

УДК 539.3

EDN: LNCTNJ DOI: 10.31429/vestnik-22-2-72-79

Определение термоупругого состояния поверхности трубы цилиндрической формы для случая лучистого теплового потока с одной внешней стороны и конвективном теплообмене с внутренней

А. И. Канарейкин  

Российский государственный геологоразведочный университет им. Серго Орджоникидзе (МГРИ),
ул. Миклухо-Маклая, 23, Москва, 117997, Россия

✉ Канарейкин Александр Иванович; ORCID 0000-0001-9108-7495; SPIN 1939-9504; e-mail: kanareykins@mail.ru

Аннотация. Работа посвящена вопросам термоупругости трубы цилиндрической формы при неравномерном её нагревании. В ней рассматривается вопрос о распределении температурного поля трубы цилиндрической формы для случая лучистого теплового потока с одной внешней стороны и при граничном условии третьего рода с внутренней стороны. При этом рассматриваемая задача является стационарной. Для её решения в работе рассматривается решение уравнения Пуассона и уравнения Эйлера. Основным методом является метод Фурье. Полученное выражение температурного поля трубы имеет аналитический вид, содержащий ряд Фурье. На основании полученной зависимости установлено, что температурное поле меняется по закону косинуса двойного аргумента. Что позволило определить возникающие напряжения в стенке цилиндра. Полученный результат может быть использован в инженерных расчётах теплообменных аппаратов.

Ключевые слова: теплообмен, температурное поле, труба, термонапряженность, уравнение Эйлера, конвективный теплообмен, лучистый тепловой поток, ряд Фурье.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.


Цитирование: Канарейкин А. И. Определение термоупругого состояния поверхности трубы цилиндрической формы для случая лучистого теплового потока с одной внешней стороны и конвективном теплообмене с внутренней // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 2. С. 72–79. EDN: LNCTNJ. DOI: 10.31429/vestnik-22-2-72-79

Поступила 10 апреля 2025 г. После доработки 21 июня 2025 г. Принято 24 июня 2025 г. Публикация 30 июня 2025 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2025. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Determination of the Thermoelastic State of the Cylindrical Tube Surface for the Case of Radiant Heat Flow from One Outside and Convective Heat Exchange from the Inside

A. I. Kanareykin 

Russian State Geological University named after Sergo Ordzhonikidze (MGRI), Miklukho-Maklaya st., 23, Moscow, 117997, Russia

✉ Alexandr I. Kanareykin; ORCID 0000-0001-9108-7495; e-mail: kanareykins@mail.ru

Abstract. The work is devoted to the issues of thermoelasticity of a cylindrical tube during uneven heating. It deals with the distribution of the temperature field of a cylindrical tube for the case of a radiant heat flow from one outside and under a boundary condition of the third kind from the inside. At the same time, the problem under consideration is stationary. To solve it, the paper considers the solution of the Poisson equation and the Euler equation. The main method is the Fourier method. The resulting expression of the temperature field of the pipe has an analytical form containing a Fourier series. Based on the obtained dependence, it is established that the temperature field varies according to the law of cosine of the double argument. This made it possible to determine the stresses that occur in the cylinder wall. The result obtained can be used in engineering calculations of heat exchangers.

Keywords: heat exchange, temperature field, pipe, thermal stress, Euler equation, convective heat transfer, radiant heat flux, Fourier series.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Kanareykin, A. I., Determination of the thermoelastic state of the cylindrical tube surface for the case of radiant heat flow from one outside and convective heat exchange from the inside. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 2, pp. 72–79. DOI: 10.31429/vestnik-22-2-72-79

Received 10 April 2025. Revised 21 June 2025. Accepted 24 June 2025. Published 30 June 2025.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2025. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](#) license.

Введение

Цилиндрические оболочки являются одним из наиболее широко используемых конструктивных элементов, встречающихся в теплотехнике, механике и ядерной энергетике [1–8].

Цилиндрические оболочечные конструкции часто подвергаются сжимающим напряжениям в направлении оси цилиндра, которые могут быть как равномерными, так и изменяющимися по всей площади. Потеря устойчивости часто является основным фактором, учитываемым при проектировании цилиндрических оболочек [9, 10].

Актуальность данной статьи заключается в том, что процесс теплообмена в трубе цилиндрической формы при заданных граничных условиях часто встречается в некоторых видах теплообменниках, а также полученный результат может быть применён для определения температурных напряжений в элементах теплообменников, появление которых обусловлено неоднородностью температурной деформации [11, 12].

