

УДК 539.3

EDN: JAAWQA DOI: 10.31429/vestnik-22-2-59-71

Решение осесимметричных задач эластостатики для анизотропных тел в смешанной постановке граничных условий

Д. А. Иванычев  , Ю. А. Бордюгова, Д. И. Балыкин, Д. В. Ездакова

Липецкий государственный технический университет, ул. Интернациональная, 5, Липецк, 398600, Россия

✉ Иванычев Дмитрий Алексеевич; ORCID 0000-0002-7736-9311; SPIN 5839-4063; e-mail: Lsivdmal@mail.ru

Аннотация. В работе предложен подход по определению напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропных тел вращения, находящихся в равновесии под действием условий на границе тела, характерных для смешанной задачи теории упругости. Предложенный подход представляет собой развитие метода граничных состояний. Предложены новые методики формирования базисов внутренних и граничных состояний и назначение скалярных произведений в этих пространствах. Пространства состояний сопряжены изоморфизмом, что позволяет свести отыскание внутреннего состояния к исследованию граничного состояния. Решены задачи для тела в форме полушара из горной породы, находящегося под действием усилий распределенного и сосредоточенного характера. Проведен анализ точности решения. Результаты представлены в графическом виде.

Ключевые слова: осесимметричные задачи, метод граничных состояний, трансверсально-изотропные тела, смешанная задача, состояние среды.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Иванычев Д. А., Бордюгова Ю. А., Балыкин Д. И., Ездакова Д. В. Решение осесимметричных задач эластостатики для анизотропных тел в смешанной постановке граничных условий // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 2. С. 59–71. EDN: JAAWQA. DOI: 10.31429/vestnik-22-2-59-71

Поступила 30 апреля 2025 г. После доработки 7 июня 2025 г. Принято 15 июня 2025 г. Публикация 30 июня 2025 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2025. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Solution of Axisymmetric Elastostatic Problems for Anisotropic Bodies in a Mixed Formulation of Boundary Conditions

D. A. Ivanychev  , Yu. A. Bordyugova, D. I. Balykin, D. V. Yezdakova

Lipetsk State Technical University, Internationalnaya st., 5, Lipetsk, 398600, Russia

✉ Dmitry A. Ivanychev; ORCID 0000-0002-7736-9311; e-mail: Lsivdmal@mail.ru

Abstract. The paper proposes an approach to determining the stress-strain state of transversely isotropic bodies of revolution that are in equilibrium under the action of conditions on the body boundary that are characteristic of a mixed problem of elasticity theory. The proposed approach is a development of the boundary state method. New methods for forming bases of internal and boundary states and assigning scalar products in these spaces are proposed. The state spaces are associated with isomorphism, which allows finding the internal state to be reduced to studying the boundary state. The problems are solved for a body in the form of a hemisphere made of rock that is under the action of distributed and concentrated forces. The accuracy of the solution is analyzed. The results are presented in graphical form.

Keywords: axisymmetric problems, boundary state method, transversely isotropic bodies, mixed problem, state of the medium.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Ivanychev, D. A., Bordyugova, Yu. A., Balykin, D. I., Yezdakova, D. V., Solution of axisymmetric elastostatic problems for anisotropic bodies in a mixed formulation of boundary conditions. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 2, pp. 59–71. DOI: 10.31429/vestnik-22-2-59-71

Received 30 April 2025. Revised 7 June 2025. Accepted 15 June 2025. Published 30 June 2025.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2025. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Элементы конструкций из современных материалов, такие как поликристаллические металлы, металлокерамика, а также композитные материалы, обладающие значительной анизотропией свойств, часто пребывают в условиях, когда на одну часть поверхности тела наложены ограничения кинематического характера, а на другую часть действуют силы. Требования оптимального проектирования, сокращения времени и материальных затрат на экспериментальную отработку определили значительный интерес к совершенствованию методов прогнозирования напряженно-деформированного состояния, возникающего от совокупности таких воздействий, а в силу сложной физической природы материалов, это еще составляет и актуальную научную задачу.

В теории упругости смешанные задачи рассматривались гораздо реже, чем задачи с однотипными граничными условиями, однако их исследование проводилось в приложении к различным направлениям механики. Например, в работе [1] рассматривался алгоритм численного решения смешанной задачи теории упругости для тела, имеющего одностороннее контактное взаимодействие с упругим полупространством. В работе [2] предложен аналитический метод решения смешанной плоской задачи теории упругости для двухслойной кольцевой области. В работе [3] проведен математический и численный анализ асимптотических решений трехмерных статических задач теории упругости со смешанными граничными условиями. В работе [4] для решения смешанных задач использовались конечно-элементные технологии, основанные на смешанной формулировке, построенной с помощью функционала Рейсснера. В работе [5] метод граничных состояний применен для решения смешанных задач теории изотропной упругости, а в работе [6] он получил распространение на класс смешанных задач для неограниченной упругой среды с полостями.

