

УДК 539.3

EDN: WHIFJS DOI: 10.31429/vestnik-22-2-31-44

Использование метода компенсированной нагрузки для решения задачи взаимодействия плоской гармонической волны с плоской пластиной в упругой грунтовой среде при различных граничных условиях

Ван Дай Во^{1,2✉}, Н. А. Локтева¹¹ Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Волоколамское шоссе, 4, Москва, 125993, Россия² Технический университет Ле Куй Дон, 236, Хоанг Куок Вьетнам, Ханой, 10065, Вьетнам✉ Во Ван Дай; ORCID 0000-0001-5397-7403; e-mail: vodaimta.15@gmail.com

Аннотация. В данной статье исследуется метод компенсированной нагрузки для решения задачи взаимодействия плоской гармонической волны с плоской пластиной в упругой грунтовой среде. Основная цель данной работы заключается в определении перемещений на границе преграды и грунта. Решить задачу о движении однородной преграды, закрепленной любым способом, отличным от шарнирного крепления, будет использоваться подход, основанный на удовлетворении граничных условий с использованием компенсирующих нагрузок. Находятся поверхностные функции влияния, что в дальнейшем позволит задать отраженную и прошедшую сквозь преграду волны. Затем на основе граничных условий определяются компенсированные нагрузки, с помощью которых вычисляются перемещения пластины.

Ключевые слова: пластина Кирхгофа, компенсирующие нагрузки, функция влияния, гармоническое воздействие.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Во Ван Дай, Локтева Н. А. Использование метода компенсированной нагрузки для решения задачи взаимодействия плоской гармонической волны с плоской пластиной в упругой грунтовой среде при различных граничных условиях // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 2. С. 31–44. EDN: WHIFJS. DOI: 10.31429/vestnik-22-2-31-44

Поступила 28 февраля 2025 г. После доработки 28 мая 2025 г. Принято 15 июня 2025 г. Публикация 30 июня 2025 г.

Вклад каждого соавтора в процесс написания статьи на разных этапах ее создания: идея работы (Локтева Н.А., Во Ван Дай), расчет и построение графиков (Локтева Н.А., Во Ван Дай), написание статьи (Во Ван Дай), внесение правок и утверждение окончательного варианта (Локтева Н.А.). Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2025. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

The Use of the Compensated Load Method for Solving the Problem of the Interaction of a Plane Harmonic Wave with a Flat Plate in an Elastic Soil Medium under Various Boundary Conditions

V. D. Vo^{1,2✉}, N. A. Lokteva¹¹ Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, 125993, Russia² Le Quy Don Technical University, 236, Hoang Quoc Viet, Hanoi, 10065, Vietnam✉ Van Dai Vo; ORCID 0000-0001-5397-7403; e-mail: vodaimta.15@gmail.com

Abstract. This paper investigates the compensated load method for solving the problem of the interaction of a plane harmonic wave with a flat plate in an elastic soil medium. The main objective of this study is to determine the displacements at the boundary between the obstacle and the soil. To solve the problem of the motion of a homogeneous obstacle fixed in any way other than hinge support, an approach based on satisfying boundary conditions using compensating loads is employed. Surface influence functions are determined, which subsequently allow for the characterization of the reflected and transmitted waves passing through the obstacle. Then, based on the boundary conditions, the compensated loads are determined, enabling the calculation of the plate displacements.

Keywords: Kirchhoff plate, compensating loads, influence function, harmonic excitation.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Vo, V. D., Lokteva, N. A., The use of the compensated load method for solving the problem of the interaction of a plane harmonic wave with a flat plate in an elastic soil medium under various boundary conditions. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 2, pp. 31–44. DOI: 10.31429/vestnik-22-2-31-44

Received 28 February 2025. Revised 28 May 2025. Accepted 15 June 2025. Published 30 June 2025.

The contribution of each co-author to the writing process of the article at different stages of its creation is as follows: conception of the study (Lokteva N.A., Vo Van Dai), calculations and plotting (Lokteva N.A., Vo Van Dai), manuscript writing (Vo Van Dai), revisions and approval of the final version (Lokteva N.A.). The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2025. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](#) license.

Введение

В целом, существует множество причин, вызывающих колебания и вибрации в грунте, включая как антропогенные, так и природные факторы (землетрясения и т.д.). Для стран, часто страдающих от землетрясений или сейсмических волн, крайне важно разрабатывать решения для поглощения вибраций и минимизации ущерба от землетрясений. На производственных предприятиях, где задействованы крупные мощности, также возникают источники колебаний и вибраций, опасных для зданий и окружающего оборудования. При подземной разработке полезных ископаемых также необходимо принимать меры для защиты людей и оборудования от вибраций, вызванных работой машин. С развитием экономики строительство и эксплуатация транспортной инфраструктуры (особенно метрополитенов) требуют наличия методов защиты как для людей, так и для существующих сооружений. Все эти факторы оказывают негативное воздействие на фундамент зданий, сооружений, оборудования и людей в различной степени. Поэтому защита сооружений от негативных последствий колебаний и вибраций является актуальной проблемой, активно изучаемой учеными по всему миру. В данной работе внимание будет сосредоточено на снижении уровня вибраций с помощью организации пассивной виброзащиты в виде вибропоглощающих препятствий, моделями которых будут выступать однородные преграды, помещенные в упругую среду, имитирующую грунт. Для решения поставленной задачи использован метод компенсирующих нагрузок, который позволяет решать подобные задачи для любых реальных видов закрепления преград.

До сих пор метод компенсированной нагрузки использовался многими учеными для решения механических проблем. В статье [1, 2] используется метод компенсации нагрузок для решения поставленных задач. Рассматриваются как основные, так и компенсирующие решения, и применяется новый подход, связанный с использованием уравнения Нильсена, для получения решений. Впервые с помощью метода компенсации нагрузок получены точные аналитические решения задач циклически симметричного изгиба анизотропных круглых пластин, опирающихся на упругое основание. Рассматриваются различные граничные условия и нагрузки, распределенные по окружности и на кольцевых поверхностях, а также задача анизотропной бесконечной пластины с круговым отверстием, опирающейся на упругое основание. Все решения представлены в замкнутой форме и выражены через функции Бесселя. Метод компенсирующих нагрузок представляет собой мощный инструмент для анализа нестационарного напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек, особенно из анизотропных материалов. В работе [3, 4] Локтевой Н.А. и коллег метод компенсирующих нагрузок адаптируется для анализа оболочек с локальными шарнирными опорами, где строится функция Грина с учетом дискретных граничных условий.