Целью данной работы является исследование теплообмена трубы цилиндрической формы для случая лучистого теплового потока с одной внешней стороны и конвективного теплообмена с внутренней стороны. Задачами исследования был анализ методов решения уравнения Пуассона и уравнения Эйлера [13–15].

Научная новизна исследования заключается в том, что в работе были рассмотрены одновременно конвекция и тепловое излучение.

1. Постановка задачи

Пусть на трубу цилиндрической формы с одной стороны падает лучистый тепловой поток плотностью Q (рис. 1), а внутри трубы происходит конвективный теплообмен. Необходимо определить поле температур трубы и напряженного состояния, вызванного неоднородностью теплового поля.

Как видно из рис. 1, облучаемая сторона поверхности трубы будет воспринимать тепловой поток по углу неравномерно. Данный факт можно аппроксимировать следующей формулой

$$Q = q \cos \varphi. \quad (1.1)$$

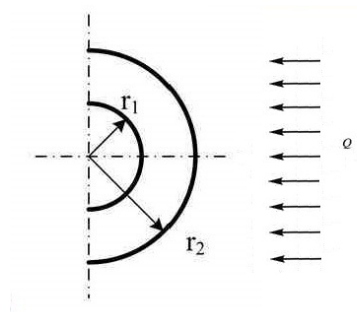


Рис. 1. Труба с заданными граничными условиями

Fig. 1. Pipe with given boundary conditions

Задачу теплообмена проще решать в полярной системе координат. Решение этой задачи сводится к решению уравнения [16]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (1.2)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = 0, \quad (1.3)$$

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_1} = \alpha(T - T_0), \quad (1.4)$$

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_2}^{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} = q \cos \varphi, \quad (1.5)$$

где α — коэффициент теплоотдачи, λ — коэффициент теплопроводности трубы, T_0 — температура окружающей среды, q — коэффициент теплоотдачи.

2. Построение решения задачи

Согласно методу Фурье, будем искать решение основного уравнения (1.2) в следующем виде

$$T(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi) + \rho(r). \quad (2.1)$$

Рассмотрим первое слагаемое. Оно содержит произведение двух функций от независимых переменных, каждая из которых удовлетворяет условию цикличности. Как следует из теории [17], множество функций $\Phi(\varphi)$, которое является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\Phi'' - n^2 \Phi = 0,$$

имеет вид

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi,$$

а для второй функции $R(r)$ решением является частным решением уравнения Эйлера

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0 \quad (2.2)$$

Его частное решение ищется в виде

$$R(r) = r^n.$$

Обе функции отвечают условию цикличности. Поэтому частное решение уравнения Эйлера имеет вид дискретности

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}.$$

Второе слагаемое из выражения (2.1) будем искать в виде логарифмической функции

$$\rho(r) = E \ln r + F.$$

Но вначале докажем, что функция (2.2) является решением уравнения (1.2). Для этого найдём частные производные и подставим в исходное (1.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{E}{r}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} &= -\frac{E}{r^2}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = -\frac{E}{r^2} + \frac{E}{r^2} = 0.$$

Как видим, условие выполняется. В итоге получаем искомое решение в виде дискретной совокупности нескольких функций

$$T(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) (C_n r^n + D_n r^{-n}) + E \ln r + F.$$

Из граничного условия (1.3) следует, что коэффициенты $B_n = 0$, тогда

$$T(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\varphi (C_n r^n + D_n r^{-n}) + E \ln r + F \quad (2.3)$$

или

$$T(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (M_n r^n + N_n r^{-n}) \cos n\varphi + E \ln r + F. \quad (2.4)$$

Воспользуемся граничным условием (1.5)

$$\frac{\lambda}{q} \sum_{n=0}^{\infty} (n M_n r_2^{n-1} - n N_n r_2^{-n-1}) \cos n\varphi + \frac{\lambda}{q} \frac{E}{r_2} = \cos \varphi. \quad (2.5)$$

Для этого разложим тригонометрическую функцию $f(x) = \cos \varphi$ в ряд Фурье на интервале $-\pi/2$ от до $\pi/2$ по формуле

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Так как функция $f(\varphi)$ является четной, $b_n = 0$, тогда

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi.$$

Определим коэффициенты ряда (2.4) по формуле

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(\varphi) \cos \left(\frac{n\pi\varphi}{T} \right) d\varphi,$$

откуда

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) d\varphi = \frac{4}{\pi} \sin \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) \cos(2n\varphi) d\varphi = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(2n\varphi + \varphi)}{2(2n+1)} + \frac{\sin(2n\varphi - \varphi)}{2(2n-1)} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{\cos(\pi n)}{2(2n+1)} - \frac{\cos(\pi n)}{2(2n-1)} = -\frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$f(\varphi) = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \cos 2n\varphi \right). \quad (2.6)$$

