

УДК 539.3

EDN: SBZKQJ DOI: 10.31429/vestnik-22-1-29-49

## Нестационарный изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластины (усложненные модели)

Нгок Да<sup>1</sup>, Д. В. Тарлаковский<sup>1,2</sup>✉

<sup>1</sup> Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

<sup>2</sup> НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

✉ Тарлаковский Дмитрий Валентинович; ORCID 0000-0002-9556-7442; SPIN 1028-7474; e-mail: [tdvhome@mail.ru](mailto:tdvhome@mail.ru)

**Аннотация.** Исследуется задача о нестационарном изгибе прямоугольной упругой пластины под воздействием сосредоточенной силы. Используются две модели: одна основывается на гипотезах Кирхгофа–Лява, другая не принимает во внимание сжатие нормальных волокон материала. Начальные условия считаются равными нулю. На границах пластины предполагается наличие обобщенного шарнирного опищения. Решение задачи представлено в форме двойных тригонометрических рядов, зависящих от пространственных координат. Для коэффициентов этих рядов сформулирована начальная задача, сводящаяся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Система решается методом преобразования Лапласа по времени, а оригиналы определяются с использованием метода вычетов. В качестве примера рассмотрено воздействие нормальной силы, которая изменяется по закону Хевисайда и приложена к центру квадратной пластины. Пластина выполнена из композитного материала, содержащего алюминиевую дробь в эпоксидной матрице. Проведены численные расчеты, при этом суммирование тригонометрических рядов осуществляется с заданной точностью в рамках непрерывной нормы.

**Ключевые слова:** моментная упругая пластина, гипотеза Кирхгофа–Лява, уравнения движения, физические соотношения, прогиб, угол поворота, внутренние силовые факторы, двойной тригонометрический ряд.

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 25-11-00040).

**Цитирование:** До Нгок Да, Тарлаковский Д. В. Нестационарный изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластины (усложненные модели) // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 1. С. 29–49. EDN: SBZKQJ. DOI: 10.31429/vestnik-22-1-29-49

Поступила 27 января 2025 г. После доработки 23 февраля 2025 г. Принято 3 марта 2025 г. Публикация 27 марта 2025 г.

Вклад каждого соавтора в процесс написания статьи на разных этапах ее создания: идея работы (Тарлаковский Д.В.), расчет и построение графиков (Тарлаковский Д.В., До Нгок Да), написание статьи (Май Куок Чиен.), внесение правок и утверждение окончательного варианта (Тарлаковский Д.В.). Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2025. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## Bending of a Finite Moment Elastic Rod under the Effect of an Unsteady Load

Ngoc Dat Do, D. V. Tarlakovskii

<sup>1</sup> Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

<sup>2</sup> Research Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

**Abstract.** The problem of non-stationary bending of a rectangular elastic plate under the action of a concentrated force is studied. Two models are used: one is based on the Kirchhoff–Love hypotheses, while the other neglects the compression of the material's normal fibers. The initial conditions are assumed to be zero. Generalized hinged support is considered along the plate boundaries. The solution to the problem is expressed in the form of double trigonometric series depending on spatial coordinates. An initial problem is formulated for the coefficients of these series, reducing it to a system of ordinary differential equations. The system is solved using the Laplace transform method with the originals determined by the residue method. As an example, the effect of a normal force, varying according to the Heaviside function and applied at the center of a square plate, is considered. The plate is made of a composite material consisting of aluminum

shot in an epoxy matrix. Numerical calculations were performed, with the summation of the trigonometric series carried out to a specified accuracy in the continuous norm.

**Keywords:** moment elastic plate, Kirchhoff-Love hypothesis, equations of motion, physical relations, deflection, angle of rotation, internal force factors, double trigonometric series.

**Funding.** The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project No. 25-11-00040).

*Cite as:* Do, Ngoc Dat, Tarlakovskii, D. V., Bending of a finite moment elastic rod under the effect of an unsteady load. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 1, pp. 29–49. DOI: 10.31429/vestnik-22-1-29-49

Received 27 January 2025. Revised 23 February 2025. Accepted 3 March 2025. Published 27 March 2025.

The contribution of each co-author to the process of writing the article at different stages of its creation: idea of the work (Tarlakovskii D.V.), calculation and construction of graphs (Tarlakovskii D.V., Do Ngoc Dat), writing the article (Do Ngoc Dat), making edits and approving the final version (Tarlakovskii D.V.). The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2025. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) license.

## Введение

В последние годы заметно возрос интерес к изучению неклассических моментных сред, которые моделируются с учетом независимого угла поворота. Наиболее часто для описания таких сред используется теория Коссера [1–3]. В рамках данного подхода основное внимание уделено статическим задачам, особенно в применении к пластинам.

Количество работ, посвященных исследованию нестационарных процессов в тонкостенных элементах конструкций, остается небольшим. Это связано с высокой сложностью подобных задач. В частности, в статье [4] с помощью функционала Гамильтона сформулированы начально-краевые задачи для произвольных моментных упругих оболочек. В работе [5–8] представлены уравнения движения для сферических оболочек, построенные на основе данной теории. Для их решения использовались подходы, аналогичные тем, что применялись при анализе классических оболочек в публикациях [9–11].

Некоторые нестационарные задачи, относящиеся к моментным упругим пластинам, рассмотрены в исследованиях [12–14]. В последних двух работах тезисно изложены основные аспекты, которые далее развиваются в данной области. В рамках решения таких задач используются две разные модели. Первая опирается на гипотезы Кирхгофа–Лява. Вторая модель не учитывает сжатие нормальных волокон материала, что снижает размерности задачи.

### 1. Постановка задачи (модель, учитывающая гипотезу Кирхгофа–Лява)

Уравнения движения в прямоугольной декартовой системе координат  $Ox_1x_2z$  ( $z = 0$  – срединная плоскость) – безразмерный вид

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b\}.$$

Уравнения движения моментной упругой пластины толщиной  $h$  и физические соотношения имеют следующий вид [2, 15]:

$$\begin{aligned} \ddot{w} &= -r^2 \Delta \Delta w + 4\alpha \left( \Delta w + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) + p, \\ \ddot{\omega}_1 &= \gamma_2^{-2} \Delta \omega_1 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_1} + \gamma_3^{-2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} - 4\alpha v \left( \omega_1 - \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \tilde{m}_{M1}, \\ \ddot{\omega}_2 &= \gamma_2^{-2} \Delta \omega_2 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_2} + \gamma_3^{-2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} - 4\alpha v \left( \omega_2 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \tilde{m}_{M2}, \\ \ddot{\varphi}_3 &= \gamma_2^{-2} \Delta \varphi_3 - r^{-2} (\gamma_3^{-2} \theta_\omega + \gamma_0^{-2} \varphi_3) - 4\alpha v \varphi_3 + \tilde{m}_{2M}; \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right), \quad M_{22} = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right), \\
 M_{12} &= -2\left(\gamma_1^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\alpha \varphi_3\right), \quad M_{21} = -2\left(\gamma_1^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\alpha \varphi_3\right), \\
 T_{13} &= -T_{31} = 2\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \omega_2\right), \quad T_{23} = -T_{32} = 2\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \omega_1\right), \\
 R_{11} &= \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \eta_2 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \varphi_3\right), \quad R_{22} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \eta_2 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \varphi_3\right), \\
 R_{12} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, \quad R_{21} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \eta \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, \\
 S_{13} &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, \quad S_{23} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}, \quad N_\omega = \eta_2 \theta_\omega + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_3,
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

где  $w$  — прогиб;  $\varphi_3$  — угол отклонения вектора угла вращения от нормального волокна;  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  — координаты вектора свободного вращения;  $\theta_\omega = \partial \omega_1 / \partial x_1 + \partial \omega_2 / \partial x_2$ ;  $p$ ,  $\tilde{m}_{M1}$ ,  $\tilde{m}_{M2}$  — внешние нагрузки.  $M_{ij}$  и  $T_{ij}$  — моменты и усилия от тензора напряжений,  $R_{ij}$ ,  $N_\omega$  и  $S_{ij}$  — моменты и усилия от тензора моментных напряжений.

В этих формулах и далее использованы следующие безразмерные величины (при одинаковом начертании величин они обозначены штрихом, который в (1.1), (1.2) и последующем изложении опущен):

$$\begin{aligned}
 x'_i &= \frac{x_i}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \\
 w' &= \frac{w}{L}, \quad r' = \frac{r}{L}, \quad p' = \frac{pL}{h(\lambda + 2\mu)}, \\
 r^2 &= \frac{I}{h}, \quad I = \frac{h^3}{12}, \quad \tilde{m}'_{Mi} = \frac{\tilde{m}_{Mi} L^2}{h}, \\
 T'_{kl} &= \frac{T_{kl}}{h(\lambda + 2\mu)}, \quad M'_{kl} = \frac{M_{kl} L}{I(\lambda + 2\mu)}, \quad R'_{kl} = \frac{R_{kl} L}{h(\gamma + \varepsilon)}, \\
 N'_\omega &= \frac{N_\omega L}{h(\gamma + \varepsilon)}, \quad \gamma_0^2 = \frac{c_1^2}{c_4^2}, \quad \gamma_1^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \quad \gamma_2^2 = \frac{c_1^2}{c_3^2}, \\
 c_1 &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{J}}, \quad c_4 = \sqrt{\frac{\beta + 2\gamma}{J}}, \\
 \alpha' &= \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}, \quad \eta = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, \quad \eta_1 = \frac{\gamma}{\gamma + \varepsilon}, \quad \eta_2 = \frac{\beta}{\gamma + \varepsilon}, \\
 v &= \frac{\rho L^2}{J}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - \frac{2}{\gamma_1^2}.
 \end{aligned}$$

