

УДК 539.3

EDN: ZUBCXQ DOI: 10.31429/vestnik-22-1-68-79

## О деформировании составных упругих тел с пустыми порами

**С. А. Нестеров**  

Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, ул. Ватутина, 53, Владикавказ, 362025, Россия

✉ Нестеров Сергей Анатольевич; ORCID 0000-0003-3780-5104; SPIN 4902-4083; e-mail: [1079@list.ru](mailto:1079@list.ru)

**Аннотация.** Исследуется задача уточнения напряженно-деформированного состояния, возникшего в результате деформации составных упругих тел с равномерно распределенными пустыми порами. На основе вариационного принципа Лагранжа и обобщенной микро-дилатационной модели получены постановки задач о статическом деформировании составных пористоупругих тел (стержня и цилиндра) в случае неидеального контакта. Использована модель пористых тел с учетом поверхностных (адгезионных) напряжений, связанных со следом дефектов-пор в области контакта тел. Плотность поверхностной энергии деформации зависит от микро-дилатации и единственного дополнительного поверхностного модуля. В ходе обезразмеривания задач введены два малых параметра – параметр связанности и масштабный параметр, отвечающий за краевые эффекты на границе и в области контакта. Получены точные аналитические решения поставленных задач, удовлетворяющие граничным условиям и условиям сопряжения. Сначала получены формулы для нахождения распределения функции пористости и неклассических напряжений, а затем – формулы для нахождения смещений. Исследовано влияние параметра связанности, масштабного параметра и поверхностного модуля упругости на напряженно-деформированное состояние составных пористоупругих тел. Выяснено, что в окрестности контактной зоны происходит локальное изменение функции пористости; с увеличением масштабного параметра наблюдается увеличение ширины переходной зоны для функции пористости; с увеличением параметра связанности происходит увеличение смещений; при учете поверхностных эффектов пористость достигает максимального значения в точке сопряжения, а затем быстро убывает; неклассические напряжения в области контакта либо достигают своего пика, либо испытывают скачок при наличии поверхностных эффектов.

**Ключевые слова:** пористый материал, составное тело, стержень, цилиндр, микро-дилатационная теория упругости, смещение, параметр связанности, масштабный параметр, поверхностный модуль.

**Финансирование.** Исследование не имело спонсорской поддержки.

**Цитирование:** Нестеров С. А. О деформировании составных упругих тел с пустыми порами // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 1. С. 68–79. EDN: ZUBCXQ. DOI: 10.31429/vestnik-22-1-68-79

Поступила 2 марта 2025 г. После доработки 24 марта 2025 г. Принято 26 марта 2025 г. Публикация 27 марта 2025 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2025. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## On the Deformation of Composite Elastic Bodies with Empty Pores

**S. A. Nesterov** 

Southern Mathematical Institute, a branch of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vatutina St., 53, Vladikavkaz, 362025, Russia

✉ Sergey A. Nesterov; ORCID 0000-0003-3780-5104; e-mail: [1079@list.ru](mailto:1079@list.ru)

**Abstract.** The problem of refining the stress-strain state resulting from the deformation of composite elastic bodies with uniformly distributed empty pores is investigated. Based on the Lagrange variational principle and the Cowin–Nunziato micro-dilation model, the problems of static deformation of composite porous elastic bodies (rod and cylinder) are formulated taking into account surface effects in the conjugation region. In comparison with the classical formulation, equilibrium equations for non-classical stresses and additional boundary conditions and conjugation conditions for non-classical stresses and the porosity function are specified. In the course of non-dimensionalization of the problems, two small parameters are introduced: the connectivity parameter and the scale parameter responsible for the boundary effects at the boundary

and in the contact region. Accurate analytical solutions of the problems for composite bodies are obtained, satisfying the corresponding boundary conditions and conjugation conditions. First, formulas are obtained for finding the distribution of the porosity function and non-classical stresses, and then formulas for finding displacements. The difference between the distribution of displacements found by solving the problems in the classical and micro-dilation formulations is shown. The influence of the connectivity parameter, the scale parameter and the surface modulus of elasticity on the stress-strain state of composite porous elastic bodies is investigated. It is found that a local change in the porosity function occurs in the vicinity of the contact zone; with an increase in the scale parameter, a decrease in displacements and an increase in the width of the transition zone for the porosity functions are observed; with an increase in the connectivity parameter, an increase in the porosity functions and displacements and a smoother distribution of the porosity function in the contact area; when taking into account surface effects, porosity reaches a maximum value at the conjugation point, and then quickly decreases to the values calculated within the micro-dilation model in the absence of surface effects; non-classical stresses are proportional to the square of the scale parameter, at small values of which they have values much smaller than the values of classical stresses, and in the contact area they experience a jump or reach their peak in the absence of surface effects.

**Keywords:** porous material, composite body, rod, cylinder, micro-dilatational theory of elasticity, displacement, connectivity parameter, scale parameter, surface effect.

**Funding.** The study did not have sponsorship.

**Cite as:** Nesterov, S. A., On the deformation of composite elastic bodies with empty pores. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 1, pp. 68–79. DOI: 10.31429/vestnik-22-1-68-79

Received 2 March 2025. Revised 24 March 2025. Accepted 26 March 2025. Published 27 March 2025.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2025. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](#) license.

## Введение

Пористоупругие элементы различной формы благодаря уникальным физико-механическим свойствам широко применяются в различных областях науки и техники в качестве теплоизоляционных и звукопоглощающих материалов, в виде имплантатов, биопротезов и т.д. Задачи деформирования упругих тел различной формы достаточно полно изучены в рамках классической и градиентной теории упругости [1, 2]. Однако такие модели теории упругости не учитывают влияние микроструктуры материала, обусловленное распределением пор.

В настоящее время существует ряд механических теорий пористоупругих материалов. Первой теорией, описывающей поведение насыщенных жидкостью пористых твердых тел, является модель Био [3]. Переменными в этой модели являются вектор смещения среды и поровое давление. Второй теорией, описывающей поведение упругих материалов с пустотами, свободными от жидкости, является микро-дилатационная теория, которая была предложена в работах Нунзиато и Ковина сначала в [4] в виде нелинейной теории, а затем в [5] — в виде линейной теории. Переменными в этой модели являются вектор смещения среды и пористость. В этой теории деформация и пористость являются связанными полями, имеющими общую реакцию на внешние нагрузки, прикладываемые к телу. Определяющие соотношения этой теории в случае статического деформирования изотропных тел содержат пять механических параметров, два из которых совпадают с модулями классической теории упругости, а три других — дополнительные материальные константы теории пористых сред. При этом в связи с введением дополнительной кинематической переменной (функции пористости) и её градиента возникают неклассические напряжения.

