

EDN: UMSRTT DOI: 10.31429/vestnik-22-1-50-61

## Моделирование напряженно-деформированного состояния в условиях краевой стационарной динамической задачи для анизотропного тела

Д. А. Иванычев  , Д. И. Балыкин, Д. В. Ездакова, Ю. А. Бордюгова

Липецкий государственный технический университет, ул. Интернациональная, 5, Липецк, 398600, Россия

✉ Иванычев Дмитрий Алексеевич; ORCID 0000-0002-7736-9311; SPIN 5839-4063; e-mail: [Lsivdml@mail.ru](mailto:Lsivdml@mail.ru)

**Аннотация.** В работе представлена математическая модель построения осесимметричного напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропного тела, ограниченного коаксиальными поверхностями вращения. Тело находится в условиях первой основной задачи теории упругости, т.е. под действием внешних сил, распределенных по поверхности тела и изменяющихся во времени по гармоническому закону. Модель строится на основе энергетического метода граничных состояний. Базис пространства внутренних состояний в составе метода граничных состояний формируется согласно общему представлению, выражающему пространственное напряженно-деформированное состояние через совокупность плоских вспомогательных состояний. В качестве таких состояний выступают решения задачи о плоской деформации. После формирования базисов внутренних и граничных состояний, проводится их ортогонализация с учетом назначенных скалярных произведений, и искомые характеристики напряженно-деформированного состояния раскладываются в ряд Фурье по элементам ортонормированного базиса, где в качестве коэффициентов выступают квадратуры. Приведено решение первой основной стационарно-динамической задачи теории упругости для кругового в плане цилиндра из трансверсально-изотропной горной породы. Поверхностные силы распределены по боковой поверхности цилиндра по закону синуса. Анализ сходимости решения и результат представлены в графическом виде.

**Ключевые слова:** стационарная динамическая задача, метод граничных состояний, трансверсально-изотропные тела, пространственная задача, осесимметричная задача, первая основная задача.

**Финансирование.** Исследование не имело спонсорской поддержки.

**Цитирование:** Иванычев Д. А., Балыкин Д. И., Ездакова Д. В., Бордюгова Ю. А. Моделирование напряженно-деформированного состояния в условиях краевой стационарной динамической задачи для анизотропного тела // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 1. С. 50–61. EDN: UMSRTT. DOI: 10.31429/vestnik-22-1-50-61

Поступила 13 января 2025 г. После доработки 20 февраля 2025 г. Принято 10 марта 2025 г. Публикация 27 марта 2025 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2025. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## Modeling of the Stress-Strain State under the Conditions of a Boundary Stationary Dynamic Problem for an Anisotropic Body

D. A. Ivanychev  , D. I. Balykin, D. V. Yezdakova, Yu. A. Bordyugova

Lipetsk State Technical University, Internationalnaya st., 5, Lipetsk, 398600, Russia

✉ Dmitry A. Ivanychev; ORCID 0000-0002-7736-9311; e-mail: [Lsivdml@mail.ru](mailto:Lsivdml@mail.ru)

**Abstract.** The paper presents a mathematical model for constructing an axisymmetric stress-strain state of a transversely isotropic body bounded by coaxial surfaces of revolution. The body is in the conditions of the first main problem of elasticity theory, i.e. under the action of external forces distributed over the surface of the body and changing in time according to a harmonic law. The model is constructed based on the energy method of boundary states. The basis of the space of internal states as part of the boundary state method is formed according to the general idea expressing the spatial stress-strain state through a set of plane auxiliary states. Such states are solutions to the problem of plane deformation. After forming the bases of internal and boundary states, they are orthogonalized taking into account the assigned scalar products, and the desired characteristics of the stress-strain state are expanded in a Fourier series by the elements of the orthonormal basis, where the coefficients are quadratures. The solution of the first

basic stationary-dynamic problem of elasticity theory for a circular cylinder made of transversely isotropic rock is given. Surface forces are distributed over the lateral surface of the cylinder according to the sine law. The analysis of the convergence of the solution and the result are presented in graphical form.

**Keywords:** stationary dynamic problem, boundary state method, transversely isotropic bodies, spatial problem, axisymmetric problem, first main problem.

**Funding.** The study did not have sponsorship.

**Cite as:** Ivanychev, D. A., Balykin, D. I., Yezdakova, D. V., Bordyugova, Yu. A., Modeling of the stress-strain state under the conditions of a boundary stationary dynamic problem for an anisotropic body. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 1, pp. 50–61. DOI: 10.31429/vestnik-22-1-50-61

Received 13 January 2025. Revised 20 February 2025. Accepted 10 March 2025. Published 27 March 2025. The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2025. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\) license](#).

## Введение

Циклические процессы в механике физических процессов встречаются довольно часто. Если возмущение распространяется с постоянной скоростью, то речь идет о динамических задачах стационарного типа. Учет инерционных составляющих в задаче по определению напряженно-деформированного состояния тела, находящегося под действием данных возмущений, усложняет ее решение, а если тело еще является и анизотропным, то важность иметь математическую модель построения упругих полей в стационарно-динамической задаче очевидна.