На границах пластины принимаем условия обобщенного шарнирного опирания

$$\begin{aligned}
 w|_{x_1=0,a} &= w|_{x_2=0,b} = 0, \quad M_{11}|_{x_1=0,a} = 0, \quad M_{22}|_{x_2=0,b} = 0, \\
 R_{12}|_{x_1=0,a} &= 0, \quad R_{21}|_{x_2=0,b} = 0, \quad S_{13}|_{x_1=0,a} = 0, \quad S_{23}|_{x_2=0,b} = 0.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Начальные условия полагаем нулевыми:

$$w|_{\tau=0} = \dot{w}|_{\tau=0} = \omega_1|_{\tau=0} = \dot{\omega}_1|_{\tau=0} = \omega_2|_{\tau=0} = \dot{\omega}_2|_{\tau=0} = 0. \tag{1.4}$$

Искомые функции представляем в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned}
 w &= \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \quad a_m = \frac{\pi m}{a}, \quad b_n = \frac{\pi n}{b}, \\
 \omega_1 &= \omega_{10} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \omega_{1mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \quad \omega_{10} = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{1m0}(\tau) \sin a_m x_1, \\
 \omega_2 &= \omega_{20} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \omega_{2mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \quad \omega_{20} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{20n}(\tau) \sin b_n x_2, \\
 \varphi_3 &= \varphi_{300} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{3m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{30n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \varphi_{3mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь  $\{\sin a_m x_1 \sin b_n x_2\}$  — собственные функции краевой задачи

$$\Delta w = \lambda w, \quad w|_{x_1=0,a} = w|_{x_2=0,b} = 0. \tag{1.6}$$

Отсюда следуют ряды для функций в (1.2):

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{11mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \quad M_{22} = \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{22mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \\
 M_{12} &= M_{21} = \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{12mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
 T_{13} &= -T_{31} = \sum_{n=1}^{\infty} T_{13n0}(\tau) \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{13mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \\
 T_{23} &= -T_{32} = \sum_{m=1}^{\infty} T_{23m0}(\tau) \sin a_m x_1 T_{230} + \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{23mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2; \\
 M_{12} &= M_{1200} + \sum_{m=1}^{\infty} M_{12m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} M_{120n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{12mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
 M_{21} &= M_{2100} + \sum_{m=1}^{\infty} M_{21m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} M_{210n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{21mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
 R_{11} &= R_{1100} + \sum_{m=1}^{\infty} R_{11m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} R_{110n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} R_{11mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
 R_{22} &= R_{2200} + \sum_{n=1}^{\infty} R_{220n} \cos b_n x_2 + \sum_{m=1}^{\infty} R_{220n} \cos a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} R_{22mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
 N_{\omega} &= N_{\omega00} + \sum_{m=1}^{\infty} N_{\omega m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} N_{\omega 0n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} N_{\omega mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
 S_{13} &= \sum_{m=1}^{\infty} S_{13m0} \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} S_{13mn} \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
 S_{23} &= \sum_{n=1}^{\infty} S_{230n} \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} S_{23mn} \cos a_m x_1 \sin b_n x_2.
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь с учетом полноты систем тригонометрических функций имеют место равенства:

$-m, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
 M_{11mn} &= (a_m^2 + \kappa b_n^2) w_{mn}, & M_{22mn} &= (\kappa a_m^2 + b_n^2) w_{mn}, \\
 M_{12mn} &= -2\gamma_1^{-2} a_m b_n - 4\alpha \varphi_{3mn}, & M_{21mn} &= -2\gamma_1^{-2} a_m b_n + 4\alpha \varphi_{3mn}, \\
 T_{13mn} &= 2\alpha (a_m w_{mn} + \omega_{2mn}), & T_{23mn} &= 2\alpha (b_n w_{mn} - \omega_{1mn}), \\
 \theta_{\omega mn} &= a_m \omega_{1mn} + b_n \omega_{2mn}, & N_{\omega mn} &= \eta_2 (a_m \omega_{1mn} + b_n \omega_{2mn}), \\
 R_{11mn} &= \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 a_m \omega_{1mn} + \eta_2 b_n \omega_{2mn} + \eta_2 \varphi_{3mn}, \\
 R_{22mn} &= \eta_2 a_m \omega_{1mn} + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 b_n \omega_{2mn} + \eta_2 \varphi_{3mn}, \\
 R_{12mn} &= -a_m \omega_{2mn} - \eta b_n \omega_{1mn}, & R_{21mn} &= -b_n \omega_{1mn} - \eta a_m \omega_{2mn}, \\
 S_{13mn} &= -a_m \varphi_{3mn}, & S_{23mn} &= -b_n \varphi_{3mn}, & N_{\omega mn} &= \eta_2 (a_m \omega_{1mn} + b_n \omega_{2mn}) + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_{3mn};
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

$-m \geq 1, n = 0$

$$\begin{aligned}
 M_{210m} &= -M_{120m} 4\alpha \varphi_{30m}, & R_{11m0} &= R_{22m0} = \eta_2 \varphi_{3m0}, \\
 T_{23m0} &= -2\alpha \omega_{1m0}, & S_{13m0} &= -a_m \varphi_{3m0};
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

$-m = 0, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
 M_{210n} &= -M_{120n} = 4\alpha \varphi_{30n}, & S_{230n} &= -b_n \varphi_{30n}, \\
 \theta_{\omega 0n} &= b_n \omega_{20n}, & R_{110n} &= R_{220n} = \eta_2 \varphi_{30n}, & N_{\omega 0n} &= \eta_2 \theta_{\omega 0n} + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_{30n};
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

$-m = n = 0$

$$M_{2100} = -M_{1200} = 4\alpha \varphi_{300}, \quad R_{1100} = R_{2200} = \eta_2 \varphi_{300}, \quad N_{\omega 00} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_{300}. \tag{1.11}$$

Из (1.5) и (1.7) вытекает, что граничные условия (1.3) выполняются.

Раскладывая правые части уравнений (1.1) в ряды

$$\begin{aligned}
 p &= \sum_{m,n=1}^{\infty} p_{mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \\
 \tilde{m}_{M1} &= \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{m}_{M1m0} \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \tilde{m}_{M1mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
 \tilde{m}_{M2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}_{M20n} \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \tilde{m}_{M2mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \\
 \tilde{m}_{2M} &= \tilde{m}_{2M00} + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{m}_{2Mm0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}_{2M0n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \tilde{m}_{2Mmn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2.
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

из (1.1) получаем систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

– при  $m, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{X}}_{mn}^{(4)} &= \mathbf{A}_{mn}^{(4)} \mathbf{X}_{mn}^{(4)} + \mathbf{B}_{mn}^{(4)}, \\
 \mathbf{A}_{mn}^{(4)} &= (a_{mnij})_{4 \times 4}, \quad \mathbf{X}_{mn}^{(4)} = (w_{mn}, \omega_{1mn}, \omega_{2mn}, \varphi_{3mn})^T, \\
 \mathbf{B}_{mn}^{(4)} &= (p_{mn}, \tilde{m}_{M1mn}, \tilde{m}_{M2mn}, \tilde{m}_{2M})^T,
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{mn11} &= - (a_m^2 + b_n^2) [r^2 (a_m^2 + b_n^2) + 4\alpha], \\
 a_{mn12} &= -4\alpha b_n, \quad a_{mn13} = 4\alpha a_m, \quad a_{mn14} = 0, \\
 a_{mn21} &= 4\alpha v b_n, \quad a_{mn22} = -(\gamma_0^{-2} a_m^2 + \gamma_2^{-2} b_n^2 + 4\alpha v), \\
 a_{mn23} &= a_{mn32} = -c_{02} a_m b_n, \quad a_{mn24} = \gamma_3^{-2} a_m, \\
 a_{mn31} &= -4\alpha v a_m, \quad a_{mn33} = -(\gamma_2^{-2} a_m^2 + \gamma_0^{-2} b_n^2 + 4\alpha v), \quad a_{mn34} = \gamma_3^{-2} b_n, \\
 a_{mn41} &= 0, \quad a_{mn42} = -\gamma_3^{-2} r^{-2} a_m, \quad a_{mn43} = -\gamma_3^{-2} r^{-2} b_n, \\
 a_{mn44} &= -[\gamma_2^{-2} (a_m^2 + b_n^2) + r^{-2} \gamma_0^{-2} + 4\alpha v];
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

– при  $m \geq 1, n = 0$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\omega}_{1m0} &= a_{m022} \omega_{1m0} + a_{m024} \varphi_{3m0} + \tilde{m}_{M1m0}, \\
 a_{m022} &= -(\gamma_0^{-2} a_m^2 + 4\alpha v), \quad a_{m024} = \gamma_3^{-2} a_m, \\
 \ddot{\varphi}_{3m0} &= a_{m042} \omega_{1m0} + a_{m044} \varphi_{3m0} + \tilde{m}_{2Mm0}, \\
 a_{m042} &= -\gamma_3^{-2} r^{-2} a_m, \\
 a_{m044} &= -(\gamma_2^{-2} a_m^2 + r^{-2} \gamma_0^{-2} + 4\alpha v);
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

– при  $m = 0, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\omega}_{20n} &= a_{0n33} \omega_{20n} + a_{0n34} \omega_{20n} + \tilde{m}_{M20n}, \quad a_{m033} = -(\gamma_0^{-2} b_n^2 + 4\alpha v), \\
 a_{0n34} &= \gamma_3^{-2} b_n, \\
 \ddot{\varphi}_{30n} &= a_{0n43} \omega_{20n} + a_{0n44} \varphi_{30n} + \tilde{m}_{2M0n}, \\
 a_{m043} &= -\gamma_3^{-2} r^{-2} b_n, \\
 a_{0n44} &= -(\gamma_2^{-2} b_n^2 + r^{-2} \gamma_0^{-2} + 4\alpha v);
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

– при  $m, n = 0$

$$\ddot{\varphi}_{300} = a_{0044} \varphi_{30n} + \tilde{m}_{2M0n}, \quad a_{0044} = -(r^{-2} \gamma_0^{-2} + 4\alpha v). \tag{1.17}$$

Эти уравнения совместно с дополнением к (1.4) равенств

$$\varphi_3|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = 0 \tag{1.18}$$

образует задачи Коши.