На основе модели Ковина–Нунзиато получены аналитические решения задач о статическом деформировании однородных пористых тел, в том числе стержня [6], пластины [7], балки [8], полого цилиндра [9, 10], некоторые контактные задачи [11–13] при механическом нагружении и деформировании двухслойных структур [14] при тепловом нагружении. Для решения статических задач пороупругости применяются и численные методы, в том числе метод конечных элементов [15–18].

Для адекватного моделирования деформирования составных пористоупругих тел необходимо учитывать и поверхностные эффекты, которые впервые в рамках микро-дилатационной теории рассматривались в работе [19]. Обобщенная микро-дилатационная теория с поверхностными эффектами применялась для исследования чистого изгиба балки [20, 21]. В этих работах на свободных от нагрузок поверхностях граничные условия типа Неймана заменялись на условия типа Робина.

Ранее проведенные исследования статического деформирования пористоупругих тел касались только однородных тел или составных тел при отсутствии поверхностных эффектов. Таким образом, в настоящий момент актуальная задача деформирования составных пористых тел под действием механической нагрузки с учетом поверхностных эффектов остается неисследованной.

В данной работе получены постановки задач о статическом деформировании составных упругих тел (стержня цилиндра) с пустыми порами и поверхностными эффектами в области сжатия. Найдены точные аналитические решения поставленных задач. Исследовано влияние параметра связанности, масштабного параметра и поверхностного модуля на распределение физических полей составных пористоупругих тел.

## 1. Определяющие соотношения микро-дилатационной теории упругости

Рассмотрим упругое тело с множеством равномерно распределенных пустых пор, занимающее объем  $V$  и ограниченное поверхностью  $S$ . В расширенной микро-дилатационной теории объемная плотность энергии деформации  $W_v$  изотропного тела зависит не только от деформации, но и от пористости и ее градиента, а поверхностная плотность энергии деформации  $W_s$  зависит только от микро-дилатации [14, 20]

$$W_v(\varepsilon_{ij}, \psi, \psi_{,i}) = \frac{1}{2}(\lambda\theta^2 + 2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + 2\beta\psi\theta + \xi\psi^2 + a\psi_{,i}^2), \quad W_s = \frac{1}{2}\xi_s\psi^2, \quad (1.1)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе,  $\xi$  — модуль жесткости пор,  $\xi_s$  — поверхностный модуль,  $a$  — параметр диффузии пор,  $\beta$  — модуль связанности,  $u_i$  — компоненты вектора перемещений,  $\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$  — компоненты тензора деформаций,  $\theta = \varepsilon_{ii}$  — деформация изменения объема,  $\psi$  — функция пористости.

Модуль жесткости пор  $\xi$  имеет размерность Н/м<sup>2</sup>. Он показывает, насколько сильно пора может сопротивляться внешним нагрузкам. Если он большой, то микроструктура очень жесткая, поры практически не деформируются и их влиянием напряженно-деформированное состояние можно пренебречь. Поверхностный модуль упругости  $\xi_s$  имеет размерность Н/м. Это коэффициент пропорциональности, связывающий поверхностные (адгезионные) напряжения, возникшие из-за дефектности границы контакта, с функцией пористости (микро-дилатацией). Знак поверхностного модуля может быть как положительным, так и отрицательным. Но при этом должно выполняться условие, что полная энергия деформации должна оставаться положительной

В качестве определяющих соотношений микро-дилатационной теории упругости выступают  $\sigma_{ij} = \frac{\partial W_v}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{ij} + \beta\psi\delta_{ij}$  — компоненты тензора напряжения Коши;  $h_i = \frac{\partial W_v}{\partial \psi_{,i}} = a\psi_{,i}$  —

компоненты вектора неклассических напряжений;  $g = -\frac{\partial W_v}{\partial \psi} = -(\xi\psi + \beta\theta)$  — неклассическая

объемная сила;  $g_s = \frac{\partial W_s}{\partial \psi} = \xi_s\psi$  — компоненты вектора поверхностных напряжений.

Пусть поверхность, ограничивающая тело, имеет вид  $S = S_\sigma \cup S_h \cup S_u \cup S_\psi$ , где  $S_\sigma$ ,  $S_h$ ,  $S_u$ ,  $S_\psi$  — части поверхности, на которых заданы соответственно граничные условия относительно классических и неклассических напряжений, кинематические граничные условия относительно перемещений и микро-дилатации.

Согласно [20] постановка задачи микро-дилатационной теории упругости для однородного тела с учетом поверхностных напряжений имеет вид

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (1.2)$$

$$h_{i,i} + g = 0, \quad (1.3)$$

$$\sigma_{ij,j} n_j = p_i, \quad x_i \in S_\sigma, \quad (1.4)$$

$$h_i n_i + g_s = 0, \quad x_i \in S_h, \quad (1.5)$$

$$u_i = u_i^0, \quad x_i \in S_u, \quad (1.6)$$

$$\psi_i = \psi_i^0, \quad x_i \in S_\psi, \quad (1.7)$$

## 2. Постановка задачи для составного стержня

В качестве первой задачи исследуем деформирование составного пористоупругого стержня длиной  $L$  ( $x = x_0$  — точка сопряжения стержней), торец  $x = 0$  которого жестко зашцеplen, а другой торец  $x = L$  находится под действием нагрузки  $\sigma_{11}(L) = p_0$ .

Математическую постановку задачи получим на основе вариационного принципа Лагранжа, считая, что поверхностные эффекты возникают только в окрестности точки сопряжения.