В аналитических расчетах удобнее всего использовать функции влияния (Грина). В работах [5–7] Сердюка Д.О., Федотенкова Г.В. и их коллег демонстрируется грамотное использование данного метода для определения реакции всей исследуемой системы на дельта-функцию Дирака с последующей свёрткой с любой интересующей нагрузкой. Из работ видно, что

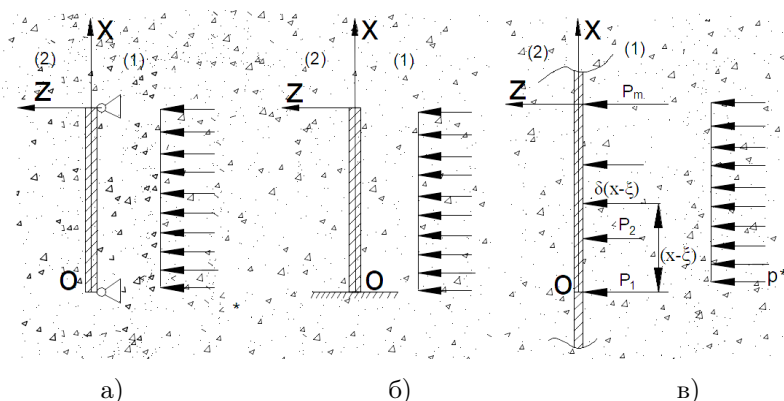


Рис. 1. Модель взаимодействия пластины с волнами в грунте: а) шарнирно опертая преграда; б) правый край пластины жестко закреплен, а левый — свободен; в) бесконечная пластина с приложенными к ней компенсирующими нагрузками, обеспечивающими выполнение граничных условий

Fig. 1. Model of interaction of a plate with waves in the ground: a) hingedly supported barrier; б) the right edge of the plate is rigidly fixed, and the left — is free; в) an infinite plate with compensating loads applied to it, ensuring the fulfillment of boundary conditions

функция влияния широко применяется для решения задач по определению напряжённого состояния в пластинах и оболочках различных видов и свойств материала.

Применение метода компенсирующих нагрузок позволяет учитывать сложные граничные условия, что делает его универсальным и полезным для широкого спектра инженерных задач.

1. Общая постановка задачи

Рассматривается пластина преграды, окруженная с двух сторон грунтом, моделировать который предполагается с помощью уравнений теории упругости, описывающих упругую среду. Правый край пластины жестко закреплен, а левый — свободен (рис. 1б). Среды, окружающие пластину, обозначаются соответственно «1» и «2». Изотропная упругая среда «1» имеет плотность ρ , со скоростью распространения в ней продольных волн растяжения – сжатия c_1 и скоростью распространения сдвиговых волн c_2 . Предполагается, что скорости распространения волн в средах «1» и «2» будут одинаковыми, однако предложенный подход подразумевает возможность рассмотрения различных сред по разные стороны от вибропоглощающего препятствия.

Рассматриваемая пластина типа Кирхгофа–Лява постоянной толщины h и длины l находится в декартовой системе координат Oxy где плоскость oxy является срединной для пластины, а ось oz направлена в глубину среды «2», при заданных граничных условиях. Предполагается, что преграда и оба полупространства имеют бесконечные размеры вдоль координаты y , вследствие чего все рассматриваемые функции не зависят от этой координаты.

На пластину набегают гармоническая плоская волна с амплитудой давления на фронте p^* и частотой ω . Начальные условия нулевые. В результате ее взаимодействия с пластиной в окружающих средах «1» и «2» возбуждаются давления с амплитудами p_1 и p_2 соответственно. На границе сред и пластины значения амплитуд давлений будут совпадать с напряжениями в грунте, где p_2 — амплитуда давления прошедшей волны, p_1 — определяется следующим образом:

$$p_1 = p^* + p_{1w} \quad (1.1)$$

В формуле (1.1) p_{1w} — амплитуда давления отраженной волны.

При этом математическая постановка задачи включает в себя задание амплитуды давления набегающей волны p^* , краевую задачу для пластины, а также условия контакта на границе пластины и среды.

2. Методы решение задачи

В п. 1 выполнена постановка задачи о прохождении плоской гармонической волны через преграду в виде пластины Кирхгофа. Общий подход к решению данной задачи представляет из себя набор решений вспомогательных задач, результаты которых применяются в решении связанной задачи, представлен на рис. 2.

Решение задачи с произвольными граничными условиями будет складываться фактически из объединения решений двух задач.

В первую очередь, рассматривается задача прохождения гармонической плоской волны через бесконечную пластину и определению перемещения $w^\infty(x, \omega)$ средней линии пластины под воздействием набегающей волны из первой среды.

Далее необходимо определить функцию влияния для нормальных перемещений бесконечной пластины Кирхгофа, определяется функция влияния G_w .