Решение последних двух задач не представляет сложностей. К начальным задачам (1.9), (1.12) применяем преобразование Лапласа по времени [13, 14] (верхний индекс « $L$ » указывает на изображение;  $s$  — параметр преобразования). В результате получаем

$$\mathbf{X}_{mn}^{(4)L}(s) = - \left( \mathbf{A}_{mn}^{(4)} - \mathbf{E}s^2 \right)^{-1} \mathbf{B}_{mn}^{(4)}.$$

Очевидно, элементы искомого столбца есть правильные дроби аргумента  $s$  со знаменателем — бикубическим многочленом. Их оригиналы находим с помощью вычетов [14]

$$\mathbf{X}_{mn}^{(4)}(\tau) = \sum_{k=1}^6 \operatorname{res}_{s=s_k} \mathbf{X}_{mn}^{(4)L} e^{s\tau},$$

где  $s_k$  — нули знаменателя

Для примера рассмотрим сосредоточенную в точке  $(x_{10}, x_{20})$  нагрузку, где  $0 < x_{10} < a$ ,  $0 < x_{20} < b$ , и нагрузку следующего вида:

$$p = \delta(x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}) H(\tau), \quad \tilde{m}_{M1} = \tilde{m}_{M2} = 0. \tag{1.19}$$

Здесь  $\delta(x_1, x_2)$  и  $H(\tau)$  — дельта-функция Дирака и функция Хевисайда [3, 13].

Нагрузке (1.19) соответствуют следующие коэффициенты рядов (1.8) [3]:

$$\begin{aligned} p_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \delta(x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}) H(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2 dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{4}{ab} H(\tau) \sin a_m x_{10} \sin b_n x_{20}, \tilde{m}_{M1mn} = \tilde{m}_{M2mn} = 0. \end{aligned}$$

При этих условиях начальные задачи, соответствующие уравнениям (1.15)–(1.17), однородные. Поэтому решения соответствующих начальных задач тривиальные

$$\omega_{1m0} \equiv 0 \ (m \geq 1), \quad \omega_{20n} \equiv 0 \ (n \geq 1).$$

Будем полагать, что материал — композит из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице со следующими физическими характеристиками [4, 12]:

$$\lambda = 7,59 \text{ ГПа}; \quad \mu = 1,89 \text{ ГПа}; \quad \alpha = 7,45 \text{ МПа}; \quad \gamma + \varepsilon = 2,64 \text{ кН};$$

$$J = 0,429 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}; \quad c_1 = 2,28 \cdot 10^3 \text{ м/с}; \quad c_2 = 9,29 \cdot 10^2 \text{ м/с};$$

Плотность материала, скорости  $c_3, c_4$  и необходимые безразмерные параметры

$$\rho = \mu/c_2^2 = 2,19 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad \beta + 2\gamma = 2,65 \text{ кН}; \quad \gamma = 0,440 \text{ кН}; \quad \beta = 1,77 \text{ кН},$$

$$\varepsilon = 2,20 \text{ кН}; \quad \gamma - \varepsilon = -1,76 \text{ кН}; \quad c_3 = 2,48 \cdot 10^3 \text{ м/с}; \quad c_4 = 2,485 \cdot 10^3 \text{ м/с};$$

$$\gamma_1 = 2,45; \quad \gamma_2 = 0,919; \quad \gamma_3 = 1,20; \quad \gamma_0 = 0,917; \quad \alpha = 0,66 \cdot 10^{-3};$$

$$v = 5,1 \cdot 10^6; \quad \kappa = 0,668; \quad \eta = -0,667; \quad \eta_1 = 0,167; \quad \eta_2 = 0,670.$$

В качестве характерного линейного размера принимаем  $L = 1$  м. Считаем, что толщина пластины  $h = 0,05$  м, откуда получаем  $r^2 = 0,208 \cdot 10^{-3}$ . В расчетах полагаем, что пластина квадратная:  $a = b = 1$ , а нагрузка приложена в ее центре:  $x_{10} = x_{20} = 1/2$ . При этом коэффициенты  $p_{mn}$  в (1.19) определяются следующим образом:

$$p_{mn} = 4H(\tau) \begin{cases} 0 \text{ при } m = 2k \text{ или } n = 2l, \\ (-1)^k(-1)^l \text{ при } m = 2k + 1 \text{ и } n = 2l + 1. \end{cases}$$

Ряды (1.5), (1.6) вида  $f(x_1, x_2, \tau) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}(x_1, x_2, \tau)$  заменяются частичными суммами

$S_N(x_1, x_2, \tau) = \sum_{m,n=1}^N f_{mn}(x_1, x_2, \tau)$ . Погрешность приближенного равенства  $f \approx S_N$  оценивается следующими величинами:

— при фиксированных  $x_1$  и  $x_2$

$$\varepsilon = \frac{\|f_{N+1,N+1}(x_1, x_2, \tau)\|_{\tau}}{\|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_{\tau}}, \quad \|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_{\tau} = \max_{\tau \in [0, T]} |S_N(x_1, x_2, \tau)|; \quad (1.20)$$

— при фиксированных  $x_2$  и  $\tau$

$$\varepsilon = \frac{\|f_{N+1,N+1}(x_1, x_2, \tau)\|_1}{\|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_1}, \quad \|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_1 = \max_{x_1 \in [0, 1]} |S_N(x_1, x_2, \tau)|;$$

— при фиксированных  $x_1$  и  $\tau$

$$\varepsilon = \frac{\|f_{N+1,N+1}(x_1, x_2, \tau)\|_2}{\|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_2}, \quad \|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_2 = \max_{x_2 \in [0, 1]} |S_N(x_1, x_2, \tau)|,$$

где величина  $T$  определяет рассматриваемый диапазон изменения времени.

На рис. 1.1–1.8 приведены зависимости прогиба  $w$ , углов поворота  $\omega_1, \omega_2$  и величины  $\varphi_3$  от координат  $x_1, x_2$  и времени соответственно при различных значениях  $\tau$  и  $x_1, x_2$ . Во всех вариантах погрешность  $\varepsilon$  составляла менее 5 % при  $N = 30$ .

