УДК 517.927.4 EDN: AKVEYA DOI: 10.31429/vestnik-22-1-6-13

Положительные решения краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка

Г. Э. Абдурагимов ✉

Дагестанский государственный университет, ул. Магомеда Гаджиева, 43-а, Махачкала, 367000, Россия

✉ Абдурагимов Гусен Эльдерханович; ORCID 0000-0001-7095-932X; SPIN 9245-5007; e-mail: gusen_e@mail.ru

Аннотация. На отрезке $[0, 1]$ рассматривается двухточечная краевая задача для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка. С помощью теоремы Красносельского о неподвижных точках в конусе получены достаточные условия существования по меньшей мере одного положительного решения рассматриваемой задачи. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, положительное решение, краевая задача, конус, функция Грина.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: *Абдурагимов Г. Э.* Положительные решения краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 1. С. 6–13. EDN: AKVEYA. DOI: 10.31429/vestnik-22-1-6-13

Поступила 18 февраля 2025 г. После доработки 3 марта 2025 г. Принято 10 марта 2025 г. Публикация 27 марта 2025 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Positive Solutions to a Boundary Value Problem for one Nonlinear Ordinary Differential Equation of Even Order

G. E. Abduragimov ✉

Dagestan State University, Magomed Gadzhiev st., 43-a, Makhachkala, 367000, Russia

✉ Gusen E. Abduragimov; ORCID 0000-0001-7095-932X; e-mail: gusen_e@mail.ru

Abstract. The boundary value problem is considered

$$\begin{aligned} &x^{(2n)}(t) + f(t, x(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1,\\ &x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(2n-2)}(0) = 0,\\ &x(1) = 0, \end{aligned}$$

where $n \in N$, the function $f(t, u)$ is non-negative and continuous on $[0, 1] \times [0, \infty)$, and $f(\cdot\,, 0) \equiv 0$. Using Krasnoselsky's theorem on fixed points in a cone, sufficient conditions for the existence of at least one positive solution to the problem under consideration are obtained. Examples are given to illustrate the results obtained.

Keywords: differential equation, positive solution, boundary value problem, cone, Green's function.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Abduragimov, G. E., Positive solutions to a boundary value problem for one nonlinear ordinary differential equation of even order. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 1, pp. 6–13. DOI: 10.31429/vestnik-22-1-6-13

Received 18 February 2025. Revised 3 March 2025. Accepted 10 March 2025. Published 27 March 2025.

The author declare no competing interests.

Введение

Краевые задачи для нелинейных дифференциальных уравнений достаточно хорошо изучены. Это связано с тем, что такие задачи возникают во многих прикладных направлениях физики, билогии, экономики и др. Одним из эффективных приемов исследования разрешимости краевых задач является их сведение к эквивалентным интегральным уравнениям, ядром которых служит соответствующая функция Грина. В этой связи отметим некоторые из основных методов доказательства существования положительных решений нелинейных краевых задач такие как монотонные итерационные методы, метод верхних и нижних решений, теоремы о неподвижных точках. Заметим, что большую роль здесь играет положительная определенность функции Грина.

Приведем обзор некоторых работ с близкими к настоящей статье результатами. В [1], используя функцию Грина, с помощью теоремы Красносельского о неподвижной точке было доказано существование положительного решения краевой задачи

$$\begin{aligned}
&(-1)^n x^{(2n)}(t) = f(t, x(t)), \qquad 0 < t < 1,\\
&\alpha_i x^{(2i)}(0) - \beta_i x^{(2i+1)}(0) = 0, \qquad i = 0, \dots, n-1,\\
&\gamma_i x^{(2i)}(1) + \delta_i x^{(2i+1)}(1) = 0, \qquad i = 0, \dots, n-1,
\end{aligned}$$

где f – непрерывная и положительная функция, α_i, β_i, γ_i и δ_i – неотрицательные числа, причем $\alpha_i\delta_i + \gamma_i\delta_i + \alpha_i\beta_i > 0$. Частные случаи этой задачи были подробно изучены, например, в [2, 3].