Во-вторых, необходимо найти перемещение пластины как свертку функции влияния G_w с внешним силовым фактором P_n — компенсационными нагрузками [2, 8]. В силу особенности модели пластины используются только силы. Величины данных сил определяются из конкретных граничных условий:

– шарнирно опертая преграда:

$$w|_{x=0,l} = 0, \quad w''|_{x=0,l} = 0, \quad (2.1)$$

– левый край пластины жестко закреплён, а правый — свободен:

$$w|_{x=0} = 0, \quad w'|_{x=0} = 0, \quad w''|_{x=l} = 0, \quad w'''|_{x=l} = 0. \quad (2.2)$$

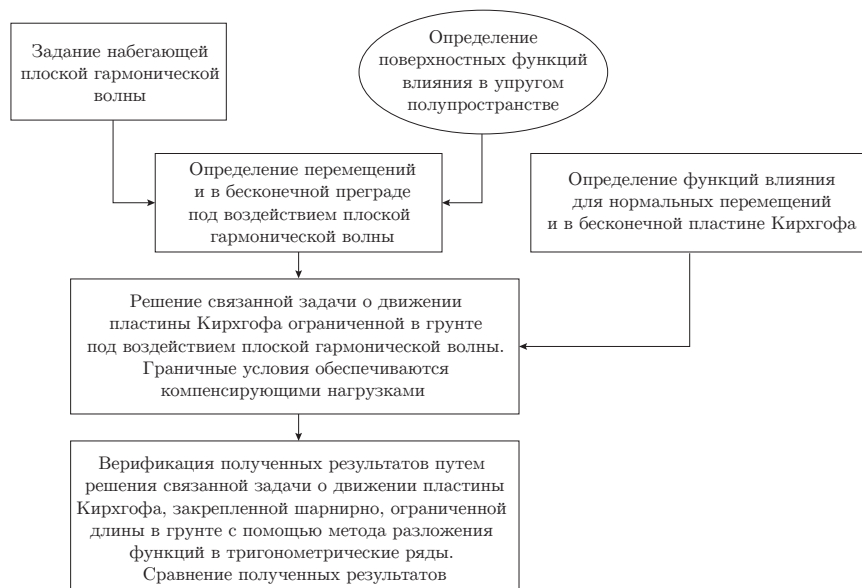


Рис. 2. Последовательность действий при решении задачи о прохождении волны сквозь преграду ограниченной длины

Fig. 2. Sequence of actions when solving the problem of the passage of a wave through an obstacle of limited length

После этого перемещение пластины с искомыми граничными условиями определяется как (знак «*» означает свертку):

$$w(x, \omega) = w^\infty(x, \omega) + \sum_1^j G_w(x - \xi, \omega) * P_n, \quad (2.3)$$

где n — порядковый номер граничного условия, j — количество граничных условий на краях ограниченной пластины, P_n — силы приложенные к бесконечной пластине таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия. После чего перемещение средней линии пластины при произвольных граничных условиях определяют на основании формулы (2.3).

3. Задание движения грунта в плоской гармонической набегающей волне

В качестве модели грунта будем использовать однородную упругую изотропную среду, где $\rho_{\text{гр}}$ и λ, μ — плотность и упругие постоянные Ламе грунта, $E_{\text{гр}}$ — модуль упругости грунта, $\nu_{\text{гр}}$ — коэффициент Пуассона грунта, c_1 и c_2 — скорости распространения волн растяжения – сжатия и сдвига. Также использованы:

– соотношения Коши

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}; \quad (3.1)$$

– физический закон

$$\sigma_{11} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11}, \quad \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{33} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{33}; \quad (3.2)$$

– система относительно скалярного потенциала φ и компонент ψ векторного потенциала перемещений

$$\ddot{\varphi} = c_1^2 \Delta \varphi, \quad \ddot{\psi} = c_2^2 \Delta \psi, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_{\text{гр}}}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho_{\text{гр}}}; \quad (3.3)$$

– связь потенциалов и перемещений

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.4)$$

где u и w — перемещения вдоль осей Ox и Oz соответственно; σ_{ij} и ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций; θ — коэффициент объемного расширения.

Для задания набегающей волны рассмотрим плоскую одномерную волну растяжения-сжатия ($\psi \equiv 0$) [8], распространяющуюся вдоль положительного направления оси Oz . В этом случае в первом из уравнений в (3.3) полагаем $\varphi = \varphi(z)$. В результате приходим к следующему уравнению относительно амплитуды потенциала (здесь штрихами обозначена производная по z):

$$\varphi_a'' + k_1^2 \varphi_a = 0, \quad (3.5)$$

$$\varphi_a = A_\varphi e^{-ik_1 z}. \quad (3.6)$$

Отсюда и из $\varphi = \varphi_a e^{i\omega t}$ получаем, что потенциал имеет вид бегущей волны

$$\varphi = A_\varphi e^{-ik_1(z - c_1 t)}. \quad (3.7)$$

Подставляя это равенство последовательно в (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), получаем следующие формулы для перемещений, деформаций и напряжений:

$$\sigma_{33} = -(\lambda + 2\mu) k_1^2 A_\varphi e^{-ik_1(z - c_1 t)} = -\rho \omega^2 A_\varphi e^{-ik_1(z - c_1 t)}. \quad (3.8)$$

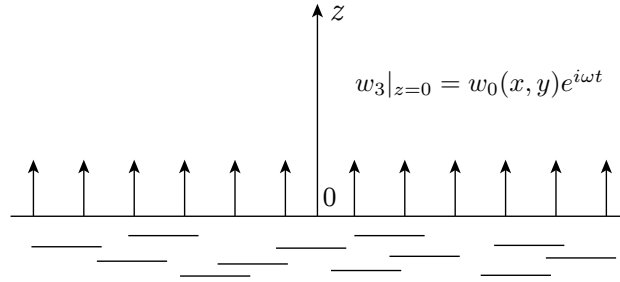


Рис. 3. Единичное поле перемещений на границе упругого полупространства

Fig. 3. Unit displacement field on the boundary of an elastic half-space

Отсюда, учитывая, что $\sigma_{33}|_{t=0, z=0} = p_*$, для перемещений и напряжений в набегающей волне получаем формулы (приведены только их амплитудные значения):

$$\begin{aligned} u &= u_* \equiv 0, \quad w = w_* = \frac{ik_1 p_*}{\rho \omega^2} e^{-ik_1 z} = \frac{ip_*}{\rho c_1 \omega} e^{-ik_1 z}, \quad A_\varphi = -\frac{p_*}{\rho \omega^2}, \\ \sigma_{11} &= \sigma_{11*} = \kappa p_* e^{-ik_1 z}, \quad \sigma_{33} = \sigma_{33*} = p_* e^{-ik_1 z}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{13*} \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Необходимо определить координаты и модуль поля ускорений во втором полупространстве как функций частоты ω и пространственных координат x и z в зависимости от параметров пластины:

$$a_x = -\omega^2 u^{(2)}, \quad a_z = -\omega^2 w^{(2)} \quad (3.10)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_z^2}. \quad (3.11)$$