Работы [7–9] посвящены исследованию упругого состояния трансверсально-изотропных цилиндрических тел под действием массовых сил. Решены первая, вторая основные задачи теории упругости и контактная задача без трения в области контакта. Решения представляют собой не сумму частных решений отдельных задач, а единое упругое поле, удовлетворяющее одновременно как условиям на границе тела, так и массовым силам внутри области.

В [10] разработан обратный метод определения напряженно-деформированного состояния упругого изотропного тела от непрерывных объемных сил. В работе [11] обратный метод использовался как вспомогательное средство построения полно параметрических решений для слабо анизотропной ортотропной пластинки.

Настоящая работа посвящена решению смешанной задачи теории упругости для трансверсально-изотропных тел вращения при отсутствии массовых сил.

1. Постановка задачи

Рассматривается равновесие трансверсально-изотропного тела, ограниченного одной или несколькими коаксиальными поверхностями вращения (рис. 1). В основной смешанной задаче требуется восстановить механическое поле в области V по заданным поверхностным усилиям $\mathbf{p} = (p_r, p_z)$ на части границе S_p и перемещениям $\mathbf{u} = (u_r, u_z)$ на части границе S_u , $S = S_p + S_u$.

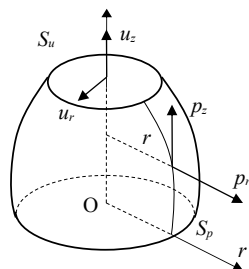


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения

Fig. 1. Transversely isotropic solid of revolution

Требуется определить возникающее в теле напряженно-деформированное состояние.

В данной работе предполагается развитие энергетического метода граничных состояний [12] для класса статических смешанных задач теории упругости для анизотропных тел вращения. На область тела наложено ограничение: любая линия, проведенная в области тела, должна пересекать его поверхность не более, чем в двух точках.

2. Определяющие уравнения теории упругости для однородной трансверсально-изотропной среды в цилиндрических координатах

Дифференциальные уравнения равновесия в цилиндрической системе координат z, r, θ при отсутствии массовых сил имеют вид [13]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{zr}}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 0.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Соотношения Коши [13]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{zr} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Обобщенный закон Гука [13]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} [\sigma_z - \nu_z (\sigma_r + \sigma_\theta)]; \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z; \\ \gamma_{zr} &= \frac{1}{G_z} \tau_{zr}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_z} \tau_{z\theta}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_r} \tau_{r\theta} = \frac{2(1 + \nu_r)}{E_r} \tau_{r\theta}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Здесь E_z и E_r — модули упругости соответственно в направлении оси z и в плоскости изотропии, ν_z — коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие вдоль r при растяжении вдоль оси z , ν_r — коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскостях изотропии при растяжении в этих же плоскостях, G_r и G_z — модуль сдвига в плоскостях изотропии и перпендикулярных к ним.

3. Общее решение задачи эластостатики

В работе [13] на основе метода интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженным и деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного тела и определенными вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которого зависят от двух координат z и y (переменных).

В качестве плоских вспомогательных состояний используется плоская деформация, возникающая в цилиндрах, имеющих в точке плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости zy (направление η) [13]:

$$\begin{aligned}\sigma_z^{pl} &= -\operatorname{Re}[\gamma_1^2 \phi_1' (s_1) + \gamma_2^2 \phi_2' (s_2)]; \quad \sigma_y^{pl} = \operatorname{Re}[\phi_1' (s_1) + \phi_2' (s_2)]; \quad \sigma_{zy}^{pl} = -\operatorname{Re}[\gamma_1 \phi_1' (s_1) + \gamma_2 \phi_2' (s_2)]; \\ \sigma_\eta^{pl} &= \nu_r \sigma_y^{pl} + \nu_z \frac{E_r}{E_z} \sigma_z^{pl}; \quad \tau_{z\theta} = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0; \\ u_z^{pl} &= \operatorname{Re}[p_1 \phi_1 (s_1) + p_2 \phi_2 (s_2)]; \quad u_y^{pl} = \operatorname{Re}[iq_1 \phi_1 (s_1) + iq_2 \phi_2 (s_2)],\end{aligned}\quad (3.1)$$

