УДК 539.3 EDN: DPPFMD DOI: 10.31429/vestnik-22-1-14-17

О групповых свойствах блочных элементов в нанотехнологиях

В. А. Бабешко[1]✉, **М. А. Журавков**[2]

[1] Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия
[2] Минский государственный университет, пр. Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь
✉ Бабешко Владимир Андреевич; ORCID 0000-0002-6663-6357; SPIN 2943-6842; e-mail: babeshko41@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе показано, что упакованные блочные элементы, применяемые при решении граничной задачи методом блочного элемента, являются элементами абелевой группы. Ранее в публикациях доказано, что они являются элементами дискретного топологического пространства. Этот результат расширяет аппарат исследования совокупностей блочных элементов, в частности, построение идеалов групп и осуществление гармонического анализа на группах. Это свойство в проблеме моделирования создания наноматериалов может играть важную роль.

Ключевые слова: блочные элементы, абелева группа, внешние формы.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и Кубанского научного фонда (региональный проект 24-11-20006).

Цитирование: Бабешко В. А., Журавков М. А. О групповых свойствах блочных элементов в нанотехнологиях // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 1. С. 14–17. EDN: DPPFMD. DOI: 10.31429/vestnik-22-1-14-17

Поступила 22 февраля 2025 г. После доработки 18 марта 2025 г. Принято 24 марта 2025 г. Публикация 27 марта 2025 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

About the Group Properties of Block Elements in Nanotechnology

V. A. Babeshko[1]✉, **M. A. Zhuravkov**[2]

[1] Kuban State University, Stavropolskaya St., 149, Krasnodar, 350040, Russia
[2] Minsk State University, Nezavisimost Ave., 4, Minsk, 220030, Belarus
✉ Vladimir A. Babeshko; ORCID 0000-0002-6663-6357; e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. In this paper, it is shown that the packed block elements used in solving the boundary value problem by the block element method are elements of an Abelian group. It was proved earlier in publications that they are elements of a discrete topological space. This result expands the apparatus of studying aggregates of block elements, in particular, the construction of group ideals and the implementation of harmonic analysis on groups. This property can play an important role in the problem of modeling the creation of nanomaterials.

Keywords: block elements, Abelian group, external forms.

Funding. The work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation and the Kuban Science Foundation (regional project 24-11-20006).

Cite as: Babeshko, V. A., Zhuravkov, M. A., About the group properties of block elements in nanotechnology. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 1, pp. 14–17. DOI: 10.31429/vestnik-22-1-14-17

Received 22 February 2025. Revised 18 March 2025. Accepted 24 March 2025. Published 27 March 2025.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

Введение

Топологические методы успешно применяются в прикладных задачах [1–7]. В работах [1–3] показано, что блочные элементы представляют дискретное топологическое пространство. Это означает, что любое их объединение будет вновь элементом этого топологического пространства. При этом, пустое пространство и все топологическое пространство также являются элементами топологического пространства. Но можно посмотреть на множество блочных элементов с позиции абелевой алгебры с групповой операцией произведения в виде сложения, взяв в качестве единицы отсутствие элемента. Тогда обнаруженные свойства упакованных блочных элементов показывают, что множество представляет абелевую группу.

1. Доказательство существования группы

Для доказательства воспользуемся результатом работы [8].

Возьмем множество упакованных блочных элементов граничных задач с непересекающимися носителями для уравнения Гельмгольца на плоскости. Среди них блочные элементы, построенные а первых квадрантах. Применяя традиционные методы построения блочного элемента, включающие этапы внешней алгебры, внешнего анализа [8], получаем четыре упакованных блочных элемента в каждом квадранте

$$\phi_n(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2} \frac{\omega_n\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2,$$

$$\omega_1 = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}}-1\right]\left\langle Q_{2+}(\alpha_2)-\frac{\alpha_2 Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}}\right\rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\left\langle Q_{1+}(\alpha_1)-\frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}}\right\rangle,$$

$$\omega_2 = \left[1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right]\left\langle Q_{2+}(\alpha_2)-\frac{\alpha_2 Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}}\right\rangle + \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\left\langle Q_{1-}(\alpha_1)-\frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}}\right\rangle,$$

$$\omega_3 = \left[1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right]\left\langle Q_{2-}(\alpha_2)-\frac{\alpha_2 Q_{2-}(\alpha_{21-})}{\alpha_{21-}}\right\rangle + \left[1-\frac{\alpha_2}{\alpha_{21-}}\right]\left\langle Q_{1-}(\alpha_1)-\frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}}\right\rangle,$$

$$\omega_4 = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}}-1\right]\left\langle Q_{2-}(\alpha_2)-\frac{\alpha_2 Q_{2-}(\alpha_{21-})}{\alpha_{21-}}\right\rangle + \left[1-\frac{\alpha_2}{\alpha_{21-}}\right]\left\langle Q_{1+}(\alpha_1)-\frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}}\right\rangle.$$