Абсолютные величины ускорений (3.10) и (3.11) иногда удобно относить к соответствующим величинам a_{*x} , a_{*z} и $a_* = \sqrt{a_{*x}^2 + a_{*z}^2}$ на фронте набегающей волны на поверхности пластины в момент касания

$$\gamma_{ax} = a_x/a_{*x}, \quad \gamma_{az} = a_z/a_{*z}, \quad \gamma_a = a/a_*. \quad (3.12)$$

Величины a_{*x} , a_{*z} и a_* определяются в форме:

– плоская волна

$$a_{x*} \equiv 0, \quad a_{z*} = -\frac{ip_* k_1}{\rho}, \quad a_* = \frac{p_* k_1}{\rho}. \quad (3.13)$$

4. Определение поверхностных функций влияния и установление связи движения среды и перемещений пластины

Для решения задачи в связанной постановке необходимо определить связи давлений с кинематическими параметрами пластины, для чего рассматривается следующая вспомогательная задача. Рассматривается упругое полупространство, на границе которого возникает единичное поле перемещений, меняющееся по гармоническому закону (рис. 3)

$$w = w_a e^{i\omega t}. \quad (4.1)$$

На границе при $z = 0$ перемещение $w_a = 1$.

Уравнения движения среды относительно скалярного потенциала φ и компонент ψ [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= c_1^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= c_2^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Скалярный потенциал является гармонической функцией по времени $\varphi = \varphi_a e^{i\omega t}$, $\psi = \psi_a e^{i\omega t}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k_1^2 \varphi &= 0, \quad k_1^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k_2^2 \psi &= 0, \quad k_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Применив преобразование Фурье (3.7) по координате x , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^F}{\partial z^2} + \kappa_1^2(q^2, \omega^2) \varphi^F &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi^F}{\partial z^2} + \kappa_2^2(q^2, \omega^2) \psi^F &= 0. \quad \kappa_j(q^2, \omega^2) = \sqrt{|k_j^2 - q^2|}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Тогда уравнение (4.4) запишутся как

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^{(l)F}}{\partial z^2} + \text{sign}(k_1 - |q|) \kappa_1^2(q^2, \omega^2) \varphi^{(l)F} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi^{(l)F}}{\partial z^2} + \text{sign}(k_2 - |q|) \kappa_2^2(q^2, \omega^2) \psi^{(l)F} &= 0, \quad \kappa_j(q^2, \omega^2) = \sqrt{|k_j^2 - q^2|}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

В качестве граничного условия на бесконечности используется условие Зоммерфельда:

– для среды «1» при $z \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi^{(1)F}}{\partial z} + i\varphi_n^{(1)F} \sqrt{k_1^2 + q^2} &= o\left(\frac{1}{\sqrt{-z}}\right), \quad z \rightarrow -\infty, \\ -\frac{\partial \psi^{(1)F}}{\partial z} + i\psi_n^{(1)F} \sqrt{k_2^2 + q^2} &= o\left(\frac{1}{\sqrt{-z}}\right), \quad z \rightarrow -\infty; \end{aligned} \quad (4.6)$$

– для среды «2» при $z \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^{(2)F}}{\partial z} + i\varphi_n^{(2)F} \sqrt{k_1^2 + q^2} &= o\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right), \quad z \rightarrow +\infty, \\ \frac{\partial \psi^{(2)F}}{\partial z} + i\psi_n^{(2)F} \sqrt{k_2^2 + q^2} &= o\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right), \quad z \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Решения уравнений в (4.5) при $|q| < k_j$ должны удовлетворять условию излучения (4.6) и (4.7), а при $|q| > k_j$ – условию ограниченности. Таковыми являются следующие функции:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)F}(q, z, \omega) &= C_{11}(q, \omega) \left[e^{\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(k_1 - |q|) + e^{i\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_1) \right], \\ \psi^{(1)F}(q, z, \omega) &= C_{21}(q, \omega) \left[e^{\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(k_2 - |q|) + e^{i\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_2) \right], \\ \varphi^{(2)F}(q, z, \omega) &= C_{12}(q, \omega) \left[e^{-\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(k_1 - |q|) + e^{-i\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_1) \right], \\ \psi^{(2)F}(q, z, \omega) &= C_{22}(q, \omega) \left[e^{-\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(k_2 - |q|) + e^{-i\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_2) \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Далее необходимо найти константы C_{11} , C_{21} , C_{12} , C_{22} . Эти константы определяются из условия $w_a = 1$ на границе упругого полупространства

$$\begin{aligned} w^{(1)} &= -1; \quad w^{(2)} = 1, \\ u^{(1)} &= 0; \quad u^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Преобразование Фурье из соотношений (3.1)–(3.4) по координате x , получаем

$$\begin{aligned} w^F &= \frac{\partial \varphi^F}{\partial z} - i q \psi^F; \\ u^F &= -i q \varphi^F - \frac{\partial \psi^F}{\partial z}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_{11}^F = -i q u^F, \quad \varepsilon_{13}^F = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^F}{\partial z} - i q w^F \right), \quad \varepsilon_{33}^F = \frac{\partial w^F}{\partial z}, \quad \theta = -i q u^F + \frac{\partial w^F}{\partial z}, \quad (4.11)$$

$$\sigma_{11}^F = \lambda \theta^F + 2\mu \varepsilon_{11}^F, \quad \sigma_{13}^F = 2\mu \varepsilon_{13}^F, \quad \sigma_{33}^F = \lambda \theta^F + 2\mu \varepsilon_{33}^F. \quad (4.12)$$