Учитывая одномерность задачи, имеем:  $u = u(x)$ ,  $\psi = \psi(x)$ ,  $\varepsilon_{11} = u'$ . Знак «штрих» обозначает производную по координате  $x$ . Обозначим индексами «1» и «2» механические характеристики и физические поля, соответствующие первому и второму стержню. Тогда выражение для энергии деформации составного стержня  $U_0$  и работе внешних сил  $A$  примет вид

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^L W_v dx + u_s = \frac{1}{2} \int_0^{x_0} \left( E_1 (u'_1)^2 + 2\beta_1 \psi_1 u'_1 + \xi_1 \psi_1^2 + a_1 (\psi'_1)^2 \right) dx + \frac{1}{2} \xi_s \psi_1^2(x_0) + \\ + \int_{x_0}^L \left( E_2 (u'_2)^2 + 2\beta_2 \psi_2 u'_2 + \xi_2 \psi_2^2 + a_2 (\psi'_2)^2 \right) dx, \quad A = p_0 u_2(L). \quad (2.1)$$

Составим лагранжиан

$$\Lambda = U_0 - A. \quad (2.2)$$

Согласно принципу Лагранжа [5, 7], найдем первую вариацию лагранжиана (2.2) и приравняем ее к нулю

$$\delta \Lambda = \int_0^{x_0} (E_1 u'_1 \delta u'_1 + \beta_1 u'_1 \delta \psi_1 + \beta_1 \varphi_1 \delta u'_1 + \xi_1 \varphi_1 \delta \psi_1 + a_1 \psi'_1 \delta \psi'_1) dx + \xi_s \psi_1(x_0) \delta \psi_1(x_0) + \\ + \int_{x_0}^L (E_2 u'_2 \delta u'_2 + \beta_2 u'_2 \delta \psi_2 + \beta_2 \psi_2 \delta u'_2 + \xi_2 \psi_2 \delta \psi_2 + a_2 \psi'_2 \delta \psi'_2) dx - p_0 \delta u_2(L) = 0. \quad (2.3)$$

Полагая в (2.3)  $u'_i \delta u'_i = (u'_i \delta u_i)' - u''_i \delta u_i$ ,  $\psi_i \delta u'_i = (\psi_i \delta u_i)' - \psi'_i \delta u_i$ ,  $\psi'_i \delta \psi'_i = (\psi'_i \delta \psi_i)' - \psi''_i \delta \psi_i$ , после некоторых преобразований получим

$$(E_1 u'_1 + \beta_1 \psi_1) \delta u_1|_0^{x_0} - \int_0^{x_0} (E_1 u''_1 + \beta_1 \psi'_1) \delta u_1 dx + a_1 \psi'_1 \delta \psi_1|_0^{x_0} + \xi_s \psi_1(x_0) \delta \psi_1(x_0) + \\ + \int_0^{x_0} (\beta_1 u'_1 + \xi_1 \psi_1 - a_1 \psi''_1) \delta \psi_1 dx + a_2 \psi'_2 \delta \psi_2|_{x_0}^L + (E_2 u'_2 + \beta_2 \psi_2) \delta u_2|_{x_0}^L - \\ - \int_{x_0}^L (E_2 u''_2 + \beta_1 \psi'_2) \delta u_2 dx + \int_{x_0}^L (\beta_2 u'_2 + \xi_2 \psi_2 - a_2 \psi''_2) \delta \psi_2 dx - p_0 \delta u_2(L) = 0. \quad (2.4)$$

Приравнивая в подынтегральных выражениях (2.4) к нулю выражения при независимых вариациях  $\delta u_1$ ,  $\delta u_2$ ,  $\delta \psi_1$ ,  $\delta \psi_2$  получим систему уравнений равновесия составного стержня в терминах смещений и пористости

$$E_i u_i'' + \beta_i \psi_i' = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.5)$$

$$a_i \psi_i'' - \xi_i \psi_i - \beta_i u_i' = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.6)$$

Приравнивая к нулю внеинтегральные слагаемые в (2.4), с учетом обозначений для классических напряжений  $\sigma_{11} = Eu' + \beta\psi$  и неклассических напряжений  $h = a\psi'$  получим набор возможных граничных условий:

$$u_1(0) = 0 \text{ или } \sigma_{11}^{(1)}(0) = 0, \quad \psi_1(0) = 0 \text{ или } h_1(0) = 0; \quad (2.7)$$

$$u_2(L) = 0 \text{ или } \sigma_{11}^{(2)}(L) = 0, \quad \psi_2(L) = 0 \text{ или } h_2(L) = 0 \quad (2.8)$$

и условия сопряжения

$$u_1(x_0) = u_2(x_0), \quad \sigma_{11}^{(1)}(x_0) = \sigma_{11}^{(2)}(x_0), \quad \psi_1(x_0) = \psi_2(x_0), \quad h_2(x_0) - h_1(x_0) = \xi_s \psi_1(x_0). \quad (2.9)$$

Для обеспечения единственности решения задачи классических граничных условий  $u_1(0) = 0$ ,  $\sigma_{11}^{(2)}(L) = 0$  недостаточно. Поэтому, исходя из наборов возможных условий (2.7), (2.8), прибавив к списку классических граничных условий условия для неклассических напряжений  $h_i$ , в итоге получим

$$u_1(0) = 0, \quad h_1(0) = 0, \quad \sigma_2(L) = p_0, \quad h_2(L) = 0. \quad (2.10)$$

Обезразмерим задачу (2.5), (2.6), (2.9), (2.10) по формулам

$$z = \frac{x}{L}, \quad z_0 = \frac{x_0}{L}, \quad U_i = \frac{u_i}{L}, \quad P_0 = \frac{p_0}{E_0}, \quad \Omega_i = \frac{\sigma_{11}^{(i)}}{E_0}, \quad \delta_i = \frac{\beta_i^2}{\xi_i E_0}, \quad \alpha_i^2 = \frac{a_i}{\xi_i L^2},$$

$$\Phi_i = \frac{\xi_i}{\beta_i} \psi_i, \quad \bar{\xi}_s = \frac{\xi_s}{E_0 L}, \quad H_i = \frac{h_i L}{a_i}.$$

Здесь  $E_0$  — характерное значение модуля Юнга.

Постановка обезразмеренной задачи (2.5), (2.6), (2.9), (2.10) в развернутом виде примет вид

$$\bar{E}_i U_i'' + \delta_i \Phi_i' = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.11)$$

$$\alpha_i^2 \Phi_i'' - \Phi_i - U_i' = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.12)$$

$$U_1(0) = 0, \quad \Phi_1'(0) = 0, \quad \bar{E}_2 U_2'(1) + \delta_2 \Phi_2(1) = P_0, \quad \Phi_2'(1) = 0, \quad (2.13)$$

$$U_1(z_0) = U_2(z_0), \quad \bar{E}_1 U_1'(z_0) + \delta_1 \Phi_1(z_0) = \bar{E}_2 U_2'(z_0) + \delta_2 \Phi_2(z_0), \quad \Phi_1(z_0) = \Phi_2(z_0),$$

$$\alpha_2^2 \Phi_2'(z_0) - \alpha_1^2 \Phi_1'(z_0) = \bar{\xi}_s \Phi_1(z_0). \quad (2.14)$$

### 3. Решение задачи для составного стержня

Получим точное аналитическое решение задачи (2.11)–(2.14).