Решению задач динамики для изотропных и анизотропных сред посвящено множество работ. Например, в работе [1] исследуются краевые динамические задачи для трансверсально-изотропного упругого сферического слоя. С помощью вариационного принципа Гамильтона получены асимптотические разложения, позволяющие получить напряженно-деформированное состояний при различных значениях частоты возмущающей нагрузки. В работе [2] в рамках модели Тимошенко решена стационарно-динамическая задача для кольцеобразной плоской области. С помощью системы компьютерной алгебры определены частоты и формы собственных колебаний пластины при различных способах ее закрепления. В работе [3] с помощью численных преобразований получены граничные интегральные уравнения для решения различных краевых задач теории упругости для изотропных тел. В работе [4] рассмотрен вопрос применения трех упругих потенциалов для решения пространственных динамических задач для упругого полупространства. Интегральное преобразование Радона позволило перейти к плоской задаче теории упругости в образах. Рассмотрено применение этого решения для исследования волны Рэлея. Работа [5] посвящена построению квадратур для решения динамических задач теории упругости со смешанными граничными условиями для ограниченных тел из линейного однородного анизотропного материала. Вывод формул базировался на известных решениях первой и второй краевых задач.

Разнообразие методов решения задач динамики иллюстрируют следующие работы. В работе [6] обсуждалась возможность решения динамических задач теории упругости в конечно-элементных технологиях. В работе сравнивались три типа вариационных постановок: Принцип Гамильтона, принцип Лагранжа и принцип возможных перемещений. Полученные матричные уравнения описывают волновое движение конечно-элементной сетки и могут быть использованы при решении волновых задач по времени. В работе [7] представлена разностная схема численного решения плоских задач динамики для областей сложной формы. В работе [8] представлен численно-аналитический метод решения нестационарно-динамических контактных задач об ударе. Для решения двумерных интегральных уравнений использовался метод последовательных приближений. Для решения контактной задачи с переменным по времени контактом использовался метод ломаной. В работе [9] метод граничных интегральных уравнений применен к решению задач о движущейся нагрузке, приложенной к телам вращения. Рассмотрена плоская динамическая задача для сферической оболочки, нагруженной двумя

подвижными сосредоточенными силами. В работе [10] исследовалась динамическая контактная задача с двумя деформируемыми штампами, лежащих на деформируемом основании. Исследование опирается на метод блочного элемента, позволяющего строить точные решения граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

Целью настоящей работы является развитие энергетического метода граничных состояний на класс решения первой основной осесимметричной стационарно-динамической задачи теории упругости для трансверсально-изотропных тел вращения.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается упругое трансверсально-изотропное конечное и односвязное тело вращения с осью анизотропии, совпадающей с геометрической осью симметрии  $z$  (рис. 1). Требуется определить напряженно-деформированное состояние, возникающее в теле, по заданным на границе усилиям  $\mathbf{p} = \{p_r, p_z\}$ , которые зависят от координат и времени  $t$ . Тело занимает область  $V$ .

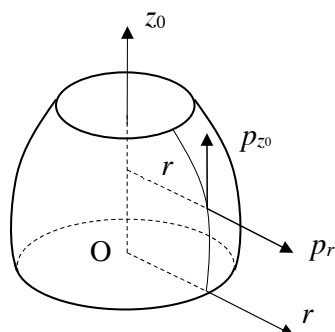


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения

*Fig. 1. Transversely isotropic solid of revolution*

Предполагается, что возмущения распространяются с постоянной скоростью  $c$  вдоль одной координаты  $z$ . Вводя подвижную координату  $z_0 = z - ct$ , можно исключить параметр  $t$  из определяющих уравнений и компоненты упругого поля будут зависеть только от двух переменных  $r$  и  $z_0$ .

## 2. Дифференциальные и интегральные соотношения для трансверсально-изотропной среды

В общем случае упругой осесимметричной деформации трансверсально-изотропного тела в условиях стационарно-динамической задачи имеют место следующие соотношения (в цилиндрической системе координат  $r, z_0$ ).

Дифференциальное уравнение равновесия при отсутствии объемных сил [11]:

$$\frac{\partial \tau_{z_0 r}}{\partial z_0} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{z_0 \theta}}{\partial z_0} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Соотношения Коши [11]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z_0}; & \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r}; \\ \gamma_{z_0 r} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z_0}; & \gamma_{r\theta} &= 0; & \gamma_{z_0 \theta} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения совместности деформаций [12]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} &= 0; \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial z_0} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial z_0} &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial z_0^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z_0 r}}{\partial z_0} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z_0^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{z_0}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{z_0 r}}{\partial r \partial z_0} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Обобщенный закон Гука [11]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} \left[ (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_{z_0}}{E_{z_0}} \sigma_{z_0} \right]; \\ \varepsilon_{z_0} &= \frac{1}{E_{z_0}} [\sigma_{z_0} - \nu_{z_0} (\sigma_r + \sigma_\theta)]; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_{z_0}}{E_{z_0}} \sigma_{z_0}; \\ \gamma_{z_0 r} &= \frac{1}{G_z} \tau_{z_0 r}; \quad \gamma_{z_0 \theta} = 0; \quad \gamma_{r \theta} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях [11]:

$$\begin{aligned} (A_{33} - \rho c^2) \frac{\partial^2 w}{\partial z_0^2} + A_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial^2 u}{\partial z_0 \partial r} &= 0; \\ (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial z_0 \partial r} + (A_{44} - \rho c^2) \frac{\partial^2 r}{\partial z_0^2} + A_{11} \frac{\partial^2 r}{\partial r^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь:  $u, w$  — компоненты вектора перемещения вдоль осей  $r, z_0$  соответственно;  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{z_0}, \gamma_{r\theta}, \gamma_{z_0 r}, \gamma_{z_0 \theta}$  — компоненты тензора деформаций;  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{z_0}, \tau_{r\theta}, \tau_{z_0 r}, \tau_{z_0 \theta}$  — компоненты тензора напряжений;  $E_{z_0}$  и  $E_r$  — модули упругости соответственно в направлении оси  $z_0$  и в плоскости изотропии;  $\nu_{z_0}$  — коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие вдоль оси  $r$  при растяжении вдоль оси  $z_0$ ;  $\nu_r$  — коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскости изотропии при растяжении в этой же плоскости;  $G_r$  и  $G_{z_0}$  — модули сдвига в плоскости изотропии и перпендикулярной к ней;  $A_{ij}$  — модули упругости анизотропной среды, которые вычисляются через «технические» упругие постоянные;  $\rho$  — плотность материала;  $c$  — скорость распространения волны.