Константы интегрирования определяются из граничных условий (4.9), после чего полученные значения подставляются в (4.10)–(4.12), и определяются значения функций влияния нормальных и касательных перемещений в соответствующих средах:

$$\begin{aligned} G_{\sigma_{33}}^{F(1)}(q, 0, \omega) &= \lambda \theta^{(1)F}(q, 0, \omega) + 2\mu \varepsilon_{33}^{(1)F}(q, 0, \omega) = \\ &= \frac{-(\lambda + 2\mu) k_1^2 \kappa_2(q^2, \omega^2)}{(\kappa_1(q^2, \omega^2) \kappa_2(q^2, \omega^2) - q^2)} + \frac{2\lambda q^2 \kappa_2(q^2, \omega^2)}{(\kappa_1(q^2, \omega^2) \kappa_2(q^2, \omega^2) - q^2)}; \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} G_{\sigma_{33}}^{F(2)}(q, 0, \omega) &= \lambda \theta^{(2)F}(q, 0, \omega) + 2\mu \varepsilon_{33}^{(2)F}(q, 0, \omega) = \\ &= \frac{-(\lambda + 2\mu) k_1^2 \kappa_2(q^2, \omega^2)}{(\kappa_1(q^2, \omega^2) \kappa_2(q^2, \omega^2) - q^2)} + \frac{2\lambda q^2 \kappa_2(q^2, \omega^2)}{(\kappa_1(q^2, \omega^2) \kappa_2(q^2, \omega^2) - q^2)}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Напряжения в средах «1» и «2» будут определяться как свертки функций влияния напряжений от единичного поля перемещений с перемещениями средней линии преграды

$$\sigma_{33}^{(1)F} = G_{\sigma_{33}}^{F(1)} * w_n^F; \quad \sigma_{33}^{(2)F} = G_{\sigma_{33}}^{F(2)} * w_n^F. \quad (4.15)$$

5. Определение перемещений и в бесконечной преграде под воздействием плоской гармонической волны

Уравнение движения в перемещениях для однородной пластины Кирхгофа имеет вид

$$\rho_{\Pi} h \frac{d^2 w(x, t)}{dt^2} = -D \Delta \Delta w(x, t) + p. \quad (5.1)$$

В силу особенностей постановки задачи уравнение преобразуется в уравнение движения пластины Кирхгофа в перемещениях

$$\rho_{\Pi} h \frac{d^2 w(x, t)}{dt^2} = -D \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + p, \quad (5.2)$$

где $D = \frac{E_{\Pi} h^3}{12(1 - \nu^2)}$ — жёсткость пластины на изгиб, ρ_{Π} , E_{Π} , ν — плотность, модуль упругости первого рода, коэффициент Пуассона материала пластины; l , h — длина и толщина пластины, $w(x, t)$ — прогиб середины поверхности(линии) пластины, p — амплитуда давления волна.

В уравнении перемещение и амплитуда давления являются гармоническими функциями

$$w(x, t) = w_a e^{i\omega t}, \quad p = p_a e^{i\omega t}. \quad (5.3)$$

Тогда, с учетом (5.3), подставляя в выражение (5.2) и преобразуя его, получаем

$$-\omega^2 \rho_{\Pi} h w(x) = -D \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} + p. \quad (5.4)$$

Индекс a в дальнейшем будет опускаться.

Применим к данному уравнению преобразование Фурье по координате x . Тогда уравнение в преобразовании Фурье [9] выглядит следующим образом:

$$-\omega^2 \rho_{\Pi} h w_n^F = -D q^4 w_n^F + p^F, \quad (5.5)$$

где q — параметр преобразования Фурье.

Для определения перемещений средней линии бесконечной пластины под воздействием плоской гармонической волны необходимо записать условия ее контакта с окружающими средами [10]

$$p_1^F = \left(\sigma_{33}^{(1)F} + \sigma_{33*}^F \right) \Big|_{z=0}; \quad p_2^F = -\sigma_{33}^{(2)F} \Big|_{z=0}, \quad (5.6)$$

$$\left(w^{(1)F} + w_*^F \right) \Big|_{z=0} = w^{(2)F} \Big|_{z=0} = w_0^F; \quad \sigma_{13}^{(1)F} \Big|_{z=0} = \sigma_{13}^{(2)F} \Big|_{z=0} = 0. \quad (5.7)$$

Из (3.9), (4.15) и (5.5) нормальных перемещений средней линии преграды

$$-\omega^2 \rho_{\Pi} h w_n^F = -D q^4 w_n^F - G_{\sigma_{33}}^F * w_n^F + \sigma_{33}^{(*)F} - G_{\sigma_{33}}^F * w_n^F. \quad (5.8)$$

С учетом независимости параметров от переменной q в силу бесконечной постановки задачи, выражение (5.4) примет вид

$$w_n(0,0,\omega) = \frac{\sigma_{33}^*}{-\omega^2 \rho_{\Pi} h + G_{\sigma_{33}}^{(1)}(0,0,\omega) + G_{\sigma_{33}}^{(2)}(0,0,\omega)}, \quad (5.9)$$

$$w_n^\infty(0,0,\omega) = \frac{\sigma_{33}^*}{-\omega^2 \rho_{\Pi} h - 2k_1(\lambda + 2\mu)}. \quad (5.10)$$

6. Определение функций влияния пластины под воздействием нагрузки в виде сосредоточенной силы как дельта-функции Дирака

Рассматривается бесконечная пластина, на которую воздействует дельта-функция. Определим функцию влияния для прогиба пластины $G(x, t)$ как решение следующей задачи [8]:

$$\rho h \frac{\partial^2 G_{w,n}(x, t)}{\partial t^2} = -D \Delta \Delta G_{w,n}(x, t) + \delta(x, t). \quad (6.1)$$

В (6.1) $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Все функции, входящие в данное выражение, изменяются по гармоническому закону во времени:

$$\delta(x, t) = \delta(x) e^{i\omega t}; \quad G_{w,n}(x, t) = G_{w,n}(x) e^{i\omega t}. \quad (6.2)$$

С учетом гармоничности, примет вид

$$-\omega^2 \rho h G_{w,n}(x, \omega) = -D \frac{\partial^4 G_{w,n}(x, \omega)}{\partial x^4} + \delta(x). \quad (6.3)$$

Применяя к данному выражению преобразование Фурье [11, 12], получаем следующее уравнение:

$$-\omega^2 \rho h G_{w,n}^F(q, \omega) = -D q^4 G_{w,n}^F(q, \omega) + 1, \quad (6.4)$$

решая которое, определяем искомую функцию влияния.