В [4] с применением теоремы Красносельского о неподвижной точке в конусах были получены достаточные условия существования положительного решения краевой задачи

$$\begin{aligned}
&(-1)^n x^{(2n)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(2j)}(t), \dots, x^{(2(n-1))}(t)), \qquad 0 < t < 1,\\
&x^{(2i)}(0) = 0, \qquad i = 0, \dots, n-1,\\
&x^{(2i)}(1) = 0, \qquad i = 0, \dots, n-1,
\end{aligned}$$

при предположениях

$$\begin{aligned}
f_0 &= \lim_{p\to 0^+} \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t, x_1, \dots, x_{n-1}, (-1)^{n-1}p)}{p} \in \{0, +\infty\},\\
f_\infty &= \lim_{p\to \infty} \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t, x_1, \dots, x_{n-1}, (-1)^{n-1}p)}{p} \in \{0, +\infty\},\\
f^0 &= \lim_{p\to 0^+} \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t, x_1, \dots, x_{n-1}, (-1)^{n-1}p)}{p} \in \{0, +\infty\},\\
f^\infty &= \lim_{p\to \infty} \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t, x_1, \dots, x_{n-1}, (-1)^{n-1}p)}{p} \in \{0, +\infty\},
\end{aligned}$$

где приведенные выше пределы однородны по $x_1, \dots, x_{n-1}$.

Существование положительного решения предыдущей задачи другим методом было установлено в [5] в предположениях

$$f_0 = \lim_{\|X\|\to 0} \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t, X)}{\|X\|} = 0, \quad f_\infty = \lim_{\|X\|\to 0} \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t, X)}{\|X\|} = \infty,$$

или

$$f_0 = \lim_{\|X\|\to 0} \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t, X)}{\|X\|} = \infty, \quad f_\infty = \lim_{\|X\|\to 0} \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t, X)}{\|X\|} = 0,$$

где $X = (x_0, \dots, x_{n-1})$ и $\|X\| = \max\{|x_0|, \dots, |x_{n-1}|\}$.

В этом контексте, по-видимому, приведенная в работе краевая задача ранее не рассматривалась и представляет собой продолжение цикла результатов автора [6,7], посвященного вопросам существования положительных решений краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений четного порядка.

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим краевую задачу

$$x^{(2n)}(t) + f(t, x(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{1.1}$$

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(2n-2)}(0) = 0, \tag{1.2}$$

$$x(1) = 0, \tag{1.3}$$

где $n \in N$, функция $f(t,u)$ неотрицательна и непрерывна на $[0,1] \times [0,\infty)$, причем $f(\,\cdot\,,0) \equiv 0$.

Определение 1. Под *положительным* решением задачи (1.1)–(1.3) будем понимать функцию $x \in C^{2n}_{[0,1]}$, положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую на указанном интервале уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2) и (1.3).

Ниже приведена лемма, доказательство которой опирается на классическую схему построения функции Грина дифференциального оператора и ввиду простоты опущено.

Лемма 1. Для любой неотрицательной и непрерывной на $[0,1]$ функции $h(t)$ краевая задача

$$u^{(2n)}(t) + h(t) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{1.4}$$

$$u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(2n-2)}(0) = 0, \tag{1.5}$$

$$u(1) = 0, \tag{1.6}$$

имеет единственное положительное решение

$$u(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)h(s)\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где

$$G(t,s) = \frac{1}{(2n-1)!}\begin{cases}(t-ts)^{2n-1}, & 0 \leqslant t \leqslant s,\\ (t-ts)^{2n-1} - (t-s)^{2n-1}, & s \leqslant t \leqslant 1.\end{cases}$$

Лемма 2. Функция Грина $G(t,s)$ обладает следующими свойствами:

1) $G(t,s) > 0, \quad t,s \in (0{,}1);$

2) $\dfrac{\varphi^{2n-1}(t)\varphi^{2n-1}(s)}{(2n-1)!} \leqslant G(t,s) \leqslant \dfrac{\varphi^{2n-1}(s)}{(2n-1)!}, \quad t,s \in [0,1],$

где $\varphi(t) = \min\{t, 1-t\}$.