Убедимся, что объединение любых двух соседних блочных элементов, имеющих носители в квадрантах, порождают блочный элемент в форме полупространства. Такая операция называется построением фактор-топологии, а отношения эквивалентности в данном случае состоят в равенстве функций и их производных на границе. В абелевой алгебре операция, являющаяся сложением элементов, называется произведением. Названными сложениями являются следующие объекты $\phi_1(x_1,x_2)\cup\phi_2(x_1,x_2)$, $\phi_2(x_1,x_2)\cup\phi_3(x_1,x_2)$, $\phi_3(x_1,x_2)\cup\phi_4(x_1,x_2)$, $\phi_4(x_1,x_2)\cup\phi_1(x_1,x_2)$.

Покажем на примере первого объединения переход его в упакованный блочный элемент для полуплоскости. Имеем

$$\begin{aligned}\phi_1(x_1,x_2)\cup\phi_2(x_1,x_2) &= \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2} \frac{\omega_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2 + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2} \frac{\omega_2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2} \frac{\omega_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\omega_2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2. \quad (1.1)\end{aligned}$$

Отсюда

$$\omega_1+\omega_2=\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}}-1\right]\left\langle Q_{2+}(\alpha_2)-\frac{Q_{2+}(\alpha_{21+})\alpha_2}{\alpha_{21+}}\right\rangle+\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\left\langle Q_{1+}(\alpha_1)-\frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}}\right\rangle+$$
$$+\left[1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right]\left\langle Q_{2+}(\alpha_2)-\frac{Q_{2+}(\alpha_{21+})\alpha_2}{\alpha_{21+}}\right\rangle+\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\left\langle Q_{1-}(\alpha_1)-\frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}}\right\rangle.$$

В этом соотношении выражения

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_{11+}},\quad \frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}},\quad \frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}},\quad \frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}},\quad \frac{\alpha_2 Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}},\quad \frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}},\quad \frac{\alpha_1 Q_{1-}(\alpha_{11-})}{\alpha_{11-}}$$

называются отсекаторами. Они выполняют функции, обеспечивающие проектирование решений граничных задач на носители, то есть обращение решения граничной задачи в ноль вне носителя. Их роль всплывает в процессе вычислении обращений преобразований Фурье при получения значений упакованного блочного элемента в декартовой системе координат. Поэтому при исчезновении границы между блочными элементами и операциями с преобразованиями Фурье во внешних формах ими следует пренебрегать, так как граница исчезает. Остаются те из них, которые сохраняют новые границы упакованных блочных элементов. С учетом сказанного, отбрасывая ненужные члены, имеем

$$\omega_1+\omega_2=\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\langle Q_{1+}(\alpha_1)\rangle+\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\langle Q_{1-}(\alpha_1)\rangle=$$
$$=\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\langle Q_{1+}(\alpha_1)+Q_{1-}(\alpha_1)\rangle=\frac{\alpha_2-\alpha_{21+}}{\alpha_{21+}}Q_1(\alpha_1).$$

Внеся эти данные в (1.1), получаем упакованный блочный элемент для полупространства (1), (2), а объединение блочных элементов оказывается связным множеством. Точно так же, объединяя упакованные блочные элементы второго и третьего квадрантов, имеем

$$\omega_2+\omega_3=\left[1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right]\left\langle Q_{2+}(\alpha_2)-\frac{\alpha_2 Q_{2+}(\alpha_{21+})}{\alpha_{21+}}\right\rangle+\left[1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right]\langle Q_{2-}(\alpha_2)\rangle=$$
$$=\left[1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right]\langle Q_{2+}(\alpha_2)\rangle=\frac{\alpha_{11-}-\alpha_1}{\alpha_{11-}}Q_2(\alpha_2).$$

Аналогично получим

$$\omega_3+\omega_4=\frac{\alpha_{21-}-\alpha_2}{\alpha_{21-}}Q_1(\alpha_1),\quad \omega_4+\omega_1=\frac{\alpha_1-\alpha_{11+}}{\alpha_{11+}}Q_2(\alpha_2).$$

Может возникнуть вопрос об объединении трех квадрантов. В этом случае внешняя форма принимает вид $\omega_{13}=\omega_1+\omega_2+\omega_3$.