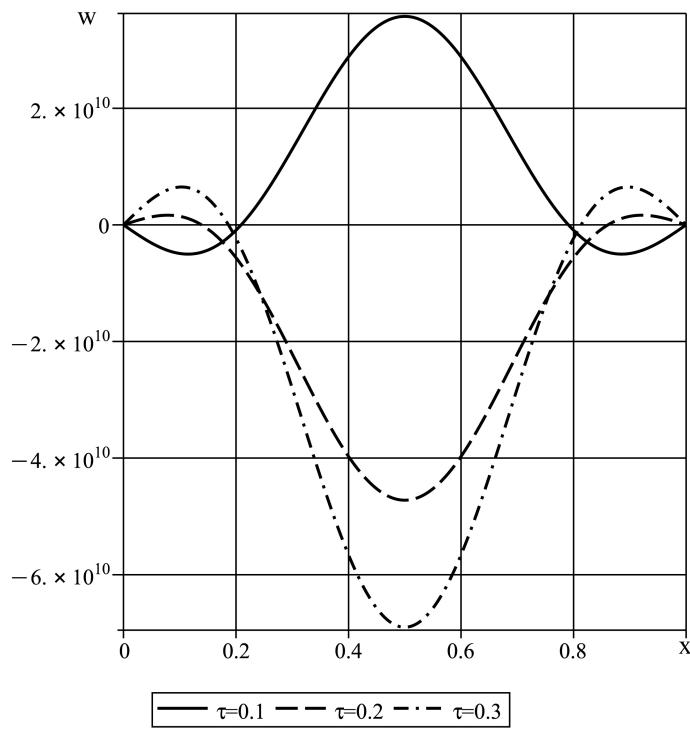


Рис. 1.1. Зависимость прогиба  $w$  от времени  $\tau$

*Fig. 1.1. Dependence of deflection  $w$  on time  $\tau$*

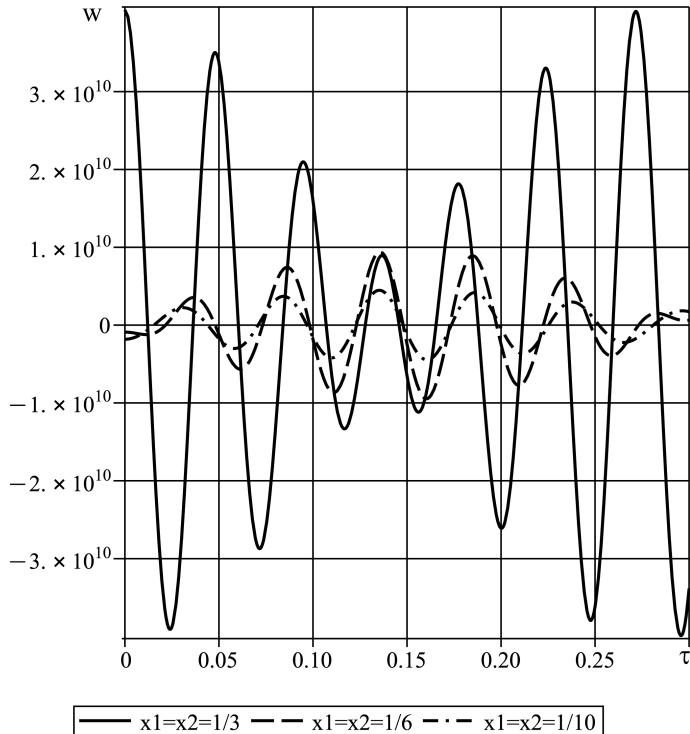


Рис. 1.2. Зависимость прогиба  $w$  от координат  $x_1, x_2$

*Fig. 1.2. Dependence of deflection  $w$  on coordinates  $x_1, x_2$*

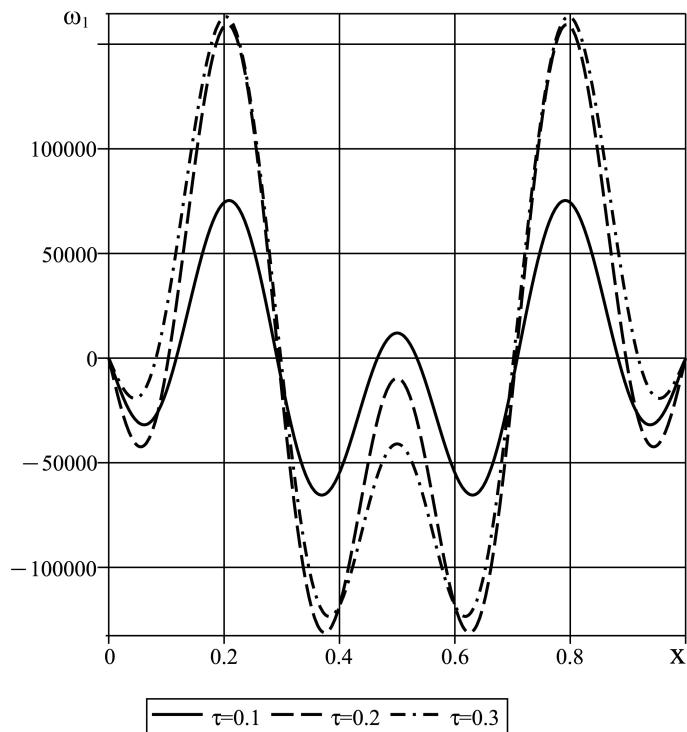


Рис. 1.3. Зависимость  $\omega_1$  от времени  $\tau$

*Fig. 1.3. Dependence of  $\omega_1$  on time  $\tau$*

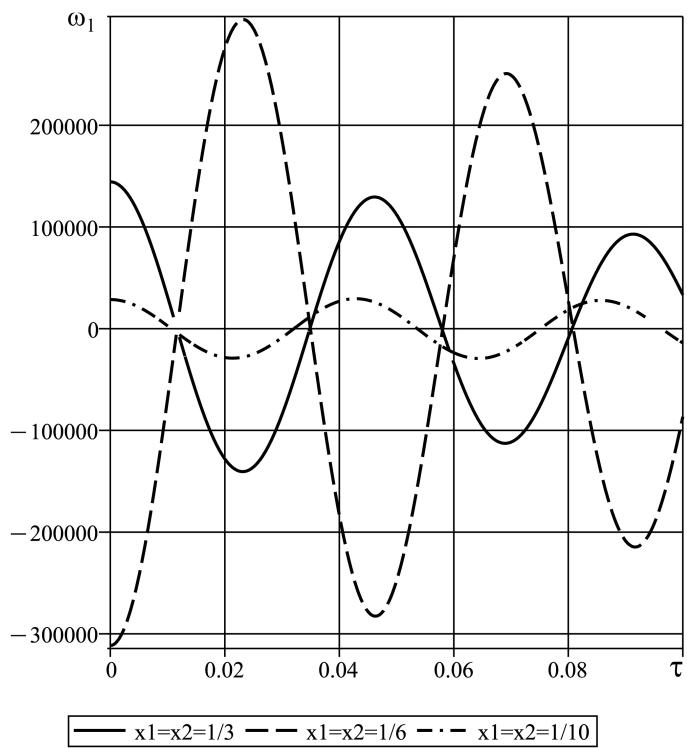


Рис. 1.4. Зависимость  $\omega_1$  от координат  $x_1, x_2$

*Fig. 1.4. Dependence of  $\omega_1$  on coordinates  $x_1, x_2$*

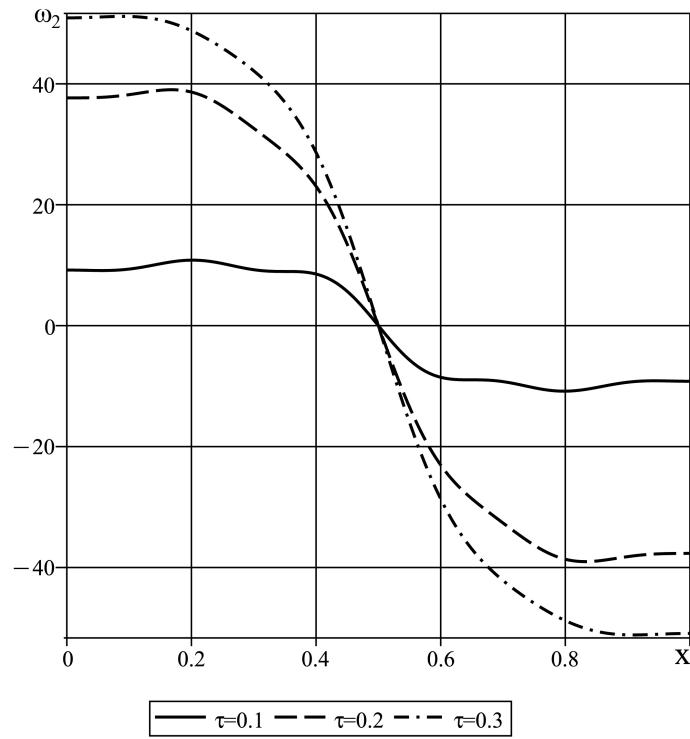


Рис. 1.5. Зависимость  $\omega_2$  от времени  $\tau$

*Fig. 1.5. Dependence of  $\omega_2$  on time  $\tau$*

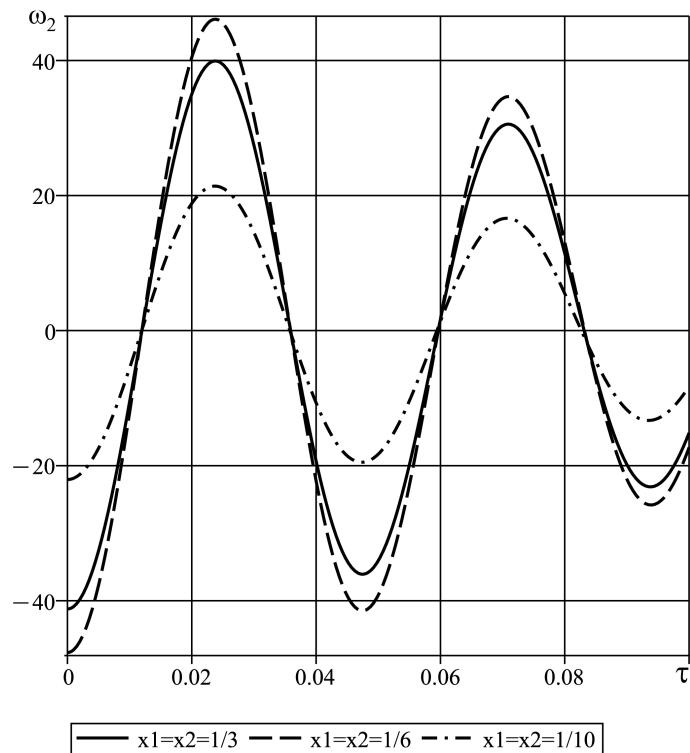


Рис. 1.6. Зависимость  $\omega_2$  от координат  $x_1$ ,  $x_2$

*Fig. 1.6. Dependence of  $\omega_2$  on coordinates  $x_1$ ,  $x_2$*

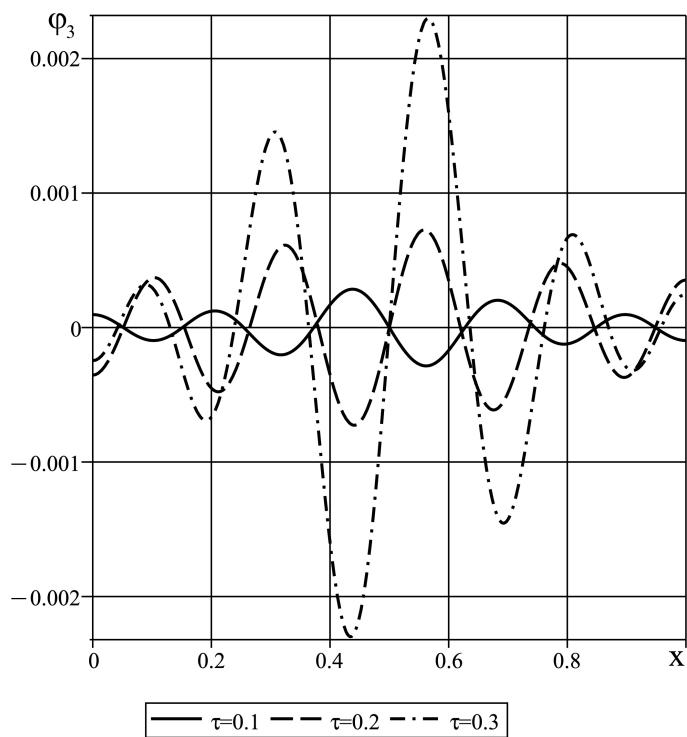


Рис. 1.7. Зависимость  $\varphi_3$  от времени  $\tau$

*Fig. 1.7. Dependence of  $\varphi_3$  on time  $\tau$*

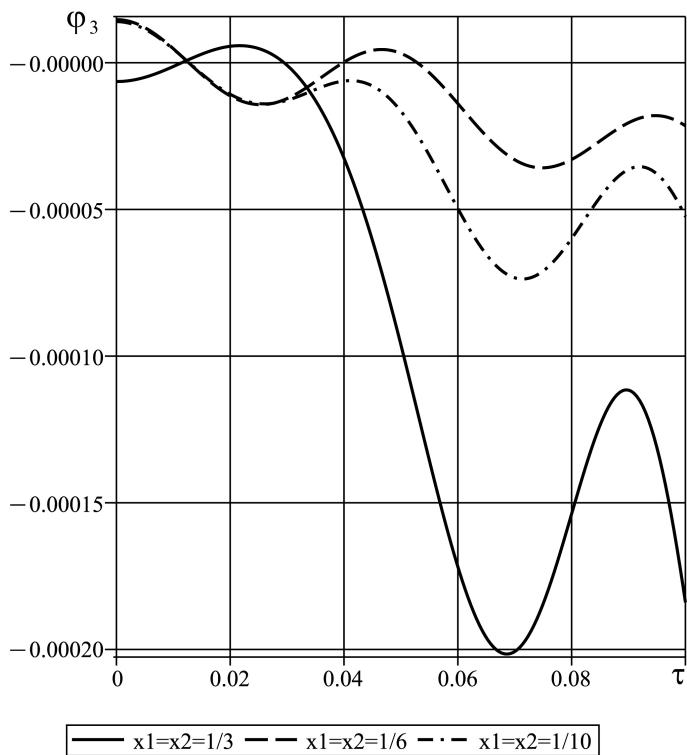


Рис. 1.8. Зависимость  $\varphi_3$  от координат  $x_1, x_2$

*Fig. 1.8. Dependence of  $\varphi_3$  on coordinates  $x_1, x_2$*

## 2. Постановка задачи (модель, не учитывающая обжатие нормального материального волокна)

Здесь геометрия пластины и граничные условия такие же, как в (1.5) и (1.6) соответственно, уравнениями движения являются равенства (2.1), физическими соотношениями — равенства (2.2), а начальные условия — нулевые.

Тогда

$$\begin{aligned} \ddot{w} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \Delta w + \gamma_{\alpha-}^{-2} \theta_\psi - 2\alpha \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) + q, \\ \ddot{\psi}_1 &= c_{\alpha+} \frac{\partial \theta_\psi}{\partial x_1} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \Delta \psi_1 - r^{-2} \left( \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_1 - 2\alpha \omega_2 \right) + m_1, \\ \ddot{\psi}_2 &= c_{\alpha+} \frac{\partial \theta_\psi}{\partial x_2} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \Delta \psi_2 - r^{-2} \left( \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_2 + 2\alpha \omega_1 \right) + m_2, \\ \ddot{\omega}_1 &= 2\alpha v \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right) + \gamma_2^{-2} \Delta \omega_1 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_1} - 4\alpha v \omega_1 + \tilde{m}_{M1}, \\ \ddot{\omega}_2 &= 2\alpha v \left( \psi_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \gamma_2^{-2} \Delta \omega_2 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_2} - 4\alpha v \omega_2 + \tilde{m}_{M2}; \\ M_{11} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \kappa \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \quad M_{22} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \kappa \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \\ M_{12} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}, \quad M_{21} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}, \\ T_{13} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_1 + \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + 2\alpha \omega_2, \quad T_{23} = \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_2 + \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_2} - 2\alpha \omega_1, \\ T_{31} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_1 + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_1} - 2\alpha \omega_2, \quad T_{32} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_2 + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + 2\alpha \omega_1; \\ R_{11} &= \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}, \quad R_{22} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \eta_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}, \\ R_{12} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, \quad R_{21} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \eta \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, \quad N_\omega = \eta_2 \theta_\omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для решения этой начально-краевой задачи так же, как и ранее, представляем искомые функции в виде двойных тригонометрических рядов (1.7), добавляя к ним следующие равенства:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{10n}(\tau) \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \psi_{1mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \\ \psi_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{2m0}(\tau) \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \psi_{2mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

При этом разложения для  $R_{11}$ ,  $R_{22}$ ,  $R_{12}$ ,  $R_{21}$ ,  $N_\omega$  и функция  $\theta_\omega$  остаются такими же, как в (1.7). Для коэффициентов этих рядов сохраняются соответствующие равенства (1.8).

Остальные внутренние силовые факторы и функция  $\theta_\psi$  представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta_\psi &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \theta_{\psi mn} \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \\ M_{11} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{11mn} \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \quad M_{22} = \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{22mn} \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \\ M_{12} &= \sum_{m=1}^{\infty} M_{12m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} M_{120n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{12mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{21} &= \sum_{m=1}^{\infty} M_{21m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} M_{210n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{21mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