Подставим полученное разложение (2.6) в выражение (2.5)

$$\frac{\lambda}{q} \sum_{n=0}^{\infty} (nM_n r_2^{n-1} - nN_n r_2^{-n-1}) \cos n\varphi + \frac{\lambda}{q} \frac{E}{r_2} = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \cos 2n\varphi \right).$$

Сравнивая обе части уравнения, найдём константу E , а также связь между коэффициентами ряда Фурье

$$E = \frac{2qr_2}{\pi\lambda}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\lambda}{q} (2nM_{2n} r_2^{2n-2} - 2nN_{2n} r_2^{-2n-2}) = -\frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}. \quad (2.8)$$

С учётом (2.7) искомое температурное поле (2.3) примет вид

$$T(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (M_{2n} r^{2n} + N_{2n} r^{-2n}) \cos 2n\varphi + \frac{2qr_2}{\pi\lambda} \ln r + F.$$

Оставшиеся константы найдём из граничного условия (1.5)

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} (2nM_{2n} r_1^{2n-2} - 2nN_{2n} r_1^{-2n-2}) \cos 2n\varphi + \frac{2q}{\alpha\pi} \frac{r_2}{r_1} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (M_{2n} r_1^{2n} + N_{2n} r_1^{-2n}) \cos 2n\varphi + \frac{2qr_2}{\pi\lambda} \ln r_1 + F - T_0. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} F = T_0 + \frac{2q}{\alpha\pi} \frac{r_2}{r_1} - \frac{2qr_2}{\pi\lambda} \ln r_1, \\ \frac{\lambda}{\alpha} (2nM_{2n} r_1^{2n-2} - 2nN_{2n} r_1^{-2n-2}) = M_{2n} r_1^{2n} + N_{2n} r_1^{-2n}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Тогда температурное поле (1.4) примет вид

$$T(r, \varphi) = T_0 + \frac{2q}{\alpha\pi} \frac{r_2}{r_1} + \frac{2qr_2}{\pi\lambda} \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (M_{2n} r^{2n} + N_{2n} r^{-2n}) \cos 2n\varphi. \quad (2.10)$$

Теперь определим коэффициенты M_{2n} и N_{2n} . Из выражения (2.9) коэффициент N_{2n} равен

$$N_{2n} = M_{2n} r_1^{4n} \frac{2n\lambda - \alpha r_1^2}{2n\lambda + \alpha r_1^2}, \quad (2.11)$$

а из выражения (2.10) коэффициент M_{2n} равен

$$M_{2n} = N_{2n} r_2^{-4n} - \frac{2q}{\pi\lambda n r_2^{2n-2}} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}. \quad (2.12)$$

Решая систему алгебраических уравнений (2.11) и (2.12), температурное поле (2.3) получим в виде

$$\begin{aligned} T(r, \varphi) = T_0 + \frac{2q}{\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_2}{\lambda} \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} M_{2n} r_1^{2n} \left[\left(\frac{r}{r_1} \right)^{2n} + \frac{2n\lambda - \alpha r_1^2}{2n\lambda + \alpha r_1^2} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{2n} \right] \cos 2n\varphi \right\}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$M_{2n} = \frac{1}{\lambda n r_2^{2n-2}} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \frac{1}{\frac{2n\lambda - \alpha r_1^2}{2n\lambda + \alpha r_1^2} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{4n} - 1}.$$

Теперь рассмотрим вопрос определения результирующих напряжений и моментов в стенке. Определение термонапряжений в трубе сводится к решению плоской задачи термоупругости. Распределение приложенной нагрузки и момента найдём по формулам

$$p = \alpha_T E \chi \int_L \frac{\partial T}{\partial n} dl,$$

$$M = \alpha_T E \chi \int_L \left(x \frac{\partial T}{\partial n} + y \frac{\partial T}{\partial S} \right) dl,$$

где α_T — коэффициент линейного расширения, E — модуль Юнга, χ — коэффициент размерности, $dl = r d\varphi$.