Доказательство. Условие 1 леммы очевидно, поэтому перейдем к доказательству оценки 2. При $t \leqslant s$ имеем

$$G(t,s) = \frac{1}{(2n-1)!}t^{2n-1}(1-s)^{2n-1} \leqslant \frac{(s-s^2)^{2n-1}}{(2n-1)!} \leqslant \frac{\varphi^{2n-1}(s)}{(2n-1)!}.$$

С другой стороны при $t \geqslant s$

$$G(t,s) = \frac{1}{(2n-1)!}[(t-ts)^{2n-1} - (t-s)^{2n-1}] \leqslant \frac{1}{(2n-1)!}t^{2n-1}(1-s)^{2n-1} \leqslant \frac{\varphi^{2n-1}(s)}{(2n-1)!}.$$

Итак, имеем

$$G(t,s) \leqslant \frac{\varphi^{2n-1}(s)}{(2n-1)!}.$$

Докажем теперь левую часть неравенства 2 леммы. При $t \leqslant s$ достаточно очевидно выполнение рассматриваемого неравенства. В случае $t \geqslant s$, воспользовавшись формулой разности степеней, имеем

$$G(t,s) = \frac{1}{(2n-1)!}[(t-ts)^{2n-1} - (t-s)^{2n-1}] =$$
$$= \frac{s(1-t)[(t-ts)^{2n-2} + \cdots + (t-s)^{2n-2}]}{(2n-1)!} \geqslant \frac{s(1-t)(t-ts)^{2n-2}}{(2n-1)!} \geqslant \frac{s^{2n-1}(1-t)(1-s)^{2n-2}}{(2n-1)!} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{s^{2n-1}(1-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} \geqslant \frac{\varphi^{2n-1}(s)\varphi^{2n-1}(t)}{(2n-1)!}.$$

Лемма доказана. □

Обозначим через K конус неотрицательных функций $x(t)$ пространства $C_{[0,1]}$, удовлетворяющих условию

$$x(t) \geqslant \varphi^{2n-1}(t)\|x\|_{C_{[0,1]}}, \quad t \in [0,1].$$

В дальнейшем для удобства выкладок в обозначении нормы $\|\cdot\|_{C_{[0,1]}}$ соответствующий индекс условимся опускать.

Определим оператор $A : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}$ формулой

$$Ax(t) = \int\limits_0^1 G(t,s) f(s, x(s))\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Замечание 1. Согласно лемме 1 краевая задача (1.1)–(1.3) имеет положительное решение $x(t)$ тогда и только тогда, когда x — неподвижная точка оператора A.

Лемма 3. Оператор $A : K \to K$ вполне непрерывен.

Доказательство. Из леммы 2 непосредственно следует инвариантность конуса K относительно A. Вполне непрерывность оператора A легко устанавливается с помощью теоремы Арцела–Асколли. Лемма доказана. □

Для доказательства существования по крайней мере одного положительного решения задачи (1.1)–(1.3) нам понадобится следующая известная теорема Красносельского [8].

Теорема 1. Пусть X — банахово пространство и $P \subset X$ — конус в X. Предположим Ω_1, Ω_2 — открытые подмножества в X с $0 \in \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ и $\mathcal{A} : P \to P$ — вполне непрерывный оператор такой, что

(*i*) $\|\mathcal{A}u\| \leqslant \|u\|$, $\forall u \in P \cap \partial\Omega_1$ и $\|\mathcal{A}u\| \geqslant \|u\|$, $\forall u \in P \cap \partial\Omega_2$, или

(*ii*) $\|\mathcal{A}u\| \geqslant \|u\|$, $\forall u \in P \cap \partial\Omega_1$ и $\|\mathcal{A}u\| \leqslant \|u\|$, $\forall u \in P \cap \partial\Omega_2$.

Тогда $\mathcal{A}$ имеет неподвижную точку в $P \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$.

