

УДК 51.37

EDN: ZSBWKK DOI: 10.31429/vestnik-22-1-62-67

Использование решения сопряженных задач при идентификации мощности источников загрязнения и планировании эксперимента

В. С. Кочергин  **С. В. Кочергин** 

Морской гидрофизический институт РАН, ул. Капитанская 2, Севастополь, 299011, Россия

✉ Кочергин Владимир Сергеевич; ORCID 0000-0002-6767-1218; SPIN 9479-0245; e-mail: vskocher@gmail.com

Аннотация. В работе для модели переноса пассивной примеси рассматривается построение оптимального плана измерений для реализации вариационного алгоритма идентификации мощности источников загрязнений. Информационная матрица Якоби строится с использованием решений серии сопряженных задач. Известно, что измерения поля концентрации, которые производятся в точках максимальных значений, приводят к повышению обусловленности решаемой задачи и более быстрой сходимости итерационного процесса. Алгоритм построения информационной матрицы Фишера представлен для случая трехмерной модели переноса пассивной примеси в Азовском море. Рассматривается действие мгновенного и постоянного точечного источника загрязнения. Результаты могут быть использованы для решения различных задач экологической направленности при изучении воздействия источников загрязнения антропогенного характера в акваториях Азовского и Черного морей.

Ключевые слова: планирование эксперимента, модель переноса, пассивная примесь, идентификация, сопряженная задача, минимизация, Азовское море.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № FNNN-2024-0016 «Исследование пространственно-временной изменчивости океанологических процессов в береговой, прибрежной и шельфовых зонах Черного моря под воздействием природных и антропогенных факторов на основе контактных измерений и математического моделирования» (шифр «Прибрежные исследования»).

Цитирование: Кочергин В. С., Кочергин С. В. Использование решения сопряженных задач при идентификации мощности источников загрязнения и планировании эксперимента // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 1. С. 62–67. EDN: ZSBWKK. DOI: 10.31429/vestnik-22-1-62-67

Поступила 11 февраля 2025 г. После доработки 10 марта 2025 г. Принято 12 марта 2025 г. Публикация 27 марта 2025 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2025. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Using Solutions to Adjoint Problems in Identifying the Power of Pollution Sources and Planning an Experiment

V. S. Kochergin  **S. V. Kochergin**

Marine Hydrophysical Institute, Kapitanskaya str., 2, Sevastopol, 299011, Russia

✉ Vladimir S. Kochergin; ORCID 0000-0002-6767-1218; e-mail: vskocher@gmail.com

Abstract. In the work for the passive impurity transfer model, the construction of an optimal measurement plan for the implementation of a variational algorithm for identifying the power of pollution sources is considered. The Jacobi information matrix is constructed using solutions to a series of related problems. It is known that measurements of the concentration field, which are performed at the points of maximum values, lead to increased conditionality of the problem being solved and faster convergence of the iterative process. The algorithm for constructing the Fischer information matrix is presented for the case of a three-dimensional model of passive impurity transport in the Sea of Azov. The effect of an instantaneous and permanent point source of pollution is considered. The results can be used to solve various environmental problems in studying the effects of anthropogenic pollution sources in the waters of the Azov and Black Seas.

Keywords: planning of the experiment, transport model, passive admixture, identification, adjoint problem, minimization, Azov Sea.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment on topic no. FNNN-2024-0016 “Study of the spatio-temporal variability of oceanographic processes in the coastal, coastal and shelf zones of the Black Sea under the influence of natural and anthropogenic factors based on contact measurements and mathematical modeling” (code “Coastal research”).

Cite as: Kochergin, V. S., Kochergin, S. V., Using solutions to adjoint problems in identifying the power of pollution sources and planning an experiment. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 1, pp. 62–67. DOI: 10.31429/vestnik-22-1-62-67

Received 11 February 2025. Revised 10 March 2025. Accepted 12 March 2025. Published 27 March 2025.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2025. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) license.