Из полученного выражения (2.13) найдём частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial n} &= \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_2} = \frac{2q}{\pi} \left\{ \frac{1}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} M_{2n} r_1^{2n-1} \left[\left(\frac{r}{r_1} \right)^{2n-2} + r_1^2 \frac{2n\lambda - \alpha r_1^2}{2n\lambda + \alpha r_1^2} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{2n+2} \right] \cos 2n\varphi \right\}, \\ \frac{\partial T}{\partial S} &= \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \Big|_{r=r_2} = -\frac{4q}{\pi r_2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n M_{2n} r_1^{2n} \left[\left(\frac{r}{r_1} \right)^{2n} + \frac{2n\lambda - \alpha r_1^2}{2n\lambda + \alpha r_1^2} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{2n} \right] \sin 2n\varphi \right\}. \end{aligned}$$

Тогда подставив всё в (2.8) с применением методов дифференцирования и интегрирования получим

$$p = \frac{4q\alpha_T E \chi}{\lambda}, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{2q\alpha_T E \chi}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ r_2 \left\{ \frac{1}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} M_{2n} r_1^{2n-1} \left[\left(\frac{r}{r_1} \right)^{2n-2} + r_1^2 \frac{2n\lambda - \alpha r_1^2}{2n\lambda + \alpha r_1^2} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{2n+2} \right] \cos 2n\varphi \right\} \cos \varphi - \right. \\ &\quad \left. - 2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n M_{2n} r_1^{2n} \left[\left(\frac{r}{r_1} \right)^{2n} + \frac{2n\lambda - \alpha r_1^2}{2n\lambda + \alpha r_1^2} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{2n} \right] \sin 2n\varphi \right\} \sin \varphi \right\} d\varphi = 0. \end{aligned}$$

3. Анализ полученного решения

Как следует из полученного выражения (2.14) давление определяется неравномерностью нагрева поверхности излучением и не обусловлено конвективным теплообменом. В случае отсутствия лучистого теплообмена ($q = 0$) давление будет равно нулю.

Выводы

1. В приведённой работе на основе метода Фурье и с применением дифференцирования было получено аналитическое выражение распределения температурного поля трубы цилиндрической формы для случая лучистого теплового потока с одной внешней стороны и при конвективном теплообмене с внутренней. Что позволило определить возникающие напряжения в стенке цилиндра.

2. Варьируя геометрической формой поперечного сечения можно снизить уровень возникающих термонапряжений.

3. Полученный результат может быть применён для расчёта температурных напряжений в элементах теплообменников.

Литература [References]