Для удобства выкладок введем следующие обозначения

$$f_0^{\max} = \lim_{x\to 0^+} \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x}, \quad f_\infty^{\min} = \lim_{x\to+\infty} \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x},$$
$$f_0^{\min} = \lim_{x\to 0^+} \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x}, \quad f_\infty^{\max} = \lim_{x\to+\infty} \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x}.$$

Теорема 2. При выполнении условий $f_0^{\max} = 0$ и $f_\infty^{\min} = \infty$ краевая задача (1.1)–(1.3) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Доказательство. Поскольку $f_0^{\max} = 0$, то найдется число $r > 0$ такое, что при $t \in [0, 1]$

$$f(t, x) \leqslant \delta x, \quad 0 < x \leqslant r, \tag{1.7}$$

где $0 < \delta \leqslant 4^n n(2n-1)!$.

Пусть $\Omega_r = \{x \in C_{[0,1]} : \|x\| < r\}$ и $\partial\Omega_r = \{x \in C_{[0,1]} : \|x\| = r\}$. Для $x \in K \cap \partial\Omega_r$ в силу (1.7) и леммы 2 имеем

$$Ax(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s))\, \mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^1 \varphi^{2n-1}(s) f(s, x(s))\, \mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta}{(2n-1)!} \|x\| \int_0^1 \varphi^{2n-1}(s)\, \mathrm{d}s = \frac{\delta}{(2n-1)! n 4^n} \|x\| \leqslant \|x\|,$$

откуда следует, что

$$\|Ax\| \leqslant \|x\|, \quad x \in K \cap \partial\Omega_r.$$

Далее, так как $f_\infty^{\min} = \infty$, то существует число $H > 0$ такое, что при $t \in [0, 1]$

$$f(t, x) \geqslant \sigma x, \quad x \geqslant H, \tag{1.8}$$

где $8^{2n-1}(4n-1)(2n-1)! \leqslant \sigma < \infty$.

Пусть $R > 0$ — некоторое положительное число, выбор которого определим ниже. Положим $\Omega_R = \{x \in C_{[0,1]} : \|x\| < R\}$ и $\partial\Omega_R = \{x \in C_{[0,1]} : \|x\| = R\}$. В частности, легко видеть, что при $t \in [1/3,\, 2/3]$ и $x \in K \cap \partial\Omega_R$

$$x(t) \geqslant \varphi^{2n-1}(t)\|x\| \geqslant \varphi^{2n-1}\left(\tfrac{1}{3}\right)\|x\| = \frac{R}{3^{2n-1}} \geqslant H,$$

где $R = \max\left\{2r, \dfrac{H}{3^{2n-1}}\right\}$. В силу (1.8), используя лемму 2, при $x \in K \cap \partial\Omega_R$ имеем

$$Ax\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^1 G\left(\tfrac{1}{2}, s\right) f(s, x(s))(s)\, \mathrm{d}s \geqslant \frac{1}{(2n-1)!} \varphi^{2n-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) \int_0^1 \varphi^{2n-1}(s) f(s, x(s))\, \mathrm{d}s \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\sigma}{2^{2n-1}(2n-1)!} \int_0^1 \varphi^{2n-1}(s) x(s)\, \mathrm{d}s \geqslant \frac{\sigma}{2^{2n-1}(2n-1)!} \|x\| \int_0^1 \varphi^{4n-2}(s)\, \mathrm{d}s \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\sigma}{8^{2n-1}(4n-1)(2n-1)!} \|x\| \geqslant \|x\|.$$

Отсюда окончательно получим

$$\|Ax\| \geqslant \|x\|, \quad x \in K \cap \partial\Omega_R.$$

Согласно теореме 1 оператор A имеет неподвижную точку x в $K \cap (\overline{\Omega}_R \backslash \Omega_r)$ такую, что $r \leqslant \|x\| \leqslant R$, что равносильно существованию по крайней мере одного положительного решения краевой задачи (1.1)–(1.3). □

Теорема 3. Пусть $f_0^{\min} = \infty$ и $f_\infty^{\max} = 0$. Тогда краевая задача (1.1)–(1.3) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Доказательство. Из условия теоремы $f_0^{\min} = \infty$ вытекает существование числа $r > 0$ такого, что $t \in [0,1]$

$$f(t,x) \geqslant \lambda x, \quad 0 < x \leqslant r, \tag{1.9}$$

где $8^{2n-1}(4n-1)(2n-1)! \leqslant \lambda < \infty$.