 T_{13} &= \sum_{n=1}^{\infty} T_{130n} \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{13mn} \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \\
 T_{23} &= \sum_{m=1}^{\infty} T_{23m0} \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{23mn} \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
 T_{31} &= \sum_{n=1}^{\infty} T_{310n} \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{31mn} \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \\
 T_{32} &= \sum_{m=1}^{\infty} T_{32m0} \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{32mn} \sin a_m x_1 \cos b_n x_2.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

При этом граничные условия удовлетворяются тождественно.

Для коэффициентов этих рядов имеют место равенства:

– при  $n = 0, m \geq 1$

$$\begin{aligned}
 M_{12m0} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} a_m \psi_{2m0}, & M_{21m0} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} a_m \psi_{2m0}, \\
 T_{23m0} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{2m0} - 2\alpha \omega_{1m0}, & T_{32m0} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{2m0} + 2\alpha \omega_{1m0};
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

– при  $m = 0, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
 M_{120n} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} b_n \psi_{10n}, & M_{210n} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} b_n \psi_{10n}, \\
 T_{130n} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{10n} + 2\alpha \omega_{20n}, & T_{310n} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{10n} - 2\alpha \omega_{20n};
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

– при  $m, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
 \theta_{\psi mn} &= -(a_m \psi_{1mn} + b_n \psi_{2mn}), \\
 M_{11mn} &= a_m \psi_{1mn} + \kappa b_n \psi_{2mn}, & M_{22mn} &= \kappa a_m \psi_{1mn} + b_n \psi_{2mn}, \\
 M_{12mn} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} a_m \psi_{2mn} + \gamma_{\alpha-}^{-2} b_n \psi_{1mn}, & M_{21mn} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} b_n \psi_{1mn} + \gamma_{\alpha-}^{-2} a_m \psi_{2mn}, \\
 T_{13mn} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{1mn} + \gamma_{\alpha+}^{-2} a_m w_{mn} + 2\alpha \omega_{2mn}, \\
 T_{23mn} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{2mn} + \gamma_{\alpha+}^{-2} b_n w_{mn} - 2\alpha \omega_{1mn}, \\
 T_{31mn} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{1mn} + \gamma_{\alpha-}^{-2} a_m w_{mn} - 2\alpha \omega_{2mn}, \\
 T_{32mn} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{2mn} + \gamma_{\alpha-}^{-2} b_n w_{mn} + 2\alpha \omega_{1mn}.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Уравнения относительно коэффициентов рядов получаем подстановкой этих рядов в (1.12), дополняя разложения правых частей (2.1) следующим равенством:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} m_{10n}(\tau) \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} m_{1mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \\
 m_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} m_{2m0}(\tau) \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} m_{2mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

В результате получаем следующие системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

– при  $m, n \geq 1$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}}_{mn}^{(1)} &= \mathbf{A}_{mn}^{(1)} \mathbf{X}_{mn}^{(1)} + \mathbf{B}_{mn}^{(1)}, \quad \mathbf{X}_{mn}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{mn}^{(3)} \\ \psi_{1mn} \\ \psi_{2mn} \end{pmatrix}_{5 \times 1}, \\ \mathbf{A}_{mn}^{(1)} &= \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{mn}^{(3)} & \mathbf{b}_{mn\psi} \\ \hline \mathbf{a}_{mn\psi} & \mathbf{c}_{mn\psi} \end{array} \right)_{5 \times 5}, \quad \mathbf{B}_{mn}^{(3)} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{mn}^{(3)} \\ m_{1mn} \\ m_{2mn} \end{pmatrix}_{5 \times 1}, \\ \mathbf{b}_{mn\psi} &= \begin{pmatrix} a_{mn14} & a_{mn15} \\ 0 & a_{mn25} \\ a_{mn34} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_{mn\psi} = \begin{pmatrix} a_{mn41} & 0 & a_{mn43} \\ a_{mn51} & a_{mn52} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_{mn\psi} = \begin{pmatrix} a_{mn44} & a_{mn45} \\ a_{mn54} & a_{mn55} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где элементы матриц с верхним индексом «(4)» определены в (1.13), а остальные нетривиальные элементы матрицы  $\mathbf{A}_{mn}^{(1)}$  имеют вид

$$\begin{aligned} a_{mn14} &= -\gamma_{\alpha-}^{-2} a_m, \quad a_{mn15} = -\gamma_{\alpha-}^{-2} b_n, \quad a_{mn34} = -a_{mn25} = 2\alpha v, \\ a_{mn41} &= -\gamma_{\alpha-}^{-2} r^{-2} a_m, \quad a_{mn43} = -a_{mn52} = 2\alpha r^{-2}, \\ a_{mn44} &= -[a_m^2 + \gamma_{\alpha+}^{-2} (b_n^2 + r^{-2})], \quad a_{mn45} = a_{mn54} = -c_{\alpha+} a_m b_n, \\ a_{mn51} &= -r^{-2} \gamma_{\alpha-}^{-2} b_n, \quad a_{mn55} = -[b_n^2 + \gamma_{\alpha+}^{-2} (a_m^2 + r^{-2})]; \end{aligned} \quad (2.10)$$