### 3. Метод решения

В работе [11] методом интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженно-деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного тела вращения и некоторыми вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которого зависят от двух координат  $z_0$  и  $y$  (переменных). Ось  $\eta$  перпендикулярна плоскости  $z_0 y$ . В качестве плоских вспомогательных состояний используется плоская деформация  $\mathbf{u}^{pl} = \{u_y^{pl}, u_{z_0}^{pl}\}$ , возникающая в бесконечных цилиндрах, имеющих в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости  $zy$  (направление  $\eta$ ).

Переход к осесимметричному пространственному состоянию в цилиндрических координатах осуществляется по зависимостям:

$$\sigma_{z_0} = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_{z_0}^{pl}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_{z_0 r} = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_{z_0 y}^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_{z_0 \theta} = \sigma_{r \theta} = 0;$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} - \sigma_\eta^{pl})(2y^2 - r^2)}{r^2 \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \\
\sigma_r + \sigma_\theta &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} + \sigma_\eta^{pl})}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \\
u &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_y^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad w = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_{z_0}^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad v = 0.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Деформации можно вычислить через соотношения Коши (2.2).

Общее решение плоской стационарной динамической задачи как основа для перехода к пространственному состоянию имеет вид [11]

$$\begin{aligned}
u_{z_0}^{pl} &= \text{Re}[p_1^0 \phi_1(\varsigma_1) + p_2^0 \phi_2(\varsigma_2)]; \\
u_y^{pl} &= \text{Re}[iq_1^0 \phi_1(\varsigma_1) + iq_2^0 \phi_2(\varsigma_2)]; \\
p_j^0 &= p_j - g\gamma_j; \quad q_j^0 = q_j - g\gamma_j; \\
g &= \rho \Delta c^2 / (2G_r E_{z_0}); \quad \Delta = 1 - \nu_r - 2\nu_{z_0}^2 \frac{E_r}{E_{z_0}},
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где:  $q_j$  и  $p_j$  — комплексные константы (определены упругими параметрами материала),  $\varsigma_j = z_0/\gamma_j + iy$ ,  $\gamma_j$  — комплексные корни характеристического уравнения [11], функции  $\phi_j(\varsigma_j)$  — аналитические по своим переменным.

Тестирование коэффициентов Фурье осуществляется подстановкой одного из базисных элементов с соответствующими перемещениями точек границы тела в качестве заданного, при этом должны выполняться условия  $c_n = 1$ ,  $n$  — номер тестируемого элемента, остальные коэффициенты Фурье должны равняться нулю.

#### 4. Метод решения

Решение поставленной задачи строится средствами метода граничных состояний (МГС) [13]. В качестве базиса в пространстве внутренних состояний  $\Xi$  принимаются наборы:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}; \quad \xi_k = \{u_i^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}\}.$$

Пространство граничных состояний  $G$ :

$$G = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots\}; \quad \gamma_k = \{u_{iv}^{(k)}, p_i^{(k)}\},$$

где  $u_{iv}^{(k)}$  — перемещения точек границы тела;  $p_i^{(k)}$  — усилия на границе.

Основную сложность формирования решения в МГС представляет конструирование базиса внутренних состояний, который опирается на общее или фундаментальное решение для среды; также возможно использование каких-либо частных или специальных решений.

Для формирования множества плоских вспомогательных состояний последовательно функциям  $\phi_j(\varsigma_j)$  в (3.2) придаются значения

$$\begin{pmatrix} \phi_1(\varsigma_1) \\ \phi_2(\varsigma_2) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \varsigma_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \varsigma_2^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\varsigma_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i\varsigma_2^n \end{pmatrix}, \dots \right\}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Переход от множества плоских вспомогательных состояний к множеству пространственных состояний осуществляется по зависимостям (3.1) и (3.2), образуя тем самым конечномерный базис пространства внутренних состояний  $\Xi$ .

Пространство граничных состояний редуцируется из пространства внутренних состояний как предельный переход к границе тела, учитывая, что усилия на границе  $p_i = \sigma_{ij}n_i$ .

В случае гладкой границы оба пространства состояний являются гильбертовыми и сопряжены изоморфизмом. По определению каждому элементу  $\xi_k \in \Xi$  соответствует единственный элемент  $\gamma_k \in G$ , причем это соответствие взаимно-однозначное:  $\xi_k \leftrightarrow \gamma_k$ . Это позволяет отыскание внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния.

После построения базисов пространств состояний осуществляется их ортонормирование. Ортонормирование базиса пространства  $G$  производится по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [14], где в качестве перекрестных скалярных произведений принимаются

$$(\gamma^{(k)}, \gamma^{(l)}) = \int_S p_i^{(k)} p_i^{(l)} dS,$$

где  $S$  — поверхность тела.