Проинтегрировав уравнение (2.11), имеем

$$\bar{E}_i U_i' + \delta_i \Phi_i = C_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.1)$$

С другой стороны, согласно граничному условию и условию сопряжения имеем

$$\Omega_2(1) = \bar{E}_2 U_2'(1) + \delta_2 \Phi_2(1) = P_0, \quad \Omega_1(z_0) = \Omega_2(z_0).$$

Следовательно,  $C_1 = C_2 = P_0$  и  $\Omega_1(z) = \Omega_2(z) = P_0$ . Итак, выражения для напряжений составного стержня в микро-дилатационной и классической теории совпадают.

Исходя из (3.1), выражение для производной смещения примет вид

$$U'_i = \frac{P_0 - \delta_i \Phi_i}{\bar{E}_i}, \quad i = 1, 2. \quad (3.2)$$

Подставив (3.2) в уравнения (2.12), получим дифференциальные уравнения для нахождения функции пористости

$$\alpha_i^2 \Phi_i'' - c_i \Phi_i = \frac{P_0}{\bar{E}_i}, \quad i = 1, 2. \quad (3.3)$$

где  $c_i = 1 - \frac{\delta_i}{\bar{E}_i}$ .

Решением уравнений (3.3) являются функции

$$\Phi_i(z) = B_i e^{\chi_i \frac{z}{\alpha_i}} + D_i e^{-\chi_i \frac{z}{\alpha_i}} - \frac{P_0}{\bar{E}_i - \delta_i}, \quad i = 1, 2, \quad (3.4)$$

где  $\chi_i = \sqrt{c_i}$ .

Константы интегрирования  $B_i$ ,  $D_i$ ,  $i = 1, 2$ , найденные из граничных условий  $\Phi'_1(0) = 0$ ,  $\Phi'_2(1) = 0$  и условий в точке сопряжения

$$\Phi_1(z_0) = \Phi_2(z_0), \quad \alpha_2^2 \Phi'_2(z_0) - \alpha_1^2 \Phi'_1(z_0) = \bar{\xi}_s \Phi_1(z_0),$$

имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} B_1 = D_1 &= \frac{M_1}{M_2} P_0, \quad M_1 = -\frac{\bar{\xi}_s}{\bar{E}_1 - \delta_1} + \frac{R_1}{R_2} \left( \frac{1}{\bar{E}_1 - \delta_1} - \frac{1}{\bar{E}_2 - \delta_2} \right), \quad M_2 = -R_3 - \bar{\xi}_s R_4 + \frac{R_1 R_4}{R_2}, \\ B_2 &= \frac{B_1 R_4 - P_0 \left( \frac{1}{\bar{E}_1 - \delta_1} - \frac{1}{\bar{E}_2 - \delta_2} \right)}{R_2}, \quad D_2 = B_2 e^{2 \frac{\chi_2 z_0}{\alpha_2}}, \quad R_1 = \alpha_2 \chi_2 \left( e^{\frac{\chi_2 z_0}{\alpha_2}} - e^{\frac{\chi_2}{\alpha_2} (2 - z_0)} \right), \\ R_2 &= e^{\frac{\chi_2 z_0}{\alpha_2}} + e^{\frac{\chi_2}{\alpha_2} (2 - z_0)}, \quad R_3 = \alpha_1 \chi_1 \left( e^{\frac{\chi_1 z_0}{\alpha_1}} - e^{-\frac{\chi_1 z_0}{\alpha_1}} \right), \quad R_4 = e^{\frac{\chi_1 z_0}{\alpha_1}} + e^{-\frac{\chi_1 z_0}{\alpha_1}}. \end{aligned}$$

После нахождения функций пористости по формулам (3.4) далее находят распределение неклассических напряжений  $H_i = \alpha_i^2 \Phi'_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Для нахождения распределения смещений, проинтегрировав выражения (3.2), получим

$$U_i(z) = \frac{P_0}{\bar{E}_i} \left( 1 + \frac{\delta_i}{\bar{E}_i - \delta_i} \right) z - \frac{\delta_i \alpha_i}{\bar{E}_i \chi_i} \left( B_i e^{\frac{\chi_i z}{\alpha_i}} - D_i e^{-\frac{\chi_i z}{\alpha_i}} \right) + A_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.5)$$

Из граничного условия  $U_1(0) = 0$  и условия сопряжения  $U_1(z_0) = U_2(z_0)$  найдем константы интегрирования  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ , которые имеют вид

$$A_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} A_2 &= P_0 z_0 \left( \frac{1}{\bar{E}_1} - \frac{1}{\bar{E}_2} + \frac{\delta_1}{\bar{E}_1 (\bar{E}_1 - \delta_1)} - \frac{\delta_2}{\bar{E}_2 (\bar{E}_2 - \delta_2)} \right) - \frac{\delta_1 \alpha_1}{\bar{E}_1 \chi_1} \left( B_1 e^{\frac{\chi_1 z_0}{\alpha_1}} - D_1 e^{-\frac{\chi_1 z_0}{\alpha_1}} \right) + \\ &\quad + \frac{\delta_2 \alpha_2}{\bar{E}_2 \chi_2} \left( B_2 e^{\frac{\chi_2 z_0}{\alpha_2}} - D_2 e^{-\frac{\chi_2 z_0}{\alpha_2}} \right). \end{aligned}$$

Решение задачи о деформировании составного упругого стержня в классической постановке получим, полагая  $\bar{\xi}_s = 0$ ,  $\alpha_i = 0$ ,  $\delta^{(i)} = 0$  в формулах (3.5) и константах  $B_i$ ,  $D_i$ ,  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ .

#### 4. Постановка и решение задачи для составного цилиндра

В качестве второй задачи исследуем деформирование толстостенного полого двухслойного бесконечно длинного цилиндра ( $r = r_0$  — поверхность сопряжения слоев), внутренняя поверхность  $r = r_1$  которого свободна от напряжений, а к внешней поверхности  $r = r_2$  приложена нормальная механическая нагрузка  $\sigma_{rr}(r_2) = p$ .