– при  $m \geq 1, n = 0$

$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_{1m0} &= a_{m022} \omega_{1m0} + a_{m025} \psi_{2m0} + \tilde{m}_{M1m0}, \quad a_{m022} = -(\gamma_0^{-2} a_m^2 + 4\alpha v), \quad a_{m025} = -2\alpha v, \\ \ddot{\psi}_{2m0} &= a_{m052} \omega_{1m0} + a_{m055} \psi_{2m0} + m_{2m0}, \\ a_{m052} &= -2\alpha r^{-2}, \quad a_{m055} = -(c_{\alpha+} b_n^2 + r^{-2} \gamma_{\alpha+}^{-2}); \end{aligned} \quad (2.11)$$

– при  $m = 0, n \geq 1$

$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_{20n} &= a_{m033} \omega_{20n} + a_{m034} \psi_{10n} + \tilde{m}_{M20n}, \quad a_{m033} = -(\gamma_0^{-2} b_n^2 + 4\alpha v), \quad a_{m034} = 2\alpha v, \\ \ddot{\psi}_{10n} &= a_{m044} \psi_{10n} + a_{m043} \omega_{20n} + m_{10n}, \\ a_{m043} &= 2\alpha r^{-2}, \quad a_{m044} = -(c_{\alpha+} a_m^2 + r^{-2} \gamma_{\alpha+}^{-2}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Эти системы совместно с дополнением к (1.18) равенств

$$\psi_{1mn}|_{\tau=0} = \dot{\psi}_{1mn}|_{\tau=0} = \psi_{2mn}|_{\tau=0} = \dot{\psi}_{2mn}|_{\tau=0} = 0 \quad (2.13)$$

образует задачи Коши.

Для примера аналогично п. 1 рассматриваем сосредоточенную нагрузку (1.19), дополненную равенствами

$$m_1 = m_2 = 0. \quad (2.14)$$

При этом к коэффициентам разложения в ряды [12] добавляются соотношения

$$m_{1mn} = m_{2mn} = 0. \quad (2.15)$$

При этих условиях начальные задачи, соответствующие уравнениям (2.11) и (2.12), будут однородными. Поэтому их решения тривиальные

$$\omega_{1m0} = \psi_{2m0} \equiv 0 \quad (m \geq 1), \quad \omega_{20n} = \psi_{10n} \equiv 0 \quad (n \geq 1). \quad (2.16)$$

Физические и геометрические характеристики пластины и точка приложения сосредоточенной нагрузки принимаем такими же, как в п. 1.

Соответствующие начальные задачи интегрируются численно. Ряды суммируются с помощью критерия (1.20).

На рис. 2.1–2.10 приведены зависимости прогиба  $w$ , углов поворота  $\omega_1, \omega_2$  и  $\psi_1, \psi_2$  от координат  $x_1, x_2$  и времени соответственно при различных значениях  $\tau$  и  $x_1, x_2$ .