Решение представляет собой ряд Фурье

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k.$$

В развернутом виде:

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^{(k)}; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^{(k)}. \quad (4.1)$$

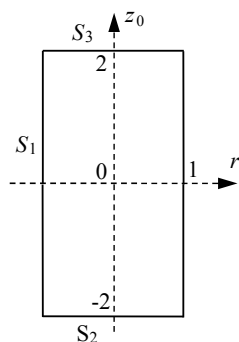
В случае первой основной задачи заданы усилия на границе тела  $p_{iv}$  и коэффициенты Фурье рассчитываются следующим образом:

$$c_k = \int_S p_{iv} p_i^{(k)} dS. \quad (4.2)$$

## 5. Решение задачи

Рассмотрим круговой в плане цилиндр из трансверсально-изотропной горной породы алевролита крупного темно-серого [15]. После процедуры обезразмеривания параметров задачи, аналогия которой представлена в работе [16], упругие характеристики материала составили:  $E_{z_0} = 6,21$ ;  $E_r = 5,68$ ;  $G_r = 2,29$ ;  $G_{z_0} = 2,55$ ;  $\nu_{z_0} = 0,22$ ;  $\nu_r = 0,24$  и цилиндр занимает область  $V = \{(r, z_0) \mid 0 \leq r \leq 1, -2 \leq z_0 \leq 2\}$ . Плотность  $\rho = 2,69$ , скорость  $c = 0,25$ .

Область цилиндра и граничные условия (ГУ) представлены на рис. 2.



$$p|_{S_1} = \left\{ \sin\left(\frac{\pi z_0}{2}\right), 0 \right\}, \quad S_1|_{r=1, -2 \leq z_0 \leq 2};$$

$$p|_{S_2} = \{0, 0\}, \quad S_2|_{z_0 = -2, 0 \leq r \leq 1};$$

$$p|_{S_3} = \{0, 0\}, \quad S_3|_{z_0 = 2, 0 \leq r \leq 1}$$

Рис. 2. Граничные условия к задаче для цилиндра

Fig. 2. Boundary conditions for the problem for a cylinder

С практической точки зрения интерес составляют возмущения, являющиеся гармоническими во времени. Пусть на боковой поверхности цилиндра в осевом направлении заданы усилия по такой функции, изменяющейся от координаты  $z_0$ , чтобы после подстановки  $z_0 = z - ct$ , усилия изменялись по циклическому закону, а не устремлялись в бесконечность.

Если проводить решение задачи, используя граничные условия непосредственно в заданной форме, то полученное решение будет удовлетворять граничным условиям (с определенной погрешностью) лишь на области с  $-2 \leq z_0 \leq 2$ . После обратной параметризации при фиксированной координате  $-2 \leq z \leq 2$  и увеличении времени будет наблюдаться односторонние осцилляции компонент упругого поля, что не будет соответствовать поставленной задаче в гармонической форме.

Здесь необходимо представить функцию  $p = \sin\left(\frac{\pi z_0}{2}\right)$  в виде степенного ряда

$$p = \frac{\pi z_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^{(n-1)} \pi^{(2n-1)} z_0^{(2n-1)}}{(2n-1)! 4^n}. \quad (5.1)$$

Предположим, что нужно обеспечить сходимость рядов на конечном интервале времени  $0 \leq t \leq 20$ , при этом гарантированно не будет осцилляций, если удерживать 15 первых членов ряда, то есть последний член ряда имеет переменную  $z_0^{29}$ .

Если использовать полный ряд (5.1) в качестве граничных условий, то восстановить упругое поле в рамках одной задачи, удовлетворяющее на границе заданным усилиям на принятом интервале времени, не представляется возможным. В данном случае возникает необходимость в использовании принципа независимости действия сил и, как следствие, в решении 15 отдельных краевых задач.

На боковой поверхности цилиндра при  $n = 1$  ГУ:  $p_r = z_0/2$  и  $p_{z_0} = 0$ . В этой и последующих задачах граничные условия на торцовых поверхностях (границы  $S_2$  и  $S_3$ ) остаются без изменений. Т.к. максимальная амплитуда заданной нагрузки равна единице, то с целью обеспечения единого порядка вычислений в каждой задаче на боковой поверхности будем задавать функцию вида  $p_r = z_0^{(2n-1)}/2^{(2n-1)}$ . Знаки и добавочные коэффициенты при членах ряда (5.1) будут учитываться в окончательном решении.

После построения базиса внутренних состояний по соотношениям (3.2) и (3.1), его ортонормирования, исключения линейно зависимых элементов, базисные функции компонент вектора перемещения представлены в табл. 1 (показано 6 элементов).

Для решения первой задачи потребовалось всего 4 элемента базиса. Коэффициенты Фурье (4.2):  $c_1 = c_2 = 0$ ;  $c_3 = 0,51345$ ;  $c_4 = -1,03425$ .

Приближенное решение определяется рядами (4.1) и имеет вид

$$u = 0,06694 r z_0; \quad w = -0,033934 r^2 - 0,017816 z_0^2.$$

Максимальная погрешность задачи составила 0,51 %.

Граничные условия ко второй задаче ( $n = 2$ ) имеют вид  $p_r = z_0^3/8$  и  $p_{z_0} = 0$ .