Математическую постановку задачи для составного пористого цилиндра получим, применяя вариационный принцип Лагранжа в полярной системе координат  $(r, \varphi)$  с учетом того, что  $u_r = u(r)$ ,  $u_\varphi = u_z = 0$ ,  $\psi = \psi(r)$ ,  $\varepsilon_{rr} = du/dr$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi} = u/r$ . Выполняя действия, аналогичные первой задаче, получим в качестве уравнений равновесия:

$$\frac{d\sigma_{rr}^{(i)}}{dr} + \frac{\sigma_{rr}^{(i)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)}}{r} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.1)$$

$$\frac{d}{dr} \left( h_r^{(i)} \right) + \frac{h_r^{(i)}}{r} + g^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.2)$$

Подставляя в уравнения (4.1), (4.2) выражения для радиальных напряжений

$$\sigma_{rr}^{(i)} = \left( \lambda^{(i)} + 2\mu^{(i)} \right) \frac{du^{(i)}}{dr} + \lambda^{(i)} \frac{u^{(i)}}{r} + \beta^{(i)} \psi^{(i)},$$

окружных напряжений

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} = \lambda^{(i)} \frac{du^{(i)}}{dr} + \left( \lambda^{(i)} + 2\mu^{(i)} \right) \frac{u^{(i)}}{r} + \beta^{(i)} \psi^{(i)},$$

неклассических радиальных напряжений

$$h_r^{(i)} = a^{(i)} \frac{d\psi^{(i)}}{dr},$$

неклассической объемной силы

$$g^{(i)} = -\xi^{(i)} \psi^{(i)} - \beta^{(i)} \left( \frac{u^{(i)}}{r} + \frac{du^{(i)}}{dr} \right),$$

после некоторых преобразований получим

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{du^{(i)}}{dr} + \frac{u^{(i)}}{r} \right) + \frac{\beta^{(i)}}{\lambda^{(i)} + 2\mu^{(i)}} \frac{du^{(i)}}{dr} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.3)$$

$$a^{(i)} \left( \frac{d^2 \psi^{(i)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi^{(i)}}{dr} \right) - \xi^{(i)} \psi^{(i)} - \beta^{(i)} \left( \frac{du^{(i)}}{dr} + \frac{u^{(i)}}{r} \right) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.4)$$

Для обеспечения единственности решения задачи, к классическим граничным условиям прибавив условия для неклассических напряжений, будем иметь

$$\sigma_{rr}^{(1)}(r_1) = 0, \quad h_r^{(1)}(r_1) = 0, \quad \sigma_{rr}^{(2)}(r_2) = p, \quad h_r^{(2)}(r_2) = 0. \quad (4.5)$$

Условия сопряжения имеют вид

$$\begin{aligned} u^{(1)}(r_0) &= u^{(2)}(r_0), \quad \sigma_{rr}^{(1)}(r_0) = \sigma_{rr}^{(2)}(r_0), \quad \psi^{(1)}(r_0) = \psi^{(2)}(r_0), \\ h_r^{(2)}(r_0) - h_r^{(1)}(r_0) &= \xi_s \psi^{(1)}(r_0). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Выполним обезразмеривание задачи (4.3)–(4.6) по формулам, аналогичным задаче для стержня, принимая за характерный размер —  $r_2$ , за характерный упругий модуль —  $\mu_0$  и обозначая

$$\eta = \frac{r}{r_2}, \quad \eta_1 = \frac{r_1}{r_2}, \quad \eta_0 = \frac{r_0}{r_2}, \quad \bar{s}^{(i)} = \frac{\lambda^{(i)} + 2\mu^{(i)}}{\mu_0}, \quad \bar{\lambda}^{(i)} = \frac{\lambda^{(i)}}{\mu_0}, \quad \Omega_{rr}^{(i)} = \frac{\sigma_{rr}^{(i)}}{\mu_0}, \quad \Omega_{\varphi\varphi}^{(i)} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(i)}}{\mu_0}.$$

Постановка обезразмеренной задачи (4.3)–(4.6) примет следующий вид:

$$\frac{d}{d\eta} \left( \frac{dU^{(i)}}{d\eta} + \frac{U^{(i)}}{\eta} + \frac{\delta^{(i)}}{\bar{s}^{(i)}} \Phi^{(i)} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.7)$$

$$\left( \alpha^{(i)} \right)^2 \left( \frac{d^2 \Phi^{(i)}}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{d\Phi^{(i)}}{d\eta} \right) - \Phi^{(i)} - \left( \frac{dU^{(i)}}{d\eta} + \frac{U^{(i)}}{\eta} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.8)$$

$$\Omega_{rr}^{(1)}(\eta_1) = 0, \quad H_r^{(1)}(\eta_1) = 0, \quad \Omega_{rr}^{(2)}(1) = P, \quad H_r^{(2)}(1) = 0, \quad (4.9)$$

$$U^{(1)}(\eta_0) = U^{(2)}(\eta_0), \quad \Phi^{(1)}(\eta_0) = \Phi^{(2)}(\eta_0), \quad \Omega_{rr}^{(1)}(\eta_0) = \Omega_{rr}^{(2)}(\eta_0), \quad (4.10)$$

$$H_r^{(2)}(\eta_0) - H_r^{(1)}(\eta_0) \alpha = \bar{\xi}_s \Phi_1(\eta_0).$$

Здесь

$$\Omega_{rr}^{(i)} = \bar{s}^{(i)} \frac{dU^{(i)}}{d\eta} + \bar{\lambda}^{(i)} \frac{U^{(i)}}{\eta} + \delta^{(i)} \Phi^{(i)}, \quad H_r^{(i)} = \left( \alpha^{(i)} \right)^2 \frac{d\Phi^{(i)}}{d\eta}, \quad i = 1, 2.$$

Получим аналитическое решение задачи (4.7)–(4.10). Проинтегрировав уравнения (4.7), получим

$$\frac{dU^{(i)}}{d\eta} + \frac{U^{(i)}}{\eta} = G_i - \frac{\delta^{(i)}}{\bar{s}^{(i)}} \Phi^{(i)}, \quad i = 1, 2. \quad (4.11)$$

Подставив (4.11) в (4.8), получим дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами для нахождения функции пористости

$$\left( \alpha^{(i)} \right)^2 \frac{d^2 \Phi^{(i)}}{d\eta^2} + \frac{\left( \alpha^{(i)} \right)^2}{\eta} \frac{d\Phi^{(i)}}{d\eta} - p^{(i)} \Phi^{(i)} = G_i, \quad i = 1, 2, \quad (4.12)$$

где

$$p^{(i)} = 1 - \frac{\delta^{(i)}}{\bar{s}^{(i)}}.$$

Обозначим через  $I_j(\eta)$ ,  $K_j(\eta)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  — модифицированные функции Бесселя  $j$ -го порядка первого и второго рода соответственно. Тогда решения уравнений (4.12) можно представить в виде

$$\Phi^{(i)} = X_i I_0 \left( \gamma^{(i)} \frac{\eta}{\alpha^{(i)}} \right) + Y_i K_0 \left( \gamma^{(i)} \frac{\eta}{\alpha^{(i)}} \right) - \frac{G_i}{\left( \gamma^{(i)} \right)^2}, \quad i = 1, 2, \quad (4.13)$$

где  $\gamma^{(i)} = \sqrt{p^{(i)}}$ .