Пусть $\Omega_r = \{x \in C_{[0,1]} : \|x\| < r\}$. Для $x \in K \cap \partial\Omega_r$, воспользовавшись (1.9) и леммой 2, получим

$$Ax(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,x(s))(s)\,\mathrm{d}s \geqslant \frac{1}{(2n-1)!}\varphi^{2n-1}(t)\int_0^1 \varphi^{2n-1}(s) f(s,x(s))\,\mathrm{d}s \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\lambda}{(2n-1)!}\varphi^{2n-1}(t)\int_0^1 \varphi^{2n-1}(s)x(s)\,\mathrm{d}s \geqslant \frac{\lambda}{(2n-1)!}\varphi^{2n-1}(t)\|x\|\int_0^1 \varphi^{4n-2}(s)\,\mathrm{d}s \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\lambda}{4^{2n-1}(4n-1)(2n-1)!}\varphi^{2n-1}(t)\|x\|.$$

Перейдя к максимуму в последнем неравенстве, придем к соотношению

$$\|Ax\| \geqslant \|x\|, \quad x \in K \cap \partial\Omega_r.$$

Далее, рассмотрим два случая: f ограничена и f неограничена. В первом случае существует число $L > 0$ такое, что при $t \in [0,1]$

$$f(t,x) \leqslant L, \quad x \in [0,\infty). \tag{1.10}$$

Пусть $\Omega_R = \{x \in C_{[0,1]} : \|x\| < R\}$, где $R = \max\left\{2r, \dfrac{L}{4^n n(2n-1)!}\right\}$. Для $x \in K \cap \partial\Omega_R$ в силу (1.10) и леммы 2 получим

$$Ax(t) \leqslant \frac{1}{(2n-1)!}\int_0^1 \varphi^{2n-1}(s) f(s,x(s))\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{L}{(2n-1)!}\int_0^1 \varphi^{2n-1}(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{L}{4^n n(2n-1)!} \leqslant R = \|x\|$$

и, следовательно

$$\|Ax\| \leqslant \|x\|, \quad x \in K \cap \partial\Omega_R.$$

Пусть теперь функция f неограничена. В силу условия $f_\infty^{\max} = 0$ найдется положительное число $\tilde{R}$ ($\tilde{R} > r$) такое, что при $t \in [0,1]$

$$f(t,x) \leqslant \gamma x, \quad x \geqslant \tilde{R},$$

где $0 < \gamma \leqslant 4^n n(2n-1)!$.

Непрерывность f влечет существование числа ξ, такого что при $t \in [0,1]$

$$f(t,x) \leqslant \gamma\xi, \quad 0 \leqslant x \leqslant \tilde{R}.$$

Положим $\Omega_R = \{x \in C_{[0,1]} : \|x\| < R\}$, где $R = \max\{\xi, \tilde{R}\}$. При $x \in K \cap \partial\Omega_R$, очевидно, $f(t,x) \leqslant \gamma R$. При $x \in K \cap \partial\Omega_R$, опираясь на лемму 2, имеем

$$Ax(t) \leqslant \frac{1}{(2n-1)!}\int_0^1 \varphi^{2n-1}(s) f(s,x(s))\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{\gamma R}{(2n-1)!}\int_0^1 \varphi^{2n-1}(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{\gamma R}{4^n n(2n-1)!} \leqslant R = \|x\|.$$

Отсюда следует, что

$$\|Ax\| \leqslant \|x\|, \quad x \in K \cap \partial\Omega_R.$$

Таким образом, согласно теореме 1 оператор A имеет неподвижную точку x в $K \cap (\overline{\Omega}_R \backslash \Omega_r)$, что равносильно существованию по крайней мере одного положительного решения краевой задачи (1.1)–(1.3). □

2. Примеры

В заключении приведен примеры, иллюстрирующие выполнение полученных результатов.