Введение

При решении задачи по идентификации мощности источников загрязнения в модели переноса пассивной примеси по данным измерений встает вопрос построения оптимальных планов для улучшения вычислительных свойств алгоритмов. С математической точки зрения под оптимальным планом понимается набор точек измерений, распределенных по пространству и времени, дающий лучшую обусловленность решаемой задачи. Вычислительные свойства применяемых при этом алгоритмов могут в значительной степени быть улучшены за счет выбора наиболее оптимальной схемы измерений.

1. Построение оптимального плана

Алгоритмы оптимального планирования [1, 2] основаны на изучении свойств информационной матрицы Фишера

$$\mathbf{M}(\varepsilon_N) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i p_i \mathbf{F}_i^T, \quad (1.1)$$

где $\varepsilon_N = \begin{Bmatrix} x_1, x_2, \dots, x_N \\ p_1, p_2, \dots, p_N \end{Bmatrix}$ — нормированный план, $0 \leq p_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^N p_i = 1$, \mathbf{F}_i — матрица Якоби, определяющая вариации поля концентрации примеси в зависимости от вариаций тех или иных параметров задачи. Существуют различные подходы к поиску оптимальных планов. Наиболее простой состоит в следующем:

- строится невырожденный начальный план;
- определяется дополнительная точка, добавление которой к плану повышает обусловленность решаемой задачи;
- ищется наименее информативная точка плана, которая отбрасывается.

Детерминант матрицы (1.1) характеризует обусловленность решаемой задачи идентификации параметров численного моделирования. Поэтому можно сравнивать между собой несколько планов, априори заданных. Сравнение происходит по значению детерминанта информационной матрицы Фишера (1.1).

2. Модель переноса

Рассмотрим модель [3] переноса-диффузии пассивной примеси в σ -координатах

$$\frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial DC}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial DC}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K}{D} \frac{\partial C}{\partial \sigma}, \quad (2.1)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned}\sigma = 0 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= 0; \\ \sigma = -1 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= Q = \sum_i Q_i^B \delta(x - x_i) \delta(y - y_i), \quad i = \overline{1, I}, \quad \Gamma : \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}}\end{aligned}\tag{2.2}$$

и начальными данными

$$C(x, y, \sigma, 0) = C_0(x, y, \sigma),\tag{2.3}$$

где $t \in [0, T]$ — время; D — динамическая глубина; x, y — горизонтальные координаты; σ — безразмерная вертикальная координата, изменяющаяся в пределах от -1 (на дне) до 0 (на поверхности моря); U, V, W — компоненты поля скорости; C — концентрация примеси; A_H и K — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии; \mathbf{n} — нормаль к боковой границе, Γ — граница области интегрирования модели M ; $M_t = M \times [0, T]$, I — количество источников загрязнения на дне с заданной мощностью Q_i^B . В данном случае для определенности источники заданы на дне моря. Аналогично можно получить алгоритм и для варианта задания источников на поверхности моря.

3. Вариационный алгоритм ассилияции данных измерений

Рассмотрим вариационный алгоритм [4–6] ассилияции, при котором усвоение происходит за счет минимизации следующего выпуклого квадратичного функционала качества прогноза

$$I_0 = \frac{1}{2} (P(RC - C^{\text{изм}}), P(RC - C^{\text{изм}}))_{M_t},\tag{3.1}$$

где P — оператор восполнения нулями поля невязок прогноза при отсутствии данных измерений, R — оператор проектирования в точки наблюдений. Функционал (3.1) при линейных ограничениях (2.1)–(2.3) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}I = I_0 + \left[\frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial DC}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial DC}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} K \frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^* \right]_{M_t} + \\ + \left(\frac{\partial C}{\partial n}, C^* \right)_{\Gamma_t} + (C - C_0, C^*)_M + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^* \right)_{\sigma_t^0} + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma} - \sum_i Q_i^B \delta(x - x_i) \delta(y - y_i), C^* \right)_{\sigma_t^{-1}},\end{aligned}\tag{3.2}$$

где скалярное произведение определяется стандартным способом в L_2 . Проинтегрируем соответствующее (3.2) выражение для вариации функционала по частям с учетом аналога уравнения неразрывности и краевых условий. В (3.2) $\sigma_t^0 = \sigma^0 \times [0, T]$, $\sigma_t^{-1} = \sigma^{-1} \times [0, T]$, σ^0 — поверхность моря, а σ^{-1} — дно.