Отсюда получаем упакованный блочный элемент

$$\phi_1(x_1,x_2)\cup\phi_2(x_1,x_2)\cup\phi_3(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{\omega_{13}\,(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-p^2)}e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2,$$

$$\omega_{13}\,(\alpha_1,\alpha_2)=\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{21+}}-1\right]\left\langle Q_{1+}(\alpha_1)-\frac{\alpha_1 Q_{1+}(\alpha_{11+})}{\alpha_{11+}}\right\rangle+\left[1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{11-}}\right]\left\langle Q_{2-}(\alpha_2)-\frac{\alpha_2 Q_{2-}(\alpha_{21-})}{\alpha_{21-}}\right\rangle.$$

Выводы

В работе показано, что получаемые методом блочного элемента решения граничных задач, представленные в виде упакованных блочных элементов, представляют элементы абелевой группы. Установленное свойство в проблеме моделирования наноматериалов и в сейсмологии может играть важную роль.

Литература [References]

1. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Топологический метод решения граничных задач и блочные элементы. *ДАН*, 2013, т. 449, № 4, С. 657–660. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Topological method of solving boundary-value problem and block elements. *Doklady Akademii nauk = Doklady Physics*, 2013, vol. 58, no. 4, pp. 152–155. (in Russian)]
2. Бабешко, В.А., Ритцер, Д., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Федоренко, А.Г., К теории прогноза сейсмичности на основе механической концепции, топологический подход. *ДАН*, 2013, т. 450, № 2, с. 166–170. [Babeshko, V.A., Ritzer, D., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Fedorenko, A.G., Topological approach to the theory of prognosis of seismicity based on a mechanical conception. *Doklady Akademii nauk = Doklady Physics*, 2013, vol. 58, no. 5, pp. 181–185. (in Russian)]
3. Бабешко, В.А., Бабешко, О.М., Евдокимова, О.В., Трещины нового типа и модели некоторых наноматериалов. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2020, № 5, с. 13–20. [Babeshko, V.A., Babeshko O.M., Evdokimova O.V., New type cracks and models of some nanomaterials. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela = News of the Russian Academy of Sciences. Solid state mechanics*, 2020, no. 5, pp. 13–20. (in Russian)] DOI: 10.31857/S0572329920050025 EDN: XFDTSE
4. Зорич, В.А., *Математический анализ. Часть 2.* Москва, МЦНМО, 2002. [Zorich, V.A., *Matematicheskiy analiz. Chast' 2 = Mathematical analysis. Part 2.* Moscow, ICNMO, 2002. (in Russian)]
5. Келли, Д., *Общая топология.* Москва, Наука, 1968. [Kelly, D., *Obshchaya topologiya = General topology.* Moscow, Nauka, 1968. (in Russian)]
6. Мищенко, А.С., Фоменко, А.Т., *Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии.* Москва, Физматлит, 2004. [Mishchenko, A.S., Fomenko, A.T., *Kratkiy kurs differentsial'noy geometrii i topologii = A short course in differential geometry and topology.* Moscow, Fizmatlit, 2004. (in Russian)]
7. Голованов, Н.Н., Ильютко, Д.П., Носовский, Г.В., Фоменко, А.Т., *Компьютерная геометрия.* Москва, Академия, 2006. [Golovanov, N.N., Ilyutko, D.P., Nosovsky, G.V., Fomenko, A.T., *Komp'yuternaya geometriya = Computer geometry.* Moscow, Akademiya, 2006. (in Russian)]
8. Бабешко, В.А., Евдокимова, О.В., Бабешко, О.М., Бушуева, О.А., Топологическая дискретизация решений граничных задач механики сплошной среды. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2020, т. 16, № 3, с. 65–71. [Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Bushueva, O.A. Topological discretization of solutions to boundary value problems in continuum mechanics. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2020, vol. 16, no. 3, pp. 65–71. (in Russian)] DOI: 10.31429/vestnik-17-3-65-71 EDN: LVFVAE