Таблица 1. Перемещения ортонормированного базиса

Table 1. Displacements of an orthonormal basis

$N$	$u$	$w$
$\xi_1$	$0,0726r$	$-0,1378z_0$
$\xi_2$	$-0,02138r$	$-0,09948z_0$
$\xi_3$	$0,0399r z_0$	$0,01784r^2 - 0,0389z_0^2$
$\xi_4$	$-0,04493r z_0$	$0,04167r^2 - 0,0021z_0^2$
$\xi_5$	$r(-0,0588 - 0,0086r^2 + 0,0339z_0^2)$	$z_0(0,2197 + 0,0328r^2 - 0,0227r z_0^2)$
$\xi_6$	$r(0,0625 - 0,0082r^2 - 0,0466z_0^2)$	$z_0(0,0124 + 0,0737r^2 - 0,0017z_0^2)$



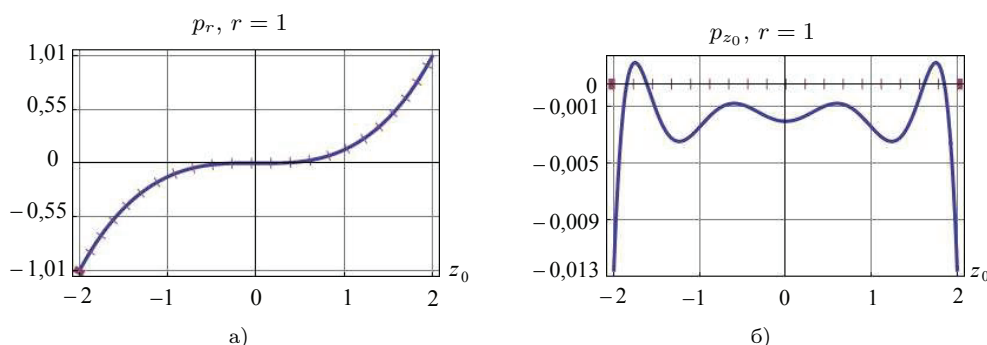


Рис. 3. Верификация граничных условий при 20 используемых элементах базиса

Fig. 3. Verification of boundary conditions with 20 basis elements used

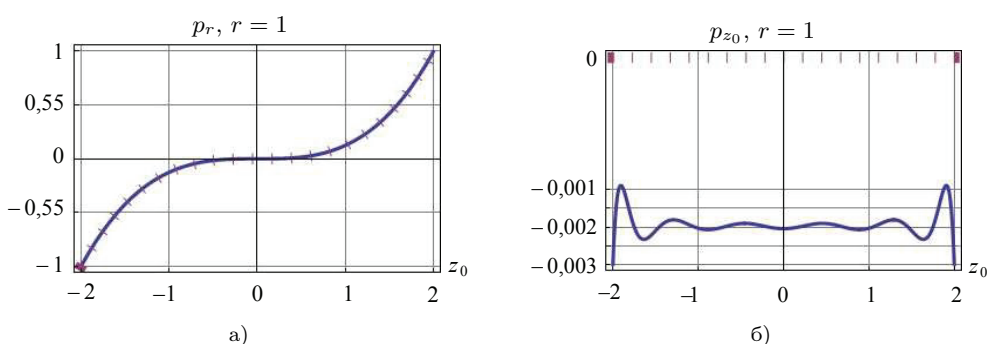


Рис. 4. Верификация граничных условий при 40 используемых элементах базиса

Fig. 4. Verification of boundary conditions with 40 basis elements used

Для решения задачи потребовался базис внутренних состояний из 40 элементов. Оценку сходимости решения проведем путем сопоставления заданных ГУ с полученными в ходе решения. Штриховая линия — заданные граничные условия, сплошная — полученные в результате решения. На рис. 3 показаны граничные условия на боковой поверхности цилиндра при использовании 20 членов ряда, а на рис. 4 — при 40.

Далее покажем решение задачи для последнего члена ряда (5.1). ГУ имеют вид:  $p_r = z_0^{29}/2^{29}$  и  $p_{z_0} = 0$ . Для решения данной задачи уже потребовался базис из 66 элементов. Рис. 5 представляет собой «насыщение» суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя). Это является косвенным признаком сходимости решения.

На рис. 6 представлена верификация граничных условий на одной торцевой и боковой поверхностях.

Максимальная погрешность составила 2,2 %. С увеличением числа используемых элементов базиса погрешность уменьшается.

Окончательное решение, представляет собой сумму решений всех задач, умноженных на соответствующие коэффициенты, согласно (5.1). На рис. 7 показана верификация граничных условий окончательного решения на боковой поверхности цилиндра.

Благодаря тому, что ряд (5.1) является знакоперевающим, погрешности от каждой задачи не суммируются.

Изолинии компонент полученного напряженно-деформированного состояния имеют полиномиальный вид и представлены в виде изолиний (в явном виде необозримы) на рис. 8. В силу осевой симметрии компонент упругого поля относительно оси вращения показано меридианное сечение с  $0 \leq r \leq 1$  и  $-2 \leq z_0 \leq 2$ . На рис. 8 ж сплошной линией показан контур деформированного состояния, штриховой — недеформированного. В силу малости упругих деформаций контур показан в гипертрофированном виде.