Аналог уравнения неразрывности в σ -координатах имеет вид

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial \sigma} = 0.\tag{3.3}$$

Выберем в качестве множителей Лагранжа решение следующей сопряженной задачи:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial DC^*}{\partial t} - \frac{\partial DUC^*}{\partial x} - \frac{\partial DVC^*}{\partial y} - \frac{\partial WC^*}{\partial \sigma} - D \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C^*}{\partial x} - D \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C^*}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} K \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \\ \Gamma : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \sigma = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \sigma = -1 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \\ t = T : C^* = P(C^{\text{изм}} - RC).\end{aligned}\tag{3.4}$$

При идентификации действующих на всем промежутке времени источников постоянной мощности имеем

$$\nabla_{Q_i^B} I = \int_0^T C^*(t, x_i, y_i, -1) dt. \quad (3.5)$$

При определении мощности мгновенного точечного источника имеем

$$\nabla_{Q_i^B} I = C^*(0, x_i, y_i, -1). \quad (3.6)$$

Значение мощностей источников определяются в процессе итераций

$$Q_{i_{n+1}}^B = Q_{i_n}^B + \tau \cdot \nabla_{Q_i^B} I, \quad (3.7)$$

где τ — итерационный параметр, который находится с учетом решения задачи в вариационных. Следует заметить, что проведенные тестовые расчеты показали хорошую сходимость итерационного процесса и достаточную точность идентификации мощности источников при использовании полной информации о поле концентрации. При задании небольшого количества точек измерений результат в полной мере зависит от их местоположения и тогда задача планирования эксперимента встает естественным образом.

4. Метод оценки. Алгоритм фильтрации

Умножая (2.1)–(2.3) на C^* и интегрируя по частям с учетом краевых условий и аналога уравнения неразрывности в σ -координатах, выберем C^* как решение следующей сопряженной задачи:

$$-\frac{\partial DC^*}{\partial t} - \frac{\partial DUC^*}{\partial x} - \frac{\partial DVC^*}{\partial y} - \frac{\partial WC^*}{\partial \sigma} - D \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C^*}{\partial x} - D \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C^*}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} K \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \quad (4.1)$$

$$\Gamma : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \sigma = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \sigma = -1 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = g, \quad (4.2)$$

$$t = T : C^* = 0. \quad (4.3)$$

В итоге [7, 8] из интегрального тождества получаем

$$\sum_i \int_{B_t} Q_i^B C^* dB_t = \int_{B_t} C g dB_t, \quad (4.4)$$

где B — дно моря, $g = \delta(t - T) \delta(x - x_n) \delta(y - y_n)$, $n = 1, \dots, N$, N — общее количество точек измерений в конечный момент времени. Учитывая представления Q и g из формулы (4.4) имеем

$$\sum_i Q_i^B \int_0^T C_n^*(t, x_i, y_i, -1) dt = C(T, x_n, y_n, -1), \quad n = 1, \dots, N. \quad (4.5)$$

Таким образом, с учетом информации о концентрации в N точках для конечного момента времени строится система линейных N уравнений. В случае переопределенной системы, т.е., когда число уравнений больше числа источников, применяется один из известных методов вариационной фильтрации, например, значения Q_i^B определяются из системы (4.5) на основе метода [9], который успешно применяется при решении аналогичных задач. Для переопределенной системы (4.5) в случае наличия ошибок измерений необходима фильтрация данных с учетом всей информации, имеющейся в N уравнениях. Начальная система уравнений при помощи ортогонального преобразования плоских вращений трансформируется к некоторой эквивалентной системе. Углы поворота находятся из максимума функционала, характеризующего соотношение коэффициентов системы, априори заданной информации о решении

и правых частях. Алгоритм осуществляется итерационно. Коэффициенты такого преобразования ищутся, исходя из максимума квадратичного функционала специального вида. В итоге получается другая система алгебраических уравнений, эквивалентная (4.3) с учетом всей доступной информации.