Исходя из (4.13), безразмерная радиальная компонента вектора неклассических напряжений  $i$ -го слоя цилиндра примет вид

$$H_r^{(i)} = \alpha^{(i)} \gamma^{(i)} \left( X_i I_1 \left( \frac{\gamma^{(i)}}{\alpha^{(i)}} \eta \right) - Y_i K_1 \left( \frac{\gamma^{(i)}}{\alpha^{(i)}} \eta \right) \right), \quad i = 1, 2. \quad (4.14)$$

Для нахождения распределения смещений, проинтегрировав (4.11) с учетом выражений (4.13), получим

$$U^{(i)} = G_i \left( 1 + \frac{\delta^{(i)}}{\bar{s}^{(i)} \left( \gamma^{(i)} \right)^2} \right) \frac{\eta}{2} + \frac{F_i}{\eta} + \frac{\delta^{(i)} \alpha^{(i)}}{\bar{s}^{(i)} \gamma^{(i)}} \left( Y_i K_1 \left( \gamma^{(i)} \frac{\eta}{\alpha^{(i)}} \right) - X_i I_1 \left( \gamma^{(i)} \frac{\eta}{\alpha^{(i)}} \right) \right), \quad (4.15)$$

$$i = 1, 2.$$



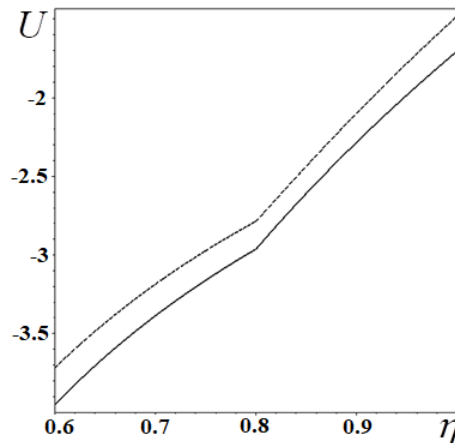


Рис. 1. Распределение вдоль координаты  $\eta$  смещения  $U$

*Fig. 1. Distribution along the coordinate  $\eta$  displacement  $U$*

Константы интегрирования  $G_i$ ,  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $F_i$ ,  $i = 1, 2$  определяются из граничных условий (4.9) и условий сопряжения (4.10). Они имеют громоздкий вид и здесь не приводятся.

После нахождения функций пористости  $\Phi^{(i)}$  и смещений  $U^{(i)}$  далее находим распределения напряжений — радиального  $\Omega_{rr}^{(i)}$ , окружного  $\Omega_{\varphi\varphi}^{(i)}$  и неклассического  $H_r^{(i)}$ .

Решение задачи о деформировании двухслойного цилиндра в классической постановке получим, полагая  $\bar{\xi}_s = 0$ ,  $\alpha^{(i)} = 0$ ,  $\delta^{(i)} = 0$  в формулах (4.15) и константах  $G_i$ ,  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ .

## 5. Результаты расчетов

Рассмотрим результаты вычисления напряженно-деформированного состояния составных пористоупругих тел — стержня и цилиндра.

Проведен сравнительный анализ распределения напряжений и смещений на основе моделей классической теории упругости и микро-дилатационной теории. Выяснено, что на распределение радиальных и окружных напряжений цилиндра не влияют значения неклассических параметров, однако их влияние на распределение смещений значительно.

На рис. 1 показано радиальное распределение смещений двухслойного цилиндра, вычисленное по формулам (4.15) при  $\bar{s}_1 = 1$ ,  $\bar{s}_2 = 0,5$ ,  $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = 1$ ,  $\eta_1 = 0,6$ ,  $\eta_0 = 0,8$ ,  $P = 1$ . При этом сплошной линией изображено смещение, вычисленное при  $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 0$ ,  $\delta^{(1)} = \delta^{(2)} = 0$ , пунктиром — при  $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 0,05$ ,  $\delta^{(1)} = \delta^{(2)} = 0,1$ ,  $\bar{\xi}_s = 0,5$ .

Исследуем по отдельности влияние безразмерных неклассических параметров на распределение функций пористости, смещений и неклассических напряжений.

Рассмотрим влияние параметра связанности  $\delta$  на распределение физических полей составного стержня вдоль координаты  $z$ .

На рис. 2 представлены: а) функция пористости; б) смещение составного стержня при  $\bar{E}_1 = 0,5$ ,  $\bar{E}_2 = 1$ ,  $z_0 = 0,5$ ,  $P_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,04$ ,  $\bar{\xi}_s = 0$  (сплошная линия — вычисленные функции при  $\delta_1 = \delta_2 = 0,03$ ; точки — при  $\delta_1 = \delta_2 = 0,15$ ).

Из рис. 2 следует, что с ростом параметра связанности увеличиваются смещения и разность между функциями пористости первого и второго стержня.

Исследуем влияние масштабного параметра  $\alpha$  на распределение физических полей слоистого цилиндра вдоль координаты  $\eta$ .

На рис. 3 изображены: а) функция пористости; б) неклассическое напряжение слоистого цилиндра при  $\delta_1 = \delta_2 = 0,03$ ,  $\bar{\xi}_s = 0$  (сплошная линия — вычисленные функции при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,02$ ; точки — при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,1$ ).