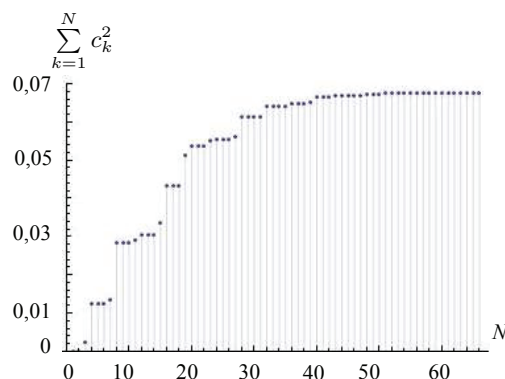
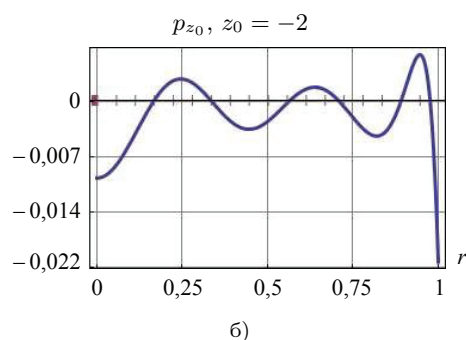
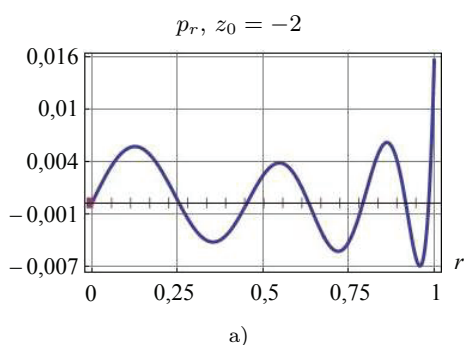


Рис. 5. Сумма Бесселя

Fig. 5. Bessel sum

Граница  $S_2$



Граница  $S_1$

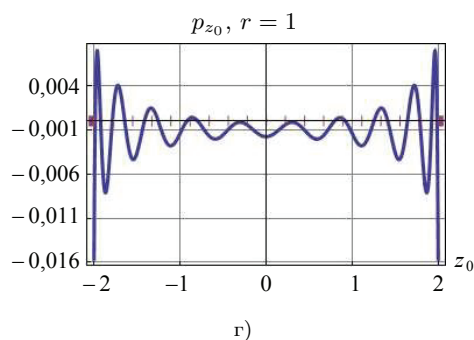
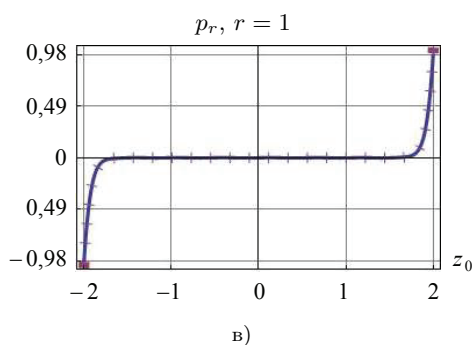


Рис. 6. Верификация граничных условий в пятнадцатой задаче

Fig. 6. Verification of boundary conditions in the fifteenth problem

Все полученные компоненты упругого поля строго удовлетворяют уравнениям (2.1)–(2.5).

Таким образом, в работе сформулирован метод решения стационарной динамической задачи теории упругости для трансверсально-изотропного тела вращения, когда возмущения распространяются с постоянной скоростью. В условиях второй основной задачи на границу тела наложены кинематические условия, изменяющиеся в течение времени по гармоническому закону.

Однако предложенная методика не является общей для любого класса рассматриваемых областей (односвязных и многосвязных) и вида заданной функции, описывающей кинематические условия на поверхности тела. Решение является аналитическим и имеет полиноми-

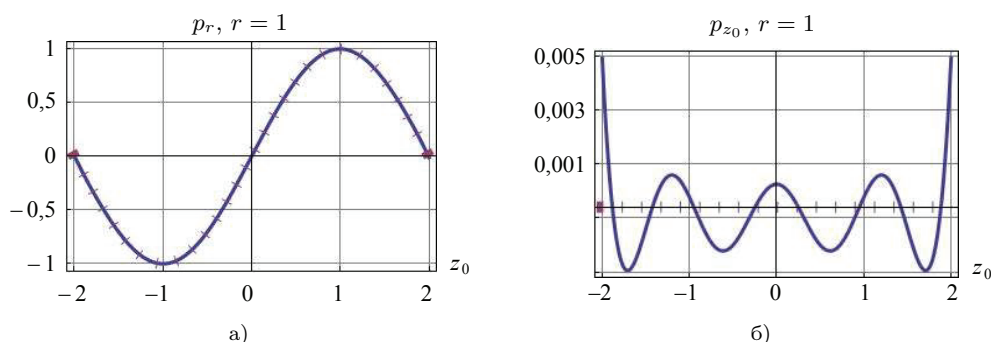


Рис. 7. Верификация граничных условий в окончательном решении

Fig. 7. Verification of boundary conditions in the final solution

альный вид, что позволяет легко проводить анализ полученных характеристик напряженно-деформированного состояния.

В перспективе можно обозначить развитие метода граничных состояний на класс несимметричных стационарно-динамических задач для анизотропных тел. Методика решения стационарных неосесимметричных краевых задач теории упругости показана в работах [17, 18].