где константы q_1 и p_1 определены упругими параметрами материала, $\varsigma_j = z/\gamma_j + iy$, γ_j — комплексные корни характеристического уравнения:

$$\left(1 - \nu_z^2 \frac{E_r}{E_z}\right) \gamma_j^4 - \left[\frac{E_z}{G_z} - 2\nu_z(1 + \nu_r)\right] \gamma_j^2 + (1 - \nu_r^2) \frac{E_z}{G_r} = 0,$$

функции $\phi_j(\varsigma_j)$ — аналитические по своим переменным.

Переход к осесимметричному пространственному состоянию в цилиндрических координатах осуществляется по зависимостям [9]

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_z^{pl}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_{zr} = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_{zy}^{pl}}{r\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_{z\theta} = \sigma_{r\theta}; \\ \sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} - \sigma_\eta^{pl})(2y^2 - r^2)}{r^2\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_r + \sigma_\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} + \sigma_\eta^{pl})}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \\ u &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_y^{pl}}{r\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad w = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_z^{pl}}{r\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad v = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В силу осевой симметрии граничных условий компоненты тензора напряжений $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$ и тензора деформаций $\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{z\theta}$ равны нулю.

Соотношения (3.2) полностью удовлетворяют уравнения теории упругости (2.1)–(2.3).

4. Метод решения

Метод граничных состояний [12] является энергетическим методом решения задач уравнений математической физики. Он показал свою эффективность в решении краевых задач теории упругости как для изотропных, так и для анизотропных сред, в решении задач термоупругости, гидродинамики идеальной жидкости, динамики (колебаний) изотропных тел.

Фундамент метода составляют пространства внутренних Ξ и граничных G состояний:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}; \quad G = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots\}.$$

Внутреннее состояние определяется наборами компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений:

$$\xi_k = \{u_i^k, \varepsilon_{ij}^k, \sigma_{ij}^k\}. \quad (4.1)$$

Основную сложность формирования решения в МГС является конструирование базиса внутренних состояний, который опирается на общее или фундаментальное решение для среды; также возможно использование каких-либо частных или специальных решений.

Скалярное произведение в пространстве Ξ внутренних состояний выражается через внутреннюю энергию упругого деформирования (отсюда и принадлежность метода к классу энергетических). Например, для 1-го и 2-го внутреннего состояния тела, занимающего область V

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dv,$$

причем в силу коммутативности состояний среды

$$(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2, \xi_1) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV = \int_V \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1 dV.$$

Граничное состояние определяется компонентами вектора перемещения точек границы и поверхностных усилий

$$\gamma_k = \{u_i^k, p_i^k\}; \quad p_i^k = \sigma_{ij}^k n_j,$$

где n_j — компонента нормали к границе.

В пространстве граничных состояний G скалярное произведение выражает работу внешних сил по поверхности тела S , например, для 1-го и 2-го состояния

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_S p_i^1 u_{ij}^2 dS,$$

причем в силу принципа возможных перемещений

$$(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_2, \gamma_1) = \int_S p_i^1 u_i^2 dS = \int_S p_i^2 u_i^1 dS.$$

Доказано, что в случае гладкой границы оба пространства состояний являются гильбертовыми и сопряжены изоморфизмом [12]. По определению, каждому элементу $\xi_k \in \Xi$ соответствует единственный элемент $\gamma_k \in G$, причем это соответствие взаимно-однозначное: $\xi_k \leftrightarrow \gamma_k$. Это позволяет свести отыскание внутреннего состояния к построению изоморфного ему граничного состояния. Последнее существенно зависит от краевых условий. В случае первой и второй основной задачи механики проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье разложения искомых внутреннего ξ и граничного γ состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k; \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k, \quad (4.2)$$

или в развернутом виде

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_i^k; \quad u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^k; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^k; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^k.$$

Коэффициенты Фурье в случае первой основной задачи с заданными на границе усилиями $\mathbf{p} \in \{p_r, p_z\}$, имеют представление

$$c_k = (\mathbf{p}, \mathbf{u}^k) = \int_S (p_r u^k + p_z w^k) dS,$$

где $\mathbf{u}^k = \{u^k, w^k\}$ — вектор перемещения в базисном элементе $\gamma_k = \{u_i^k, p_i^k\}$.