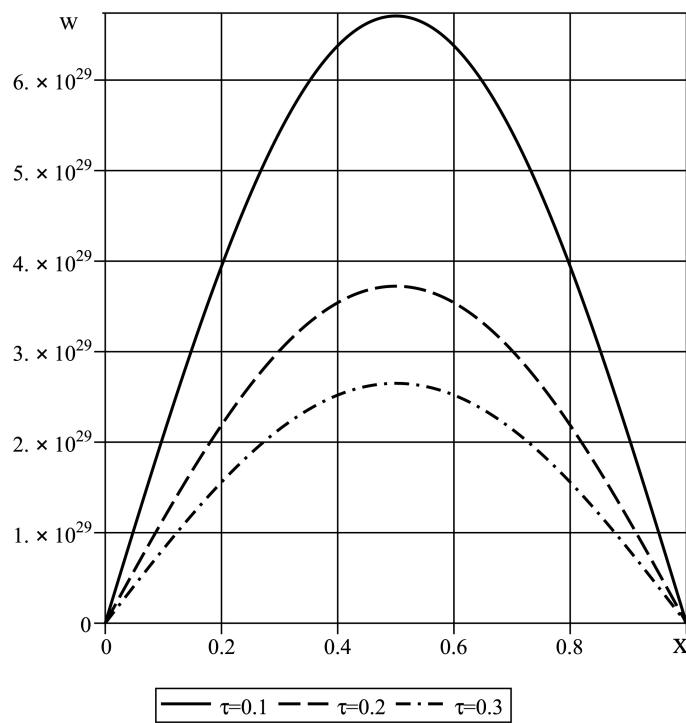


Рис. 2.1. Зависимость прогиба  $w$  от времени  $\tau$

Fig. 2.1. Dependence of deflection  $w$  on time  $\tau$

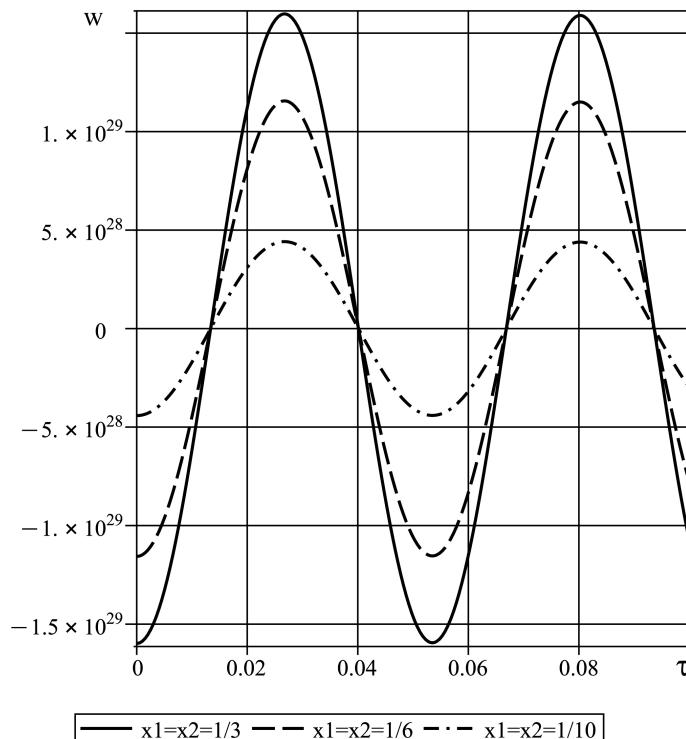


Рис. 2.2. Зависимость прогиба  $w$  от координат  $x_1, x_2$

Fig. 2.2. Dependence of deflection  $w$  on coordinates  $x_1, x_2$

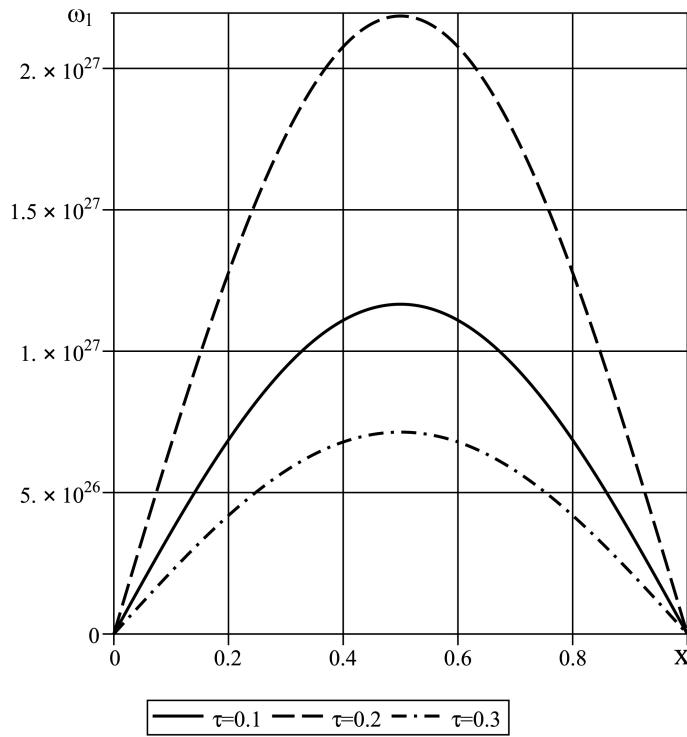


Рис. 2.3. Зависимость  $\omega_1$  от времени  $\tau$

*Fig. 2.3. Dependence of  $\omega_1$  on time  $\tau$*

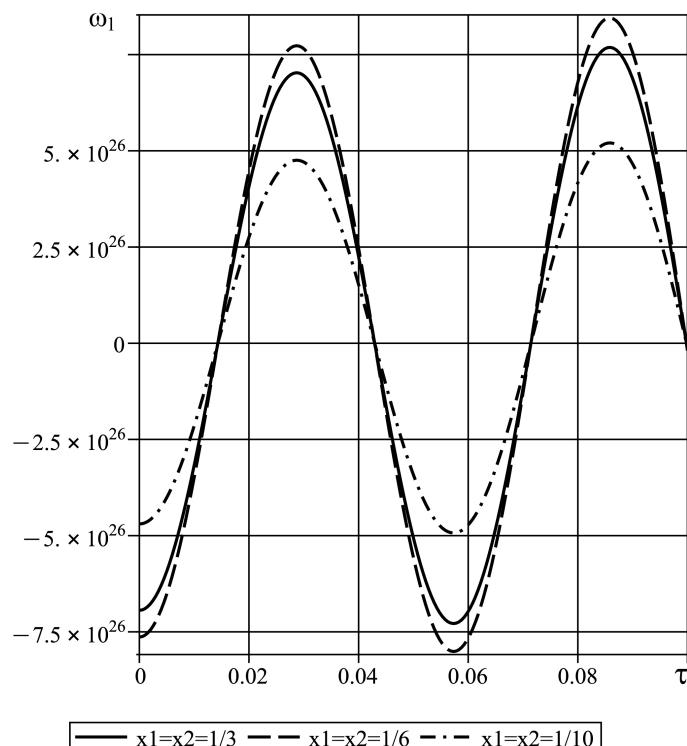


Рис. 2.4. Зависимость  $\omega_1$  от координат  $x_1, x_2$

*Fig. 2.4. Dependence of  $\omega_1$  on coordinates  $x_1, x_2$*

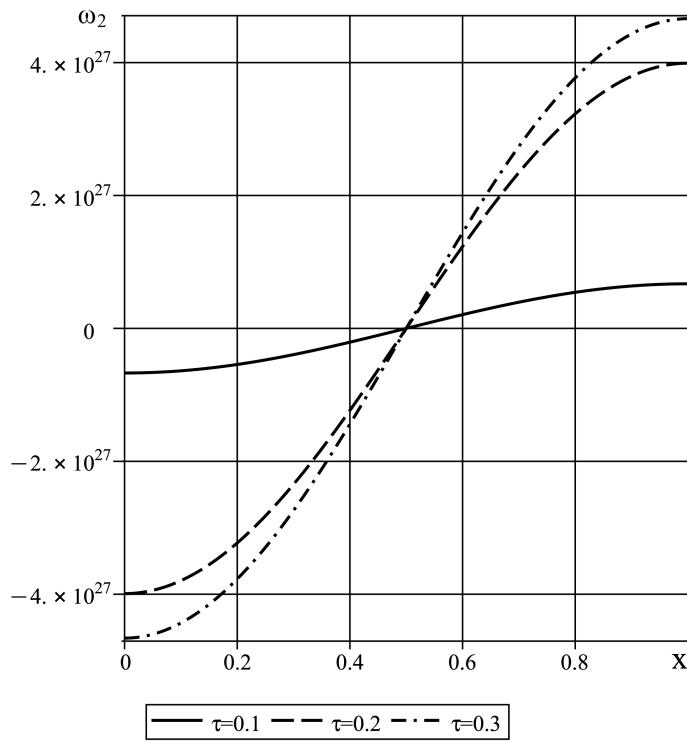


Рис. 2.5. Зависимость  $\omega_2$  от времени  $\tau$

Fig. 2.5. Dependence of  $\omega_2$  on time  $\tau$

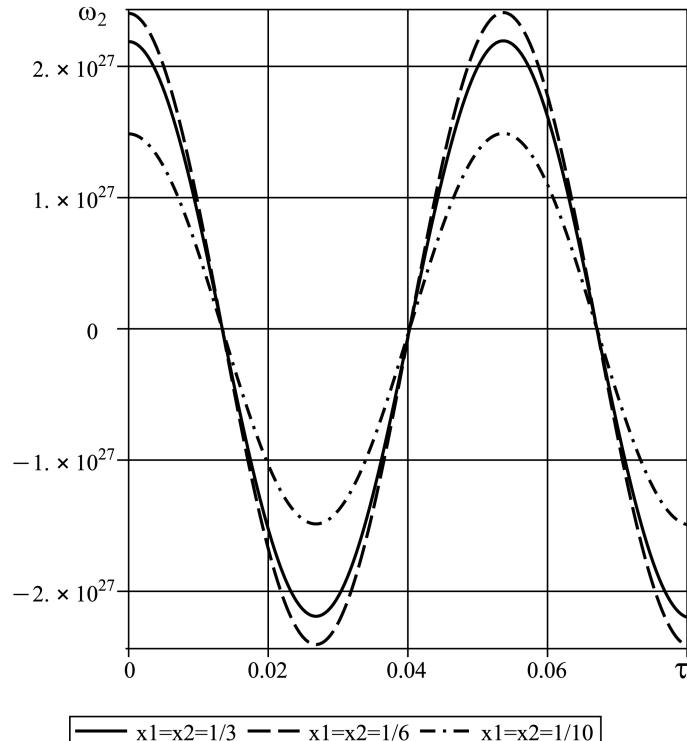


Рис. 2.6. Зависимость  $\omega_2$  от координат  $x_1, x_2$

Fig. 2.6. Dependence of  $\omega_2$  on coordinates  $x_1, x_2$

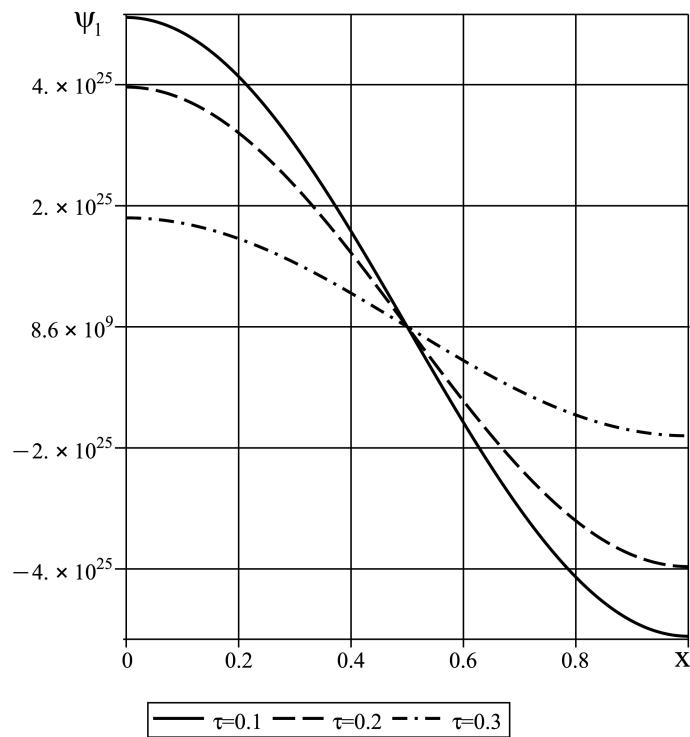


Рис. 2.7. Зависимость  $\psi_1$  от времени  $\tau$

Fig. 2.7. Dependence of  $\psi_1$  on time  $\tau$

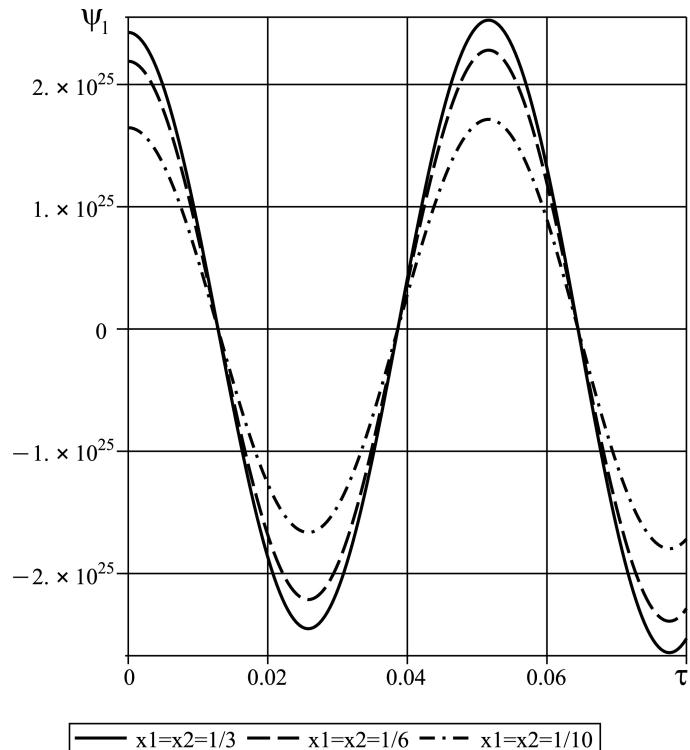


Рис. 2.8. Зависимость  $\psi_1$  от координат  $x_1, x_2$

Fig. 2.8. Dependence of  $\psi_1$  on coordinates  $x_1, x_2$

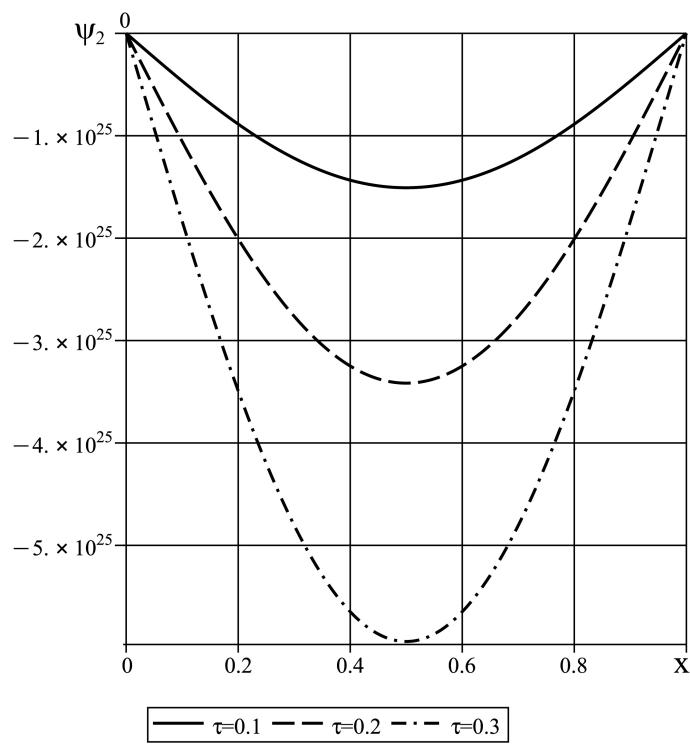


Рис. 2.9. Зависимость  $\psi_2$  от координат  $x_1, x_2$

Fig. 2.9. Dependence of  $\psi_2$  on coordinates  $x_1, x_2$

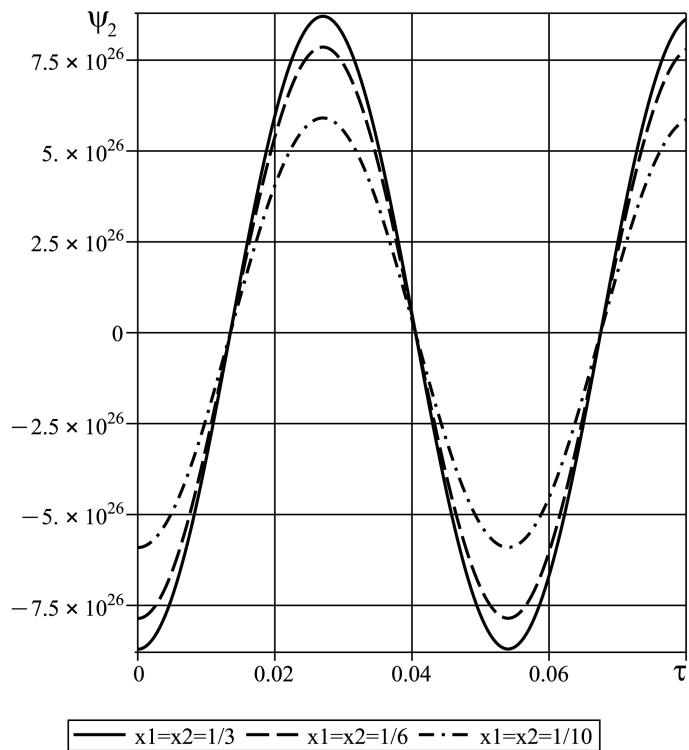


Рис. 2.10. Зависимость  $\psi_2$  от времени  $\tau$

Fig. 2.10. Dependence of  $\psi_2$  on time  $\tau$

## Заключение

В данной работе представлена модель нестационарного изгиба прямоугольной упругой пластины с шарнирным опиранием. Для описания поведения пластины предложены два варианта моделирования. Первый вариант основывается на классических предположениях Кирхгофа–Лява, тогда как второй исключает учет сжатия нормальных волокон материала. Это позволяет минимизировать количество искомых функций и упростить расчет.

Сравнивая результаты вычислений из [12] с результатами, полученными в п. 2, можно увидеть геометрическое сходство графиков. Однако из-за различий в используемых моделях вычислений в каждом разделе численные результаты имеют определенные расхождения. С точки зрения математической механики это абсолютно нормально. Результаты считаются обоснованными.

Разработанный метод показал свою высокую эффективность в решении задач данного типа. Проведенные численные расчеты для случая нагрузки в виде нормальной силы, изменяющейся по функции Хевисайда, подтвердили его точность. Кроме того, было продемонстрировано, что предложенный подход позволяет успешно анализировать динамическое поведение упругих пластин.

Метод обладает значительным потенциалом для практического применения в инженерии. Особенно он может быть полезен в тех областях, где требуется проведение детального анализа динамических характеристик конструкций. Среди таких сфер можно выделить аэрокосмическую отрасль и машиностроение. Использованный подход открывает новые возможности для оптимизации проектирования конструкций и повышения их надежности при динамических воздействиях.

## Литература [References]

1. Михайлова, Е.Ю., Тарлаковский, Д.В., Федотенков Г.В., Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек. *Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки*, 2018, т. 160, кн. 3, с. 561–577. EDN: [YZSUDR](#) [Mikhaylova, E.Yu., Tarlakovsky, D.V., Fedotenkov, G.V., Generalized Linear Model of Dynamics of Thin Elastic Shells. *Scientific Notes of Kazan University. Series Physics and Mathematics*, 2018, vol. 160, book 3, pp. 561–577. (in Russian)]
2. Михайлова, Е.Ю., Тарлаковский, Д.В., Федотенков, Г.В., *Общая теория упругих оболочек*. Москва, Изд-во МАИ, 2018. [Mikhaylovam E.Yu., Tarlakovsky, D.V., Fedotenkov, G.V., *General Theory of Elastic Shells*. Moscow, MAI Publishing, 2018. (in Russian)]
3. Кудрявцев, Л.Д., *Курс математического анализа, т. II*. Москва, Высшая школа, 1981. [Kudryavtsev, L.D., *Course of Mathematical Analysis, vol. II*. Moscow, Higher School, 1981. (in Russian)]
4. Лай, Тхань Тuan, Тарлаковский, Д.В., Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера. *Труды МАИ*, 2012, № 53. [Lai, Thanh Tuan, Tarlakovsky, D.V., Propagation of Nonstationary Axisymmetric Disturbances from the Surface of a Sphere Filled with a Cosserat Pseudo-Elastic Medium. *Proceedings of MAI*, 2012, no. 53. (in Russian)] URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29267>