1. Nasikas, A., Karamanos, S.A., Papanicolopoulos, S.A., *Non-Associative Plasticity for Structural Instability of Cylindrical Shells in the Inelastic Range*. University of Edinburgh, 2022. DOI: [10.7488/era/2590](https://doi.org/10.7488/era/2590)
2. Fajuyitan, O.K., Sadowski, A., Wade, A., *Length Effects in Elastic Imperfect Cylindrical Shells under Uniform Bending*. University of London, 2018.
3. Локтева, Н.А., Нестационарное деформирование анизотропной круговой цилиндрической оболочки. *Труды МАИ*, 2021, № 120, с. 139–145. [Lokteva, N.A., Unsteady deformation of an anisotropic circular cylindrical shell. *Trudy MAI = Proc. of MAI*, 2021, no. 120, p. 139–145. (in Russian)]
4. Kanareykin, A.I., Mathematical modeling of the fuel element of a nuclear reactor taking into account the temperature dependence of the thermal conductivity of the fuel element made of uranium oxide. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, volume 990, IV International scientific and practical conference “Actual problems of the energy complex: physical processes, mining, production, transmission, processing and environmental protection”, Moscow, 2022, p. 012012. DOI: [10.1088/1755-1315/990/1/012012](https://doi.org/10.1088/1755-1315/990/1/012012)
5. Kanareykin, A., Analysis of the thermally stressed state of the heat-generating element in the form of an ellipsoid. *E3S Web of Conferences*, 2024, vol. 549, p. 05006. DOI: [10.1051/E3SCONF/202454905006](https://doi.org/10.1051/E3SCONF/202454905006)
6. Kanareykin, A., Modeling of the temperature field and thermal stresses of a fuel element with variable volumetric heat release. *E3S Web of Conferences*, 2024, vol. 592, p. 03009. DOI: [10.1051/E3SCONF/202459203009](https://doi.org/10.1051/E3SCONF/202459203009)
7. Kanareykin, A., Heat exchange between the heating element and its shell under the boundary condition of the fourth kind. *E3S Web of Conferences. International Scientific Siberian Transport Forum - TransSiberia 2023*, 2023, p. 07039. DOI: [10.17586/1606-4313-2023-22-3-68-73](https://doi.org/10.17586/1606-4313-2023-22-3-68-73)
8. Kanareykin, A., Heat exchange in fuel rods at different cross sections. *E3S Web of Conferences. XI International Scientific and Practical Conference Innovative Technologies in Environmental Science and Education (ITSE-2023)*, EDP Sciences, 2023, p. 02021. DOI: [10.1051/e3sconf/202343102021](https://doi.org/10.1051/e3sconf/202343102021)
9. Железнов, Л.П., Серьезнов, А.Н., Нелинейное деформирование и устойчивость подкрепленной композитной цилиндрической оболочки при осевом сжатии. *Полет. Общероссийский научно-технический журнал*, 2022, № 2, pp. 40–48. [Zheleznov, L.P., Serebrenov, A.N., Nonlinear deformation and stability of a reinforced composite cylindrical shell under axial compression. *Polet. Obshcherossiyskiy nauchno-tekhicheskiy zhurnal = Flight. All-Russian Scientific and Technical Journal*, 2022, no. 2, pp. 40–48. (in Russian)]
10. Петров, И.И., Фундаментальные решения для ортотропной цилиндрической оболочки. *Труды МАИ*, 2022, № 124, с. 23–29. [Petrov, I.I., Fundamental solutions for an orthotropic cylindrical shell. *Trudy MAI = Proc. of MAI*, 2022, no. 124, pp. 23–29. (in Russian)]
11. Канарейкин, А.И., Уравнение Лапласа в теплофизике. *НаукоСфера*, 2023, № 12-2, с. 241–245. [Kanarekin, A.I., Laplace equation in thermophysics. *Naukosfera = Sphere of Science*, 2023, no. 12-2, p. 241–245. (in Russian)]
12. Захаров, В.А., Верификация методики численного исследования процесса теплообмена в кольцевых каналах теплообменного аппарата. *Машиностроение и машиноведение*, 2020, № 1(70), с. 14–16. [Zakharov, V.A., Verification of the methodology for numerical investigation of the heat exchange process in the annular channels of a heat exchanger. *Mashinostroenie i mashinovedenie = Mechanical Engineering and Machine Science*, 2020, no. 1, p. 14–16. (in Russian)]
13. Канарейкин, А.И., О частном решении дифференциального уравнения в частных производных без перехода к эллиптической системе координат. *Научные труды Калужского государственного университета им. К.Э. Циолковского. Региональная университетская научно-практическая конференция. Сер. «Естественные науки»*, 2015, с. 140–141. [Kanarekin, A.I., On the partial solution of a partial differential equation without transition to an elliptic coordinate system. *Nauchnye trudy Kaluzhskogo gosudarstvennogo universiteta imeni K.E. Tsiolkovskogo. Regional'naya universitetskaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya. Seria "Estestvennye nauki" = Scientific papers of Kaluga State University named after K.E. Tsiolkovsky. Regional University Scientific and Practical Conference. Ser. "Natural Sciences"*, 2015, pp. 140–141. (in Russian)]
14. Канарейкин, А.И., Решение краевой задачи Неймана для уравнения Пуассона в цилиндрическом стержне. *Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности*, 2023, т. 8, № 9 (35), с. 73–78. [Kanarekin, A.I., Solution of the Neumann boundary value problem for the Poisson equation in a cylindrical rod. *Mezhdunarodnyy zhurnal informatsionnykh tekhnologiy i energoeffektivnosti = International Journal of Information Technology and Energy Efficiency*, 2023,

vol. 8, no. 9, pp. 73-78. (in Russian)]

15. Несис, Е.И., *Методы математической физики*. Москва, Просвещение, 1977. [Nesis, E.I., *Metody matematicheskoy fiziki = Methods of mathematical Physics*. Moscow, Prosveshchenie, 1977. (in Russian)]
16. Канарейкин, А.И., Теплообмен трубы цилиндрической формы для случая лучистого теплового потока с одной внешней стороны и при граничном условии третьего рода с внутренней стороны. *Вестник Международной академии холода*, 2024, № 3, с. 78–83. [Kanarekin, A.I., Heat exchange of a cylindrical tube for the case of a radiant heat flow from one outside and under a boundary condition of the third kind from the inside. *Vestnik Mezhdunarodnoy akademii kholoda = Bull. of the International Academy of Refrigeration*, 2024, no. 3, pp. 78–83. (in Russian)] DOI: [10.17586/1606-4313-2024-23-3-78-83](https://doi.org/10.17586/1606-4313-2024-23-3-78-83)
17. Канарейкин, А.И., Теплообмен трубы эллиптической формы для случая лучистого теплового потока с внешней стороны и при конвективном теплообмене с внутренней. *Инженерная физика*, 2025, № 1, с. 58–64. [Kanarekin, A.I., Elliptical tube heat exchange for the case of radiant heat flow from the outside and during convective heat exchange from the inside. *Inzhenernaya fizika = Engineering Physics*, 2025, no. 1, pp. 58–64. (in Russian)] DOI: [10.25791/infizik.1.2025.1456](https://doi.org/10.25791/infizik.1.2025.1456)