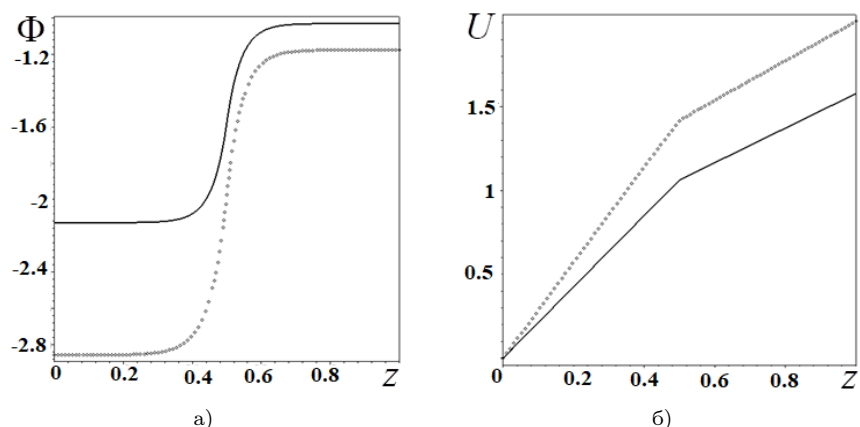


Рис. 2. Распределение вдоль координаты  $z$ : а) функции пористости  $\Phi$ ; б) смещения  $U$

Fig. 2. Distribution along the coordinate  $z$ : а) porosity function  $\Phi$  and б) displacement  $U$

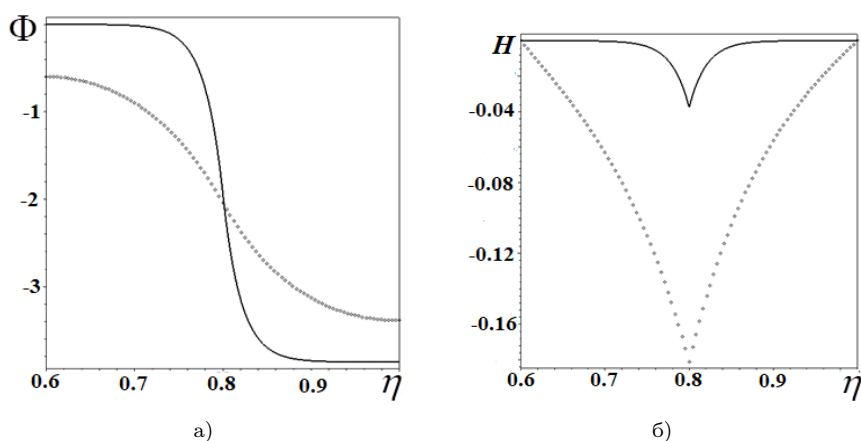


Рис. 3. Распределение вдоль координаты  $\eta$ : а) функции пористости; б) неклассического напряжения  $H_r$

Fig. 3. Distribution along the coordinate  $\eta$ : а) porosity function  $\Phi$  and б) nonclassical stress  $H_r$

Из рис. 3 следует, что в окрестности контактной зоны происходит локальное изменение функции пористости, причем ширина переходной зоны пропорциональна масштабному параметру  $\alpha$ ; при отсутствии поверхностных эффектов неклассические напряжения всюду равны нулю, а в окрестности сопряжения достигают максимального значения.

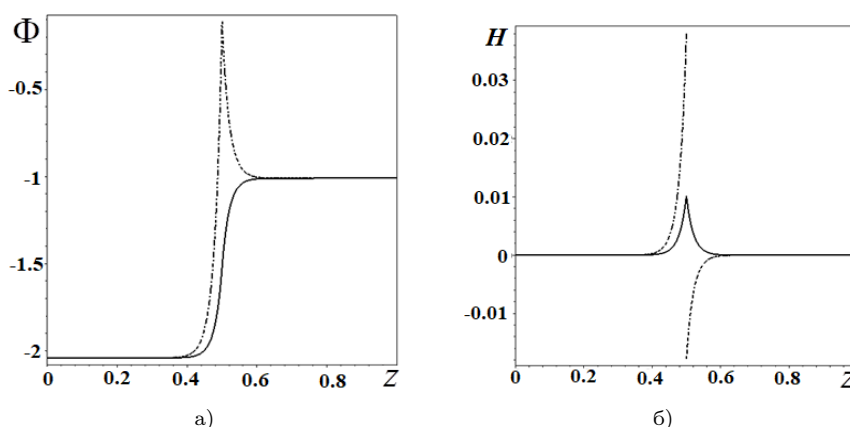
Изучим влияние поверхностного модуля упругости  $\bar{\xi}_s$  на распределение физических полей составного стержня вдоль координаты  $z$ .

На рис. 4 изображены: а) функция пористости; б) неклассическое напряжение составного стержня при  $\delta_1 = \delta_2 = 0,03$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,02$  (сплошная линия — вычисленные функции при  $\bar{\xi}_s = 0$ ; штихпунктир — при  $\bar{\xi}_s = 1$ ).

Из рис. 4 следует, что при наличии поверхностных эффектов пористость достигает максимального значения в точке сопряжения, а затем быстро убывает до значений, вычисленных при отсутствии поверхностных эффектов; неклассические напряжения всюду равны нулю, а в окрестности сопряжения испытывают скачок.

## Заключение

На основе вариационного принципа Лагранжа получены уравнения равновесия, граничные условия и условия сопряжения для задач деформирования составных пористопругих тел

Рис. 4. Распределение вдоль координаты  $z$ : а) функции пористости; б) неклассического напряженияFig. 4. Distribution along the coordinate  $z$ : а) porosity function  $\Phi$  and б) nonclassical stress  $H$ 

(стержня и цилиндра) в рамках обобщенной микро-дилатационной теории упругости с поверхностными эффектами. В результате обезразмеривания поставленных задач введены два малых параметра — параметр связанности и масштабный параметр. Получены точные аналитические решения поставленных задач. Расчеты напряженно-деформированного состояния составного пористого стержня по моделям классической теории упругости (без пор), микро-дилатационной теории упругости при наличии и отсутствии поверхностных эффектов дают качественные различия. Выяснено, что в окрестности контактной зоны происходит локальное изменение функции пористости, причем ширина переходной зоны значений пропорциональна масштабному параметру; с увеличением параметра связанности происходит увеличение смещений и разности между функциями пористости составных тел; при учете поверхностных напряжений пористость стержня достигает максимального значения в точке сопряжения, а затем быстро убывает; радиальные и окружные напряжения принимают одинаковое значение, как в рамках классической, так и в микро-дилатационной теории; неклассические напряжения близки к нулю, однако, в области контакта либо принимают экстремальное значение либо испытывают скачок при наличии поверхностных эффектов.