## Литература [References]

1. Мехтиев, М.Ф., Ахмедов, Н.К., Юсубова, С.М., Асимптотическое поведение решения осесимметричной динамической задачи теории упругости для трансверсально-изотропного сферического слоя малой толщины. *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*, 2020, № 2(206), с. 61–71. [Mekhtiev, M.F., Akhmedov, N.K., Yusubova, S.M., Asymptotic behavior of the solution of an axisymmetric dynamic problem of elasticity theory for a transversely isotropic spherical layer of small thickness. *News of universities. North Caucasian region. Series: Natural sciences*. 2020, no. 2(206), pp. 61–71 (in Russian)] DOI: [10.18522/1026-2237-2020-2-61-71](https://doi.org/10.18522/1026-2237-2020-2-61-71)
2. Фридман, Л.И., Моргачев, К.С., Решение стационарной динамической задачи для кольцевой пластины в рамках модели Тимошенко. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки*. 2005, № 34, с. 68–71. [Friedman, L.I., Morgachev, K.S., Solution of a stationary dynamic problem for an annular plate within the framework of the Timoshenko model. *Vestn. Sam. state tech. univ. Series: Phys.-math. sciences*. 2005, no. 34, pp. 68–71 (in Russian)]
3. Низомов, Д.Н., Ходжибоев, О.А., Ходжибоев, А.А., Граничные уравнения динамической задачи теории упругости. *ДАНРТ*. 2014, том. 57, № 11–12, с. 850–855. [Nizomov, D.N., Khodzhiboev, O.A., Khodzhiboev, A.A., Boundary equations of the dynamic problem of elasticity theory. *DAN RT*. 2014, vol. 57, no. 11–12, pp. 850–855 (in Russian)]
4. Приказчиков, Д.А., Коваленко, Е.В., Выбор потенциалов в трехмерных задачах динамической теории упругости. *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2012, № 2(2), с. 131–137. [Prikazchikov, D.A., Kovalenko, E.V., Choice of potentials in three-dimensional problems of dynamic elasticity theory. *Engineering journal: science and innovation*. 2012, no. 2(2), pp. 131–137 (in Russian)]
5. Ермоленко, Г.Ю., Решение динамической задачи анизотропной теории упругости со смешанными краевыми условиями. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки*. 2003, № 19, с. 19–21. [Ermoolenko, G.Yu., Solution of a dynamic problem of anisotropic elasticity theory with mixed boundary conditions. *Vestn. Sam. state tech. univ. Series: Phys.-math. sciences*. 2003, no. 19, pp. 19–21 (in Russian)]
6. Терпугов, В.Н., О возможности построения конечно-элементных алгоритмов для динамических задач теории упругости. *Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2007, № 7, с. 140–144. [Terpugov, V.N., On the Possibility of Constructing Finite Element Algorithms for Dynamic Problems of Elasticity Theory. *Bulletin of Perm University. Series: Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 2007, no. 7, pp. 140–144 (in Russian)]
7. Немчинов, В.В., Двухслойная разностная схема численного решения плоских динамических задач теории упругости. *Вестник МГСУ*. 2012, № 8, с. 104–111. [Nemchinov, V.V., Two-layer difference