Рассмотрим разложение функции $G_{w,n}(x, \omega)$ в ряд Фурье на интервал $|x| < L$

$$G_{w,n}(x, \omega) = \frac{1}{2L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-iqx} \int_{-L}^L G_{w,n}(x, \omega) e^{-iqx} dx. \quad (6.5)$$

Вспоминая, что $G_{w,n}(x, \omega)$, имеет ограниченный носитель $|x| < L$, коэффициенты ряда (6.5) можно записать в следующей форме:

$$\int_{-L}^L G_{w,n}(x, \omega) e^{-iqx} dx = \int_{-L}^L G_{w,n}(x, \omega) e^{-i\frac{\pi m}{L}x} dx = G_{w,n}^F(q, \omega). \quad (6.6)$$

Устремляя теперь L к бесконечности на интервале $|x| < L$ и полагая $q = \pi m/L$ получим

$$G_{w,n}(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{w,n}^F(q, \omega) e^{-iqx} dq. \quad (6.7)$$

Из (6.4), (6.6), (6.7) будем иметь

$$\begin{aligned} G_{w,n}(x, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{w,n}^F(q, \omega) e^{-iqx} dq = \frac{1}{2L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_{w,n}^F(q, \omega) e^{-i\frac{\pi m}{L}x} H(L - |x|) = \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(-\omega^2 \rho h + D(\frac{\pi m}{L})^4)} e^{-i\frac{\pi m}{L}x} H(L - |x|), \end{aligned} \quad (6.8)$$

где $H(x)$ — функции Хэвисайда.

Возьмем четыре разных расстояния $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. И с их учетом распишем нашу функцию влияния.

7. Решение задачи о нормальных с заданными граничными условиями

Найдем перемещение пластины как свертку функций $G_{w1}, G_{w2}, G_{w3}, G_{w4}$ с внешними силовыми факторами P_1, P_2, P_3, P_4 . Величины P_1, P_2, P_3, P_4 определяются исходя из граничных условий

$$w(x, \omega) = w^\infty(\omega) + \sum_1^4 G_w(x - \xi, \omega) * P_n. \quad (7.1)$$

Для определения неизвестных величин P_1, P_2, P_3, P_4 в формуле (7.1) необходимо использовать граничные условия (2.1), (2.2):

$$\begin{aligned} w(x, \omega) &= w^\infty(0,0, \omega) + \sum_1^4 G_w(x - \xi_m, \omega) * P_n = w^\infty(0,0, \omega) + G_{w1}(x - \xi_1, \omega) * P_1 + \\ &+ G_{w2}(x - \xi_2, \omega) * P_2 + G_{w3}(x - \xi_3, \omega) * P_3 + G_{w4}(x - \xi_4, \omega) * P_4. \end{aligned} \quad (7.2)$$

8. Примеры определения перемещений в среде на границе пластины и грунта при различных способах крепление преграды

В качестве примера были взяты следующие параметры грунта и преграды в грунте при частоте воздействия $\omega = 1, \dots, 100$, амплитуда давления падающей $p^* = 1$, параметры грунта и однородной пластины (табл. 1).

Полученные результаты функции влияния представлены на рис. 4–10.

Таблица 1. Физические параметры грунта и пластины Кирхгофа–Лява

Параметры грунта	Плотность $\rho_{\text{гр}} = 1600 \text{ Кг/м}^3$, модуль упругости $E_{\text{гр}} = 10^9 \text{ Кг/м}^2$, $\nu = 0,29$.
Параметры пластины Кирхгофа–Лява	Длина $L = 15 \text{ м}$, толщина $h = 70 \text{ мм} = 0,07 \text{ м}$, материал — сталь 12Х18Н10Т: $E = 180\,000 \text{ МПа} = 18,10^9 \text{ Кг/м}^2$, $\rho = 7900 \text{ Кг/м}^3$, $\nu = 0,29$.

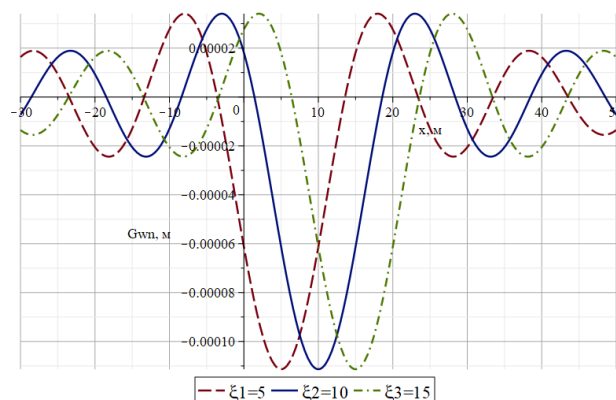


Рис. 4. График функции влияния от $\xi_1 = 5$, $\xi_2 = 10$, $\xi_3 = 15$

Fig. 4. Graph of the influence function from $\xi_1 = 5$, $\xi_2 = 10$, $\xi_3 = 15$

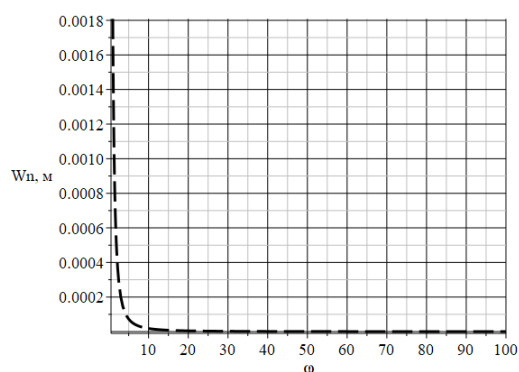


Рис. 5. График нормальных перемещений для бесконечной однородной пластины в грунте при частоте воздействия $\omega = 1, \dots, 100$

Fig. 5. Graph of normal displacements for an infinite homogeneous plate in the soil at a frequency of action of $\omega = 1, \dots, 100$