В результате работы такой процедуры уравнения новой системы сортируются по рангу. В итоге в верхних строках системы оказываются уравнения с наилучшей информативностью.

5. Построение матрицы Якоби

Пусть $C_{\text{изм}}$ имеются в N точках, а Q_B^i задано в I точках. Матрицу Якоби, характеризующую вариацию решения в зависимости от вариаций параметров, запишем в виде

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial Q_B^1} & \frac{\partial C_2}{\partial Q_B^1} & \cdots & \frac{\partial C_N}{\partial Q_B^1} \\ \frac{\partial C_1}{\partial Q_B^2} & \frac{\partial C_2}{\partial Q_B^2} & \cdots & \frac{\partial C_N}{\partial Q_B^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial C_1}{\partial Q_B^I} & \frac{\partial C_2}{\partial Q_B^I} & \cdots & \frac{\partial C_N}{\partial Q_B^I} \end{vmatrix}. \quad (5.1)$$

Учитывая представление метода оценки (4.5), имеем

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \int_0^T C_1^*(t, x_1, y_1, -1) dt & \int_0^T C_2^*(t, x_1, y_1, -1) dt & \cdots & \int_0^T C_N^*(t, x_1, y_1, -1) dt \\ \int_0^T C_1^*(t, x_2, y_2, -1) dt & \int_0^T C_2^*(t, x_2, y_2, -1) dt & \cdots & \int_0^T C_N^*(t, x_2, y_2, -1) dt \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_0^T C_1^*(t, x_I, y_I, -1) dt & \int_0^T C_2^*(t, x_I, y_I, -1) dt & \cdots & \int_0^T C_N^*(t, x_I, y_I, -1) dt \end{vmatrix}. \quad (5.2)$$

Аналогично для мгновенного точечного источника имеем

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} C_1^*(0, x_1, y_1, -1) & C_2^*(0, x_1, y_1, -1) & \cdots & C_N^*(0, x_1, y_1, -1) \\ C_1^*(0, x_2, y_2, -1) & C_2^*(0, x_2, y_2, -1) & \cdots & C_N^*(0, x_2, y_2, -1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_1^*(0, x_I, y_I, -1) & C_2^*(0, x_I, y_I, -1) & \cdots & C_N^*(0, x_I, y_I, -1) \end{vmatrix}, \quad (5.3)$$

где C_n^* — решение сопряженной задачи для n -го измерения в соответствующих точках пространства с координатами источников загрязнения.

При выводе (5.3) учтено соотношение метода оценки (4.5) для мгновенного точечного источника.

Таким образом, имея решения сопряженных задач (4.1)–(4.3) можно сразу оценивать все члены матрицы Якоби, а значит, и Фишера (1.1). Далее по детерминанту соответствующей матрицы выбирается оптимальный план. Решая систему (4.5), оцениваем значения входных параметров. Учитывая результаты работы [10], можно заключить, что наилучший результат получается при измерении концентрации в области максимальных значений.

Результаты могут быть использованы для решения различных задач экологической направленности при изучении воздействия источников загрязнения антропогенного характера в акваториях Азовского и Черного морей.