5. Ерофеев, В.И., *Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой*. Москва, Изд-во МГУ, 1999. [Erofeev, V.I., *Wave Processes in Solids with Microstructure*. Moscow, Moscow State University Publishing, 1999. (in Russian)]
6. Левицкий, Д.Ю., Федотенков, Г.В., Нестационарное деформированное состояние пластины Тимошенко. *Труды МАИ*, 2022, № 125. [Levitsky, D.Yu., Fedotenkov, G.V., Nonstationary Deformed State of the Timoshenko Plate. *Proceedings of MAI*, 2022, no. 125. (in Russian)] URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168157> DOI: 10.34759/trd-2022-125-05
7. Тарлаковский, Д.В., Май, Куок Чиен, Начально-краевые задачи для моментных упругих пластин. В Кулаженко Ю. И. (ред.) *Матер. XII Междунар. научн.-практ. конф., посвящ. 160-летию Бел. ж. д. «Проблемы безопасности на транспорте» Ч. 3., Гомель, 24–25 ноябр. 2022 г.* Гомель, БелГУТ, 2023 С. 262–263. [Tarlakovsky, D.V., Mai, Quoc Chien, Initial-Boundary Problems for Moment Elastic Plates. In: Kulazhenko Yu.I. (ed.) *Proc. of the XII Int. Scientific-Practical Conf., Dedicated to the*

- 160th Anniversary of Belarusian Railway “Problems of Transport Safety” Pt. 3, Gomel, Nov 24–25, 2022. Gomel, BelSUT, 2023, pp. 262–263. (in Russian)] URL: <http://elib.bsut.by/handle/123456789/7692>
8. Quoc, Chien Mai, Ryazantseva, M.Yu., Tarlakovskii, D.V., Generalized Linear Model of Dynamics of Elastic Moment Shells. In *Advanced Structured Materials*, vol. 186. Deformation and Destruction of Materials and Structures Under Quasi-static and Impulse Loading. Springer Nature Switzerland AG, 2020, pp. 273–293. DOI: [10.1007/978-3-031-22093-7\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-031-22093-7_11)
  9. Нгуен, Нгок Хоа, Тарлаковский, Д.В., Нестационарные поверхностные функции влияния для упруго-пористой полуплоскости. Электронный журнал «Труды МАИ», 2012, № 53. [Nguyen, Hoa, Tarlakovsky, D.V., Nonstationary Surface Influence Functions for an Elastic-Porous Half-Plane. Electronic Journal “Proceedings of MAI”, 2012, no. 53. (in Russian)] URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29269>
  10. Чан, Ле Тхай, Тарлаковский, Д.В., Моментно упругая полуплоскость под действием поверхностных нестационарных нормальных перемещений. Труды МАИ, 2018, № 102. [Tran, Le Thai, Tarlakovsky, D.V., Moment Elastic Half-Plane Under the Action of Nonstationary Surface Normal Displacements. Proceedings of MAI, 2018, no. 102. (in Russian)] URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=99731>
  11. Нгуен, Тхань Тунг, Тарлаковский, Д.В., Антиплоское нестационарное движение электромагнитоупругого полупространства с учетом пьезоэлектрических эффектов. Труды МАИ, 2019, № 105. [Nguyen, Thanh Tung, Tarlakovsky, D.V., Antiplane Nonstationary Motion of an Electromagnetic Elastic Half-Space Considering Piezoelectric Effects. Proceedings of MAI, 2019, no. 105. (in Russian)] URL: <https://mai.ru/publications/index.php?ID=104123>
  12. До, Нгок Даt, Тарлаковский, Д.В., Федотенков, Г.В., Действие поперечной нестационарной силы на шарнирно опертую моментную упругую прямоугольную пластину (простейшая модель). Труды МАИ, 2024, № 139. [Do Ngok Dat, Tarlakovsky D.V. Action of transverse non-stationary force on a hinged elastic rectangular plate (the simplest model). Proceedings of MAI, 2024, no. 139. (in Russian)] URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183451>
  13. Оконечников, А.С., Тарлаковский, Д.В., Федотенков, Г.В., *Обобщенные функции в механике деформируемого твердого тела. Интегральные преобразования и дифференциальные уравнения*. Москва, Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2019. [Okonechnikov, A.S., Tarlakovsky, D.V., Fedotenkov, G.V., *Generalized Functions in the Mechanics of Deformable Solids. Integral Transforms and Differential Equations*. Moscow, MAI-PRINT Publishing, 2019. (in Russian)]
  14. Горшков, А.Г., Медведский, А.Л., Рабинский, Л.Н., Тарлаковский, Д.В., *Волны в сплошных средах*. Москва, Физматлит, 2004. [Gorshkov, A.G., Medvedsky, A.L., Rabinsky, L.N., Tarlakovsky, D.V., *Waves in Continuous Media*. Moscow, Fizmatlit, 2004. (in Russian)]
  15. Михайлова, Е.Ю., Тарлаковский, Д.В., Федотенков, Г.В., *Упругие пластины и пологие оболочки*. Москва, Изд-во МАИ, 2018. [Mikhaylova, E.Yu., Tarlakovsky, D.V., Fedotenkov, G.V., *Elastic Plates and Shallow Shells*. Moscow, MAI Publishing, 2018 (in Russian)]