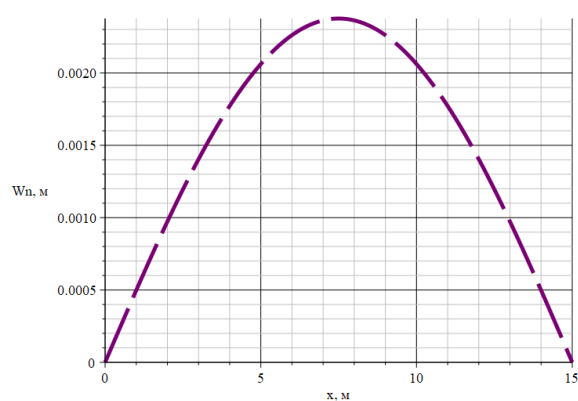


Рис. 6. График нормальных перемещений шарнирно опертых краях пластины при частоте воздействия $\omega = 1$

Fig. 6. Graph of normal displacements of hinged edges of a plate at a frequency of action $\omega = 1$

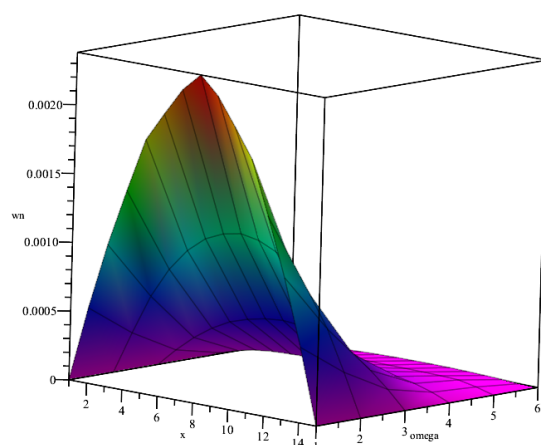


Рис. 7. График 3D нормальных перемещений шарнирно опертых краях пластины частоте воздействия $\omega = 1, \dots, 6$

Fig. 7. Graph of 3D normal displacements of hinged edges at plate impact frequency $\omega = 1, \dots, 6$

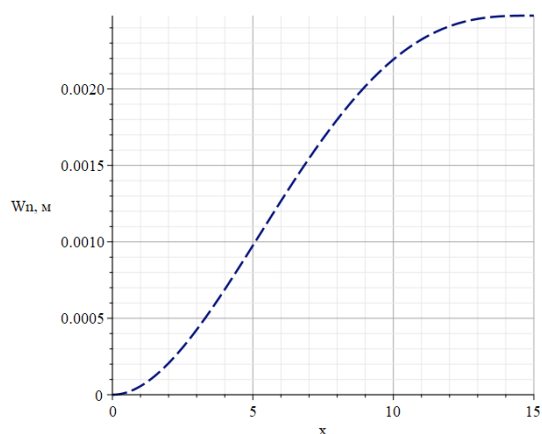


Рис. 8. График нормальных перемещений
левый край пластины жестко закреплен, а
правый — свободен при частоте воздействия
 $\omega = 1$

Fig. 8. The graph of normal displacements is that the left edge of the plate is rigidly fixed, and the right edge is free at the frequency of action $\omega = 1$

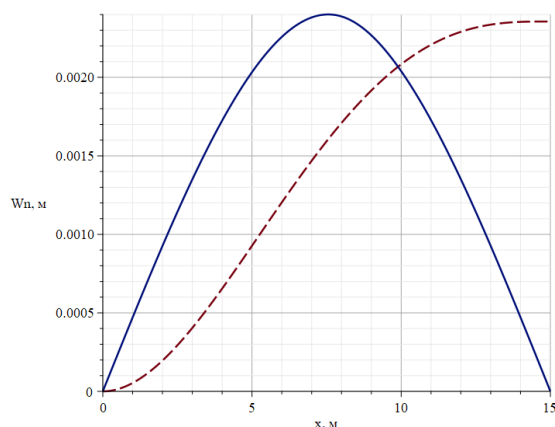


Рис. 9. График нормальных перемещений
пластины в грунте с разными граничными
условиями: сплошная линия согласно
граничному условию — шарнирно опертые
края; штриховая линия согласно граничному
условию — левый край пластины жестко
закреплен, а правый — свободен

Fig. 9. Graph of normal displacements of a plate in soil with different boundary conditions: solid line according to the boundary condition — hinged supported edges; dashed line according to the boundary condition — the left edge of the plate is rigidly fixed, and the right edge is free

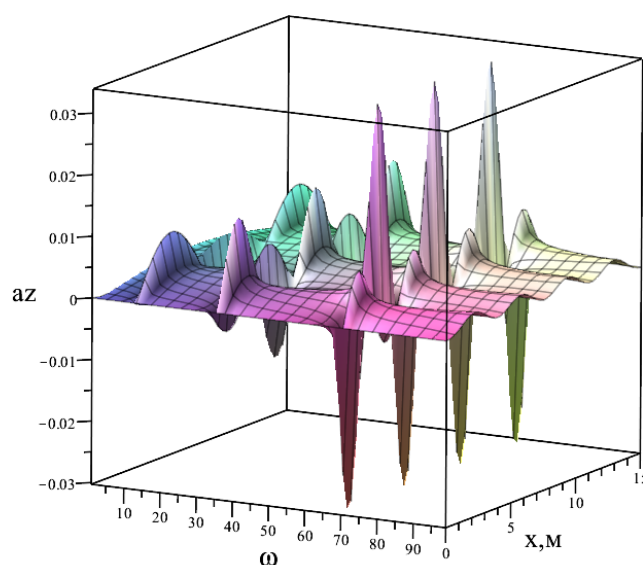


Рис. 10. График зависимость коэффициент γ_a на границе пластины при $z = 0$ от частоты волны
 $\omega = 0, \dots, 100$ и длины пластины x

Fig. 10. Graph of the dependence of the coefficient γ_a on the plate boundary at $z = 0$ on the wave frequency $\omega = 0, \dots, 100$ and the plate length x

Заключение

В работе предложен подход к решению задач вибропоглощения с граничными условиями, соответствующим закреплениям, отличным. Для чего были решены следующие задачи:

- определена поверхностная функция влияния в упругой среде, а также заданы перемещения и напряжения в индуцированной в ней плоской гармонической волне.
- построена и определена функция влияния для нормальных перемещений бесконечной однородной пластины под влиянием гармонической нагрузки в виде дельта-функции.
- решена задача взаимодействия плоской гармонической волны с препятствием в виде однородной пластины в упругой грунтовой среде методом компенсации нагрузки при различных граничных условиях.