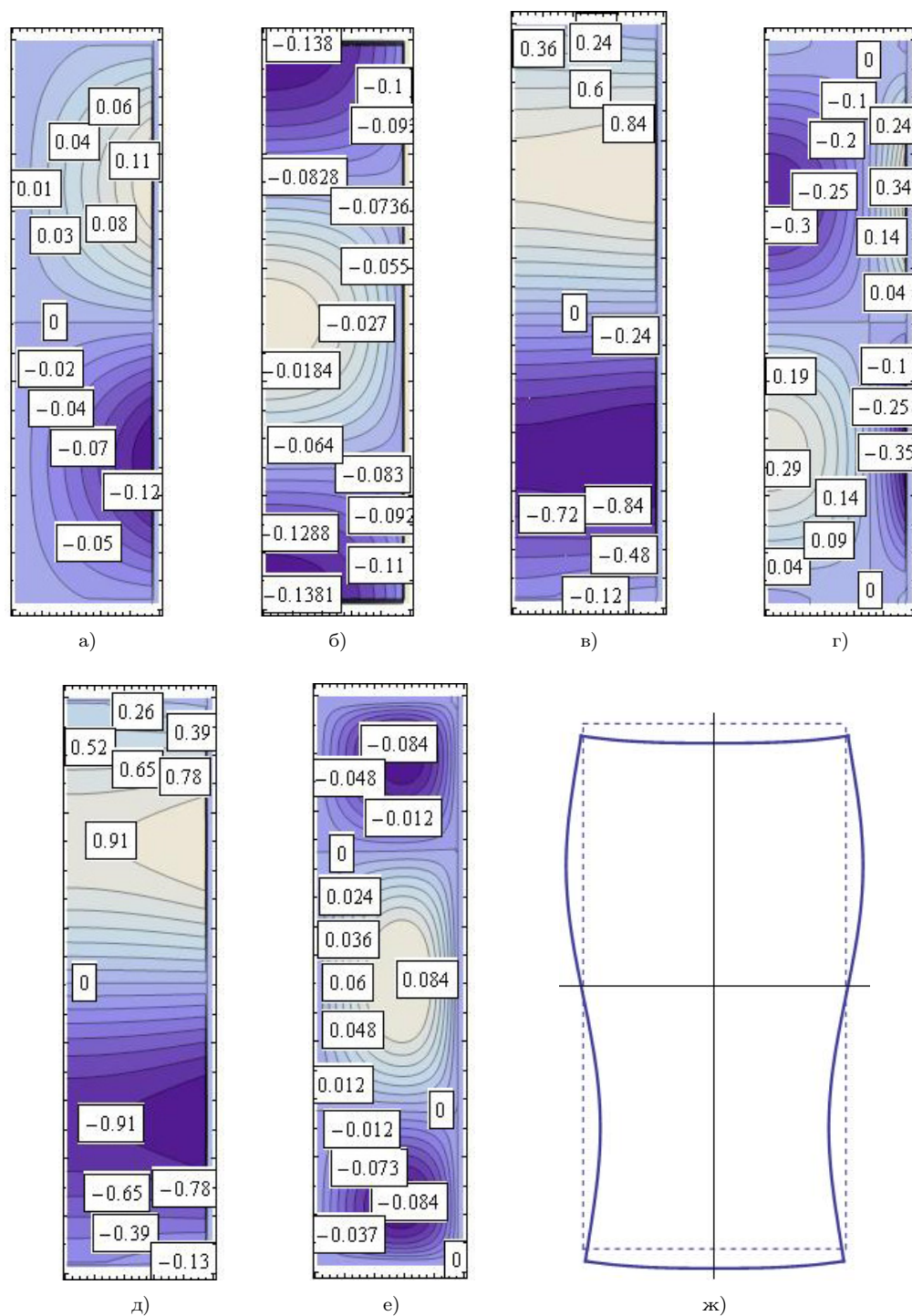


Рис. 8. Изолинии, а — перемещение  $u$ , б — перемещение  $w$ , в — напряжение  $\sigma_{rr}$ , г — напряжение  $\sigma_{zz}$ , д — напряжение  $\sigma_{\theta\theta}$ , е — напряжение  $\sigma_{zr}$ , жс — контур деформированного состояния

Fig. 8. Isolines, а — displacement  $u$ , б — displacement  $w$ , в — stress  $\sigma_{rr}$ , г — stress  $\sigma_{zz}$ , д — stress  $\sigma_{\theta\theta}$ , е — stress  $\sigma_{zr}$ , жс — contour of the deformed state

- scheme for numerical solution of plane dynamic problems of elasticity theory. *Bulletin of MGSU*. 2012, no. 8, pp. 104–111 (in Russian)]
8. Зеленцов, В.Б., Об одном методе решения нестационарных динамических контактных задач теории упругости об ударе. *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*. 2010, № 6, с. 35–40. [Zelentsov, V.B., On one method of solving non-stationary dynamic contact problems of elasticity theory on impact. *News of universities. North Caucasian region. Natural sciences*. 2010, no. 6, pp. 35–40 (in Russian)]
9. Галабурдин, А.В., Применение метода граничных интегральных уравнений к решению задач о движущейся нагрузке. *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*. 2015, № 1(185), с. 9–11. [Galaburdin, A.V., Application of the method of boundary integral equations to solving problems of moving load. *News of universities. North Caucasian region. Series: Natural sciences*. 2015, no. 1(185), pp. 9–11 (in Russian)]
10. Бабешко, В.А., и др., О динамической контактной задаче с двумя деформируемыми штампами. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2024, т. 24, вып. 1, с. 4–13. [Babeshko, V.A., et al., On a dynamic contact problem with two deformable stamps. *Bulletin of Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Computer science*. 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 4–13 (in Russian)] DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-1-4-13](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-4-13)
11. Александров, А.Я., Соловьев, Ю.И., *Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного)*. Москва, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1978. [Aleksandrov, A.Ya., Solov'ev, Yu.I., *Spatial problems of the theory of elasticity (application of methods of the theory of functions of a complex variable)*, Moscow, Nauka Publ, Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury, 1978 (in Russian)]
12. Лурье, А.И., *Пространственные задачи теории упругости*. Москва: Госиздат технико-теоретической литературы, 1955. [Lur'ye, A.I., *Spatial problems of the theory of elasticity*. Moscow, Gosizdat tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1955 (in Russian)]
13. Пеньков, В.Б., Пеньков, В.В., Метод граничных состояний для решения задач линейной механики. *Дальневосточный математический журнал*, 2001, т. 2, № 2, с.115–137. [Penkov, V.B., Penkov, V.V., The boundary state method for solving linear mechanics problems. *Dal'nevostochny' jmatematicheskij zhurnal*, 2001, vol .2, no. 2, pp. 115 –137 (in Russian)]
14. Саталкина, Л.В., Нарращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоёмкости вычислений. *Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета*. Липецк, ЛГТУ. 2007, с. 130–131. [Satalkina, L.V., Building up the basis of the state space with hard constraints on the energy intensity of computations. *Sbornik tezisov dokladov nauchnoj konferencii studentov i aspirant Lipeckzogo gosudarstvennogo teznicheskogo universiteta*. Lipeczk, LGTU, 2007, pp 130-131 (in Russian)]
15. Лехницкий, С.Г., *Теория упругости анизотропного тела*. Москва, Наука, 1977. [Lexniczkiy, S.G., *Theory of elasticity of anisotropic body*. Moscow, Nauka, 1977. (in Russian)]
16. Левина, Л.В., Новикова, О.С., Пеньков, В.Б., Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела. *Вестник ЛГТУ*, 2016, № 2 (28), с. 16–24. [Levina, L.V., Novikova, O.S., Penkov, V.B., Full-parameter solution of the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body. *Vestnik LGTU*, 2016, no. 2 (28), pp. 16–24. (in Russian)]
17. Ивanyчев, Д.А., Решение неосесимметричной задачи эластостатики для трансверсально-изотропного тела вращения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2022, № 2(101), с. 4–21. [Ivanychev, D.A., Solution of a non-axisymmetric elastostatic problem for a transversely isotropic body of revolution. *Bulletin of Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*. 2022, no. 2(101), pp. 4–21. (in Russian)] DOI: [10.18698/1812-3368-2022-2-4-21](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-2-4-21)
18. Ивanyчев, Д.А., Решение смешанной неосесимметричной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2022, № 2, с. 85–97. [Ivanychev, D.A., Solution of a mixed axisymmetric problem of elasticity theory for anisotropic bodies of revolution. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*. 2022, no. 2, pp. 85–97 (in Russian)] DOI: [10.15593/perm.mech/2022.2.08](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.2.08)