Пример 1. Рассмотрим краевую задачу

$$x^{(4)}(t) + e^t x^2(t) e^{x(t)} = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{2.1}$$

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, \tag{2.2}$$

$$x(1) = 0. \tag{2.3}$$

Здесь $n = 2$ и $f(t, x) = e^t x^2 e^x$. Имеем

$$\lim_{x\to 0^+} \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \max_{t\in[0,1]} \frac{e^t x^2 e^x}{x} = 0,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \min_{t\in[0,1]} \frac{e^t x^2 e^x}{x} = +\infty.$$

Следовательно, в соответствии с теоремой 2 задача (2.1)–(2.3) имеет по меньшей мере одно положительное решение.

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу

$$x^{(6)}(t) + (t+1)\sqrt{x(t)} + ln(1 + x(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{2.4}$$

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = x^{(4)}(0) = 0, \tag{2.5}$$

$$x(1) = 0. \tag{2.6}$$

Здесь $n = 3$ и $f(t, x) = (t+1)\sqrt{x(t)} + \ln(1 + x(t))$. Имеем

$$\lim_{x\to 0^+} \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \max_{t\in[0,1]} \frac{(t+1)\sqrt{x} + \ln(1+x)}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t,x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \min_{t\in[0,1]} \frac{(t+1)\sqrt{x} + ln(1+x)}{x} = 0.$$

Согласно теореме 3 задача (2.4)–(2.6) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Заключение

Рассматрена двухточечная краевая задача для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка. С помощью функции Грина эта задача была редуцирована к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению. Далее, при помощи теоремы Го–Красносельского, было установлено существование по меньшей мере одного положительного решения исследуемой задачи. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Литература [References]

1. Chyan, C. J., Henderson, J., Multiple solutions for 2mth-order Sturm-Liouville boundary value problems. *Comput. Math. Appl.*, 2000, vol. 40, pp. 231–237. DOI: 10.1016/S0898-1221(00)00156-5
2. Graef, J. R., Yang, B., On a nonlinear boundary-value problem for fourth-order equations. *Appl. Anal.*, 1999, vol. 72, pp. 439–448. DOI: 10.1080/00036819908840751
3. Graef, J. R., Yang, B., Existence and non-existence of positive solutions of fourth-order nonlinear boundary-value problems. *Appl. Anal.*, 2000, vol. 74, pp. 201–204. DOI: 10.1080/00036810008840810
4. Chyan, C. J., Henderson, J., Positive solutions of 2mth-order boundary value problems. *Appl. Math. Lett.*, 2002, vol. 15, pp. 767–774. DOI: 10.1016/S0893-9659(02)00040-X
5. Palamides, P. K., Positive solutions for higher-order Lidstone boundary value problems. A new approach Via Sperner's Lemma. *Comput. Math. Appl.*, 2001, vol. 42, pp. 75–89. DOI: 10.1016/s0898-1221(01)00132-8

6. Абдурагимов, Г. Э., Абдурагимова, П. Э., Курамагомедова, М. М., О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка. *Вестник российских университетов. Математика*, 2021, т. 26, № 136, с. 341–347. [Abduragimov, G.E., Abduragimova, P.E., Kuramagomedova, M.M., On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear ordinary differential equation of even order. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no 136, pp. 341–347. (in Russian)] DOI: 10.20310/2686-9667-2021-26-136-341-347
7. Абдурагимов, Г. Э., О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения $4n$-го порядка. *Известия высших учебных заведений. Математика*, 2023, т. 9, с. 20–26. [Abduragimov, G.E., On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for one nonlinear ordinary differential equation of $4n^{\text{th}}$ order. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika = Russian Mathematics*, 2023. vol. 67. no 9. pp. 16–22. (in Russian)] DOI: 10.3103/s1066369x23090025
8. Guo, D., Lakshmikantham, V., *Nonlinear Problems in Abstract Cones.* Academic Press, New York, 1988.