## Литература [References]

1. Ватульян, А.О., Нестеров, С.А., Юров, В.О., Исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра с покрытием на основе градиентной модели термоупругости. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2021, № 4, с. 60–70. [Vatulyan, A.O., Nesterov, S.A., Yurov, V.O., Investigation of the stress-strain state of a hollow cylinder with a coating based on the gradient model of thermoelasticity. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika = PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 4, pp. 60–70. (in Russian)] DOI: [10.15593/perm.mech/2021.4.07](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.4.07)
2. Ватульян, А.О., Нестеров, С.А., Градиентная модель изгиба составной балки. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 2, с. 6–16. [Vatulyan, A.O., Nesterov, S.A., Gradient model of bending of a composite beam. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 2, pp. 6–16. (in Russian)] DOI: [10.31429/vestnik-19-2-6-16](https://doi.org/10.31429/vestnik-19-2-6-16)
3. Biot, M.A., Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, vol. 28, no. 2, pp. 168–178. DOI: [10.1121/1.1908239](https://doi.org/10.1121/1.1908239)
4. Nunziato, J.W., Cowin, S.C., A nonlinear theory of elastic materials with voids. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1979, vol. 72, no. 2, pp. 175–201. DOI: [10.1007/BF00249363](https://doi.org/10.1007/BF00249363)
5. Cowin, S.C., Nunziato, J.W., Linear elastic materials with voids. *Journal of Elasticity*, 1983, vol. 13,

- no. 2, pp. 125–147. DOI: [10.1007/BF00041230](https://doi.org/10.1007/BF00041230)
6. Birsan, M., Altenbach, H., On the theory of porous elastic rods. *International. Journal of Solids and Structures*, 2011, vol. 48, no. 6, pp. 910–924. DOI: [10.1016/J.IJSOLSTR.2010.11.022](https://doi.org/10.1016/J.IJSOLSTR.2010.11.022)
7. Lyapin, A.A., Vatulyan, A.O., On deformation of porous plates. *ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 2018, vol. 98, no. 6, pp. 330–340. DOI: [10.1002/zamm.201700151](https://doi.org/10.1002/zamm.201700151)
8. Cowin, S.C., A note on the problem of pure bending for linear elastic materials with voids. *Journal of Elasticity*, 1984, vol. 14, pp. 227–233. DOI: [10.1007/BF00041670](https://doi.org/10.1007/BF00041670)
9. Cowin, S.C., Puri, P., The classical pressure vessel problems for linear elastic materials with voids. *Journal of Elasticity*, 1983, vol. 13, pp. 157–163. DOI: [10.1007/BF00041232](https://doi.org/10.1007/BF00041232)
10. Iesan, D., Scalia, A., On the Deformation of Functionally Graded Porous Elastic Cylinders. *Journal of Elasticity*, 2007, vol. 87, pp. 147–159. DOI: [10.1007/s10659-007-9101-9](https://doi.org/10.1007/s10659-007-9101-9)
11. Scalia, A., Sumbatyan, M.A., Contact problem for porous elastic half-plane. *Journal of Elasticity*, 2000, vol. 60, no. 2, pp. 91–102. DOI: [10.1023/A:1010880823544](https://doi.org/10.1023/A:1010880823544)
12. Колосова, Е.М., Чебаков, М.И., Аналитическое решение осесимметричной контактной задачи для поропружного слоя. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, 2020, № 6, с. 116–124. [Kolossova, E.M., Chebakov, M.I., Analytical Solution of Axisymmetric Contact Problem for a Poroelastic Layer. *Mechanics of Solids*, 2020, vol. 55, no. 6, pp. 857–864. DOI: [10.3103/S0025654420050118](https://doi.org/10.3103/S0025654420050118)] DOI: [10.31857/S0572329920050116](https://doi.org/10.31857/S0572329920050116)
13. Зеленцов, В.Б., Загребнева, А.Д., Лапина, П.А., Айзикович, С.М., Ванг, Юн-Че, Относительный объем пор при идентифицировании пористых материалов. *Проблемы прочности и пластичности*, 2021, т. 83, № 4, с. 462–470. [Zelentsov, V.B., Zagrebneva, A.D., Lapina, P.A., Ayzikovich, S.M., Vang, Yun-Che, Relative pore volume in the identification of porous materials. *Problemy prochnosti i plastichnosti = Problems of strength and ductility*, 2021, vol. 83, no. 4, pp. 462–470. (in Russian)] DOI: [10.32326/1814-9146-2021-83-4-462-470](https://doi.org/10.32326/1814-9146-2021-83-4-462-470)
14. Sha, M., Volkov, A.V., Orekhov, A.A., Kuznetsova, E.L., Micro-dilatation effects in a two-layered porous structure under uniform heating. *Journal of the Balkan Tribological Association*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 280–294.
15. Ramezani, H., Steeb, H., Jeong, J., Analytical and numerical studies on penalized micro-dilatation (PMD) theory: macro-micro link concept. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 2012, vol. 34, pp. 130–148. DOI: [10.1016/J.EUROMECHSOL.2011.11.002](https://doi.org/10.1016/J.EUROMECHSOL.2011.11.002)
16. Bishay, P.L., Sladek, J., Sladek, V., Gao, X.W., Analysis of elastic media with voids using a mixed-collocation finite-element method. *Journal of Engineering Mechanics*, 2017, vol. 143, no. 4. DOI: [10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001193](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001193)
17. Iovane, G., Nasedkin, A.V., Finite element analysis of static problems for elastic media with voids. *Computers and Structures*, 2005, vol. 84, no. 1–2, pp. 19–24. DOI: [10.1016/j.compstruc.2005.09.002](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2005.09.002)
18. Sladek, J., Sladek, V., Repkaet, M., Bishay, P.L., Static and dynamic behavior of porous elastic materials based on micro-dilatation theory: A numerical study using the MLPG method. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, vol. 96, pp. 126–135. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2016.06.016](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.06.016)
19. Chandrasekharaiah, D.S. Effects of surface stresses and voids on rayleigh waves in an elastic solid. *International Journal of Engineering Science*, 1987, vol. 25, no. 2, pp. 205–211. DOI: [10.1016/0020-7225\(87\)90006-1](https://doi.org/10.1016/0020-7225(87)90006-1)
20. Lurie, S., Solyaev, Yu., Volkov, A., Volkov-Bogorodskiy, D., Bending problems in the theory of elastic materials with voids and surface effects. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2018, vol. 23, no. 5, pp. 787–804. DOI: [10.1177/1081286517691570](https://doi.org/10.1177/1081286517691570)
21. Li, Y., Volkov, V.A., Rabinskiy, N.L., Shemiakov, O.A., Numerical modeling of scale effects for circular cylinder in the theory of thermoelastic materials with voids. *Journal of Applied Engineering Science*, 2020, vol. 18, no. 4, pp. 671–675. DOI: [10.5937/jaes0-28042](https://doi.org/10.5937/jaes0-28042)