Литература [References]

1. Коренева, Е.Б., Метод компенсирующих нагрузок для решения задач о циклически симметричном изгибе анизотропных пластин, контактирующих с упругим основанием. *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, 2021, т. 17, № 2, с. 99–111. [Koreneva, E.B., The method of compensating loads for solving of problems of cyclic symmetrical flexure of anisotropic plates, resting on an elastic subgrade. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktсий i sooruzheniy* = *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2021, vol. 17, no. 2, pp. 99–111. (in Russian)] DOI: [10.22363/1815-5235-2021-17-2-99-111](https://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-2-99-111)
2. Коренева, Е.Б., Метод компенсирующих нагрузок для решения задач об анизотропных средах. *Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*, 2018, т. 14, № 1, с. 71–77. [Koreneva, E.B., Method of compensating loads for solving of anisotropic medium problems. *Mezhdunarodnyy zhurnal po raschetu grazhdanskikh i stroitel'nykh konstruktсий* = *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2018, vol. 14, no. 1, pp. 71–77. (in Russian)] DOI: [10.22337/2587-9618-2018-14-1-71-77](https://doi.org/10.22337/2587-9618-2018-14-1-71-77)
3. Локтева, Н.А., Иванов, С.И., Шумопоглощающие свойства однородной пластины с произвольными граничными условиями под воздействием плоской гармонической волны в акустической среде. *Труды МАИ*, 2021, № 117. [Lokteva, N.A., Ivanov, S.I., Noise-absorbing properties of a homogeneous plate with arbitrary boundary conditions under the impact of a plane acoustic wave in acoustic medium. *Trudy MAI*, 2021, no. 117. (in Russian)] DOI: [10.34759/trd-2021-117-05](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-05)
4. Локтева, Н.А., Сердюк, Д.О., Скопинцев, П.Д., Метод компенсирующих нагрузок для исследования нестационарных возмущений в анизотропных цилиндрических оболочках с локальными шарнирными опорами. *Проблемы безопасности на транспорте. Материалы XI международной научно-практической конференции. Ч. 2*. Гомель, БелГУТ, 2022, с. 207–207. [Lokteva, N.A., Serdyuk, D.O., Skopintsev, P.D., The Method of Compensating Loads for Studying Non-Stationary Disturbances in Anisotropic Cylindrical Shells with Local Hinged Supports. *Problemy bezopasnosti na transporte. Materialy XI mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. Ch. 2* = *Problems of Safety in Transport. Materials of the XI International Scientific and Practical Conference, Pt. 2*. Gomel, BelSUT, 2022, pp. 207–207. (in Russian)]
5. Fedotenkov, G.V., Tarlakovsky, D.V., and Vahterova, Y.A., Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam. *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, no. 4, pp. 439–447. DOI: [10.1134/S1995080219040061](https://doi.org/10.1134/S1995080219040061)
6. Serdyuk, A.O., Serdyuk, D.O., Fedotenkov, G.V., Hein, T.Z., Green's function for an unbounded anisotropic Kirchhoff–Love plate. *J. Balk. Tribol. Assoc.*, 2021, vol. 27, no. 5, pp. 747–761.
7. Сердюк, А.О., Сердюк, Д.О., Федотенков, Г.В., Нестационарная функция прогиба для неограниченной анизотропной пластины. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»*, 2021, vol. 25, no. 1, pp. 111–126. [Serdyuk, A.O., Serdyuk, D.O., Fedotenkov, G.V., Unsteady Deflection Function for an Unbounded Anisotropic Plate. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya "Fizikomatematicheskie nauki"* = *Bull. of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences*, 2021, vol. 25, no. 1, pp. 111–126. (in Russian)]
8. Горшков, А.Г., Медведский, А.Л., Рабинский, Л.Н., Тарлаковский, Д.В., *Волны в сплошных средах*. Москва, Физматлит, 2004. [Gorshkov, A.G., Medvedsky, A.L., Rabinsky, L.N., Tarlakovsky, D.V., *Volny v sploshnykh sredakh* = *Waves in solid media*. Moscow, Fizmatlit, 2004. (in Russian)]

9. Sha, M., Rabinskiy, L.N., Orekhov, A.A., Impact of raindrop erosion on structural components. *Russ. Eng. Res.*, 2023, vol. 43, no. 7, pp. 834–837. DOI: [10.3103/S1068798X23070195](https://doi.org/10.3103/S1068798X23070195)
10. Vo, Van Dai, Lokteva, N.A., Nguyen, Minh Tuan, Nguyen, Duong Phung, Nguyen, Thi Cam Nhung, Problem on the interaction between plane harmonic waves and a uniform steel plate in soil elastic environment. *HaUI Journal of Science and Technology*, 2024, vol. 60, iss. 8, pp. 73–79. DOI: [10.57001/huih5804.2024.267](https://doi.org/10.57001/huih5804.2024.267)
11. Kalinchuk, V.V., Fedotenkov, G.V., Mitin, A.Y., Three-dimensional non-stationary motion of Timoshenko-type circular cylindrical shell. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, no. 3, pp. 311–320. DOI: [10.1134/S1995080219030107](https://doi.org/10.1134/S1995080219030107)
12. Слепян, Л.И., Яковлев, Ю.С., *Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики*. Ленинград, Судостроение, 1980. [Slepyan, L.I., Yakovlev, Yu.S., *Integral Transforms in Unsteady Problems of Mechanics*. Leningrad, Sudostroenie, 1980. (in Russian)]