Литература [References]

1. Горский, В.Г., *Планирование кинетических экспериментов*. Москва, Наука, 1984. [Gorskij, V.G., *Planirovanie kineticheskikh eksperimentov = Planning kinetic experiments*. Moscow, Nau-ka, 1984. (in Russian)]
2. Ермаков, С.М., Жиглявский, А.А., *Математическая теория оптимального эксперимента*. Москва, Наука, 1987. [Ermakov, S.M., Zhiglyavskij, A.A., *Matematicheskaya teoriya optimal'nogo eksperimenta = Mathematical theory of optimal experiment*. Moscow, Nauka, 1987. (in Russian)]
3. Иванов, В.А., Фомин, В.В., *Математическое моделирование динамических процессов в зоне море – суши*. Севастополь, ЭКОСИ-гидрофизика, 2008. [Ivanov V.A., Fomin V.V. *Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskikh processov v zone more-susha = Mathematical modeling of dynamic processes in the sea – land zone*. Sevastopol: EKOSI-gidrofizika, 2008. (in Russian)]
4. Пененко, В.В., Оценка параметров дискретных моделей динамики атмосферы и океана. *Метеорология и гидрология*, 1979, № 7, с. 77–90. [Penenko V.V., Estimation of parameters of discrete models of atmospheric and oceanic dynamics. *Meteorologiya i gidrologiya = Meteorology and hydrology*, 1979, no. 7, pp. 77–90. (in Russian)]
5. Марчук, Г.И., Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. Москва, Наука, 1982. [Marchuk, G.I., *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayu-shchej sredy = Mathematical modeling in environmental problems*. Moscow, Nauka, 1982. (in Russian)]
6. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Идентификация мощности источника загрязнения в Казантипском заливе на основе применения вариационного алгоритма. *Морской гидрофизический журнал*, 2015, № 2, с. 79–88. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Identification of a Pollution Source Power in the Kazantip Bay Applying the Variation Algorithm. *Morskoy gidrofizicheskiy zhurnal = Physical Oceanography*, 2015, no. 2, pp. 69–76. (in Russian)] EDN: [VDVDER](https://doi.org/10.22449/0233-7584-2015-2-79-88). DOI: [10.22449/0233-7584-2015-2-79-88](https://doi.org/10.22449/0233-7584-2015-2-79-88)
7. Кочергин, В.С., Определение поля концентрации пассивной примеси по начальным данным на основе решения сопряженных задач. *Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа*, 2011, вып. 25, т. 2, с. 370–376. [Kochergin, V.S., Determining the concentration field with used data measurements based on solving of adjoint problems. *Ekologicheskaya bezopasnost' pribrezhnoj i shel'fovoy zon i kompleksnoe ispol'zovanie resursov shel'fa = Environmental safety of coastal and shelf zones and integrated use of shelf resources*, 2011, iss. 25, vol. 2, pp. 270–376. (in Russian)]
8. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Вариационные процедуры идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2021, т. 18, № 3, с. 14–18. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Variacionnye procedury identifikacii vhodnyh parametrov modeli perenosa passivnoj primesi, *Ekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2021, vol. 18, no. 3, pp. 14–18. (in Russian)] EDN: [LVLLXX](https://doi.org/10.31429/vestnik-18-3-41-45) DOI: [10.31429/vestnik-18-3-41-45](https://doi.org/10.31429/vestnik-18-3-41-45)
9. Страхов, В.Н., Метод фильтрации систем линейных алгебраических уравнений — основа для решения линейных задач гравиметрии и магнитометрии. *Докл. АН СССР*, 1991, т. 320, № 3, с. 595–599. [Strahov, V.N., The method of filtering systems of linear algebraic equations is the basis for solving linear problems of gravimetry and magnetometry. *Dokl. AN SSSR = Rep. of the USSR Academy of Sciences*, 1991, vol. 320, no. 3, pp. 595–599. (in Russian)]
10. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Использование решения сопряженных задач при идентификации входных параметров модели переноса и планировании эксперимента. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2017, № 2, с. 42–47. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Using the solution of conjugate problems in identifying input parameters of the transfer model and planning an experiment. *Ekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2017, no. 2, pp. 42–47. (in Russian)] EDN: [ZHXFNL](https://doi.org/10.22449/0233-7584-2017-2-42-47)