Коэффициенты Фурье в случае второй основной задачи с заданными на границе перемещениями $\mathbf{u} \in \{u, w\}$, имеют вид

$$c_k = (\mathbf{u}, \mathbf{p}^k) = \int_S (u p_r^k + w p_z^k) dS,$$

где $\mathbf{p}^k \in \{p_r^k, p_z^k\}$ — вектор усилия в базисном элементе $\gamma_k = \{u_i^k, p_i^k\}$.

Основная смешанная задача состоит в определении упругих характеристик, если на одной части границы S_p заданы поверхностные усилия \mathbf{p} , а на другой части границы S_u — поверхностные перемещения \mathbf{u} . Тогда задача сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений [15]

$$\sum_{j=1}^{\infty} Q_{kj} c_j = q_k, \quad Q_{kj} = 2\delta_{jk} - a_{kj}; \quad (4.3)$$

$$a_{kj} = \int_{S_p} u_i^{(j)} p_i^{(k)} dS_p + \int_{S_u} p_i^{(j)} u_i^{(k)} dS_u; \quad q_k = \int_{S_u} u_i p_i^{(k)} dS_u + \int_{S_p} p_i u_i^{(k)} dS_p,$$

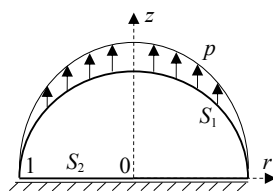


Рис. 2. Граничные условия в первой задаче для полушара

Fig. 2. Boundary conditions in the first problem for a hemisphere

где компоненты с верхними индексами (j) и (k) принадлежат соответствующим компонентам в базисе граничных состояний. Компоненты без индексов соответствуют заданным граничным условиям [15].

Окончательно решение имеет вид (4.2). Тестирование коэффициентов Фурье осуществляется подстановкой одного из базисных элементов с соответствующими граничными условиями в качестве заданного, при этом должны выполняться условия $c_n = 1$, n — номер тестируемого элемента, остальные коэффициенты Фурье должны равняться нулю.

5. Формирование базиса внутренних состояний

Основную сложность формирования решения в методе граничных состояний является конструирование базиса внутренних состояний, который опирается на общее или фундаментальное решение для среды. Также возможно использование каких-либо частных или специальных решений.

Базисные наборы (4.1) можно сконструировать, генерируя возможные варианты для двух аналитических функций $\phi_1(s_1)$ и $\phi_2(s_2)$ плоского вспомогательного состояния (3.1). Общий вид представления аналитических функций для односвязной ограниченной области:

$$\phi_j(s_j) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{jn} s_j^n, \quad (j = 1, 2).$$

Базис пространств внутренних состояний в этом случае составляют наборы:

$$\begin{pmatrix} \phi_1(s_1) \\ \phi_2(s_2) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} s_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ s_2^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i s_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i s_2^n \end{pmatrix}, \dots \right\}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

Придавая аналитическим функциям в общем решении (3.1) последовательно значения (5.1), определяют все упругие характеристики плоского вспомогательного состояния, далее следует переход к трехмерному состоянию по зависимостям (3.2).

Дальнейший ход решения уже в пространственном состоянии осуществляется по методике, описанной в п. 4.

6. Решение задач для полушара

Рассмотрим равновесие трансверсально-изотропного тела в форме полушара (рис. 2) из горной породы алевролита крупного темно-серого [16]. После процедуры обезразмеривания, аналогия которой приведена в [17], с масштабным коэффициентом $\eta^* = 10^5$ кгс/см² упругие характеристики материала: $E_z = 6,21$; $E_r = 5,68$; $G_z = 2,55$; $\nu_z = 0,22$; $\nu_r = 0,24$ и область тела $D = \{(z, r) \mid 0 \leq r \leq 1, -2 \leq z \leq 2\}$.

Граница S_2 полушара закреплена: $\mathbf{u} = 0$; к границе S_1 приложена растягивающая вдоль оси z нагрузка: $p_r = 0$; $p_z = 1 - r^2$ (рис. 2).

После построения базиса внутренних состояний (4.1), проводится его ортогонализация по рекурсивно-матричному алгоритму [18]. Компоненты вектора перемещения в ортонормированном базисном наборе представлены в табл. 1 (показано 6 элементов).

Таблица 1. Ортонормированный базисный набор компонент вектора перемещения

Table 1. Orthonormal basis set of displacement vector components

N	u	w
ξ_1	$0,32946r$	$-0,61716z$
ξ_2	$-0,30358r$	$0,31968z$
ξ_3	$-0,2774rz + 0,7398rz$	$0,3421r^2 + 0,5344z^2 - 0,7125z^2$
ξ_4	$-0,6311rz + 1,6831rz$	$-1,1545r^2 + 0,1639z - 0,2185z^2$
ξ_5	$0,5598r - 0,3613r^3 - 1,4441rz + 1,3536rz^2$	$-0,2259r^2 - 0,8078z + 1,3536r^2z + 1,0702z^2 - 0,8936z^3$
ξ_6	$0,398r + 0,0121r^3 - 2,9829rz + 3,5543rz^2$	$1,1265r^2 + 0,6433z - 2,1265r^2z + 1,0546z^2 - 0,9727z^3$

Таблица 2. Матрица коэффициентов a_{kj} ($\kappa = 1$)

Table 2. Matrix of coefficients a_{kj} ($\kappa = 1$)

1	0	0,565	-1,029	-0,574	0,723	0,321	-0,396	-0,078
0	1	-0,013	0,853	-0,176	-1,092	0,237	1,022	-0,008
-0,565	0,013	1	1,367	0,281	-1,34	-0,236	0,782	0,109
1,029	-0,853	-1,367	1	0,547	1,919	0,105	-2,197	-0,323
0,574	0,176	-0,281	-0,547	1	0,294	0,162	0,019	-0,152
-0,723	1,092	1,34	-1,919	-0,294	1	-0,58	1,085	0,493
-0,321	-0,237	0,236	-0,105	-0,162	0,579	1	-0,561	0,066
0,396	-1,022	-0,782	2,197	-0,019	-1,085	0,561	1	-0,23
0,078	0,008	-0,109	0,323	0,152	-0,493	-0,066	0,23	1

Усеченная до $N = 9$, матрица коэффициентов a_{kj} (4.3) представлена в табл. 2. Здесь и далее истинное значение показанной величины в таблицах и на рисунках равно показанному значению, умноженному на коэффициент κ .

Для восстановления упругого поля потребовался базис из 25 элементов. В табл. 3 приведены значения коэффициентов q_k (4.3).

Рис. 3 представляет собой график, иллюстрирующий «насыщение» суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя). Это является косвенным признаком сходимости решения.

Проверка результата и оценка точности решения осуществляется сопоставлением заданных граничных условий с восстановленными в результате решения (рис. 4). Здесь и далее, на графиках заданные (—) и восстановленные (||||) ГУ изображены в масштабе. Например, истинное значение p_r на левом верхнем графике рис. 4 равно значению на графике, умноженному на коэффициент κ .

Как видно из правого верхнего графика, усилие p_z на поверхности S_1 восстановлено с высокой погрешностью (13 %). Это связано с влиянием геометрической особенности (угловая точка на меридиональном сечении) тела на распределение напряжений вблизи такой особенности. Увеличение числа используемых элементов базиса не приводит к удовлетворительному результату — сходимость в этой области не наблюдается. Поэтому решение в этой области

Таблица 3. Матрица коэффициентов q_k ($\kappa = 10^{-4}$)

Table 3. Matrix of coefficients q_k ($\kappa = 10^{-4}$)

q_1	-1374,44	q_8	9,03	q_{15}	-4,076	q_{22}	12,855
q_2	955,68	q_9	15,661	q_{16}	12,458	q_{23}	14,428
q_3	-348,14	q_{10}	-1,876	q_{17}	22,934	q_{24}	-13,942
q_4	43,139	q_{11}	39,103	q_{18}	-21,04	q_{25}	-7,833
q_5	-1,052	q_{12}	-25,361	q_{19}	-14,052		
q_6	147,178	q_{13}	-31,2	q_{20}	5,569		
q_7	-85,134	q_{14}	15,466	q_{21}	-5,515		

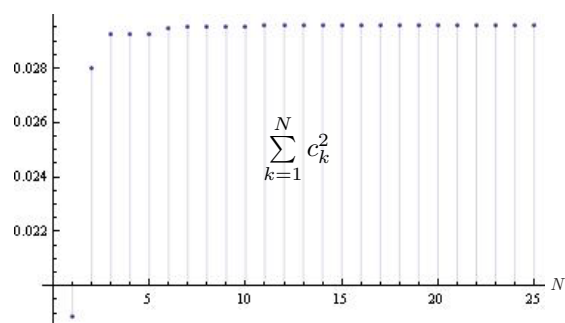


Рис. 3. Сумма Бесселя в задаче для полушара

Fig. 3. Bessel sum in the problem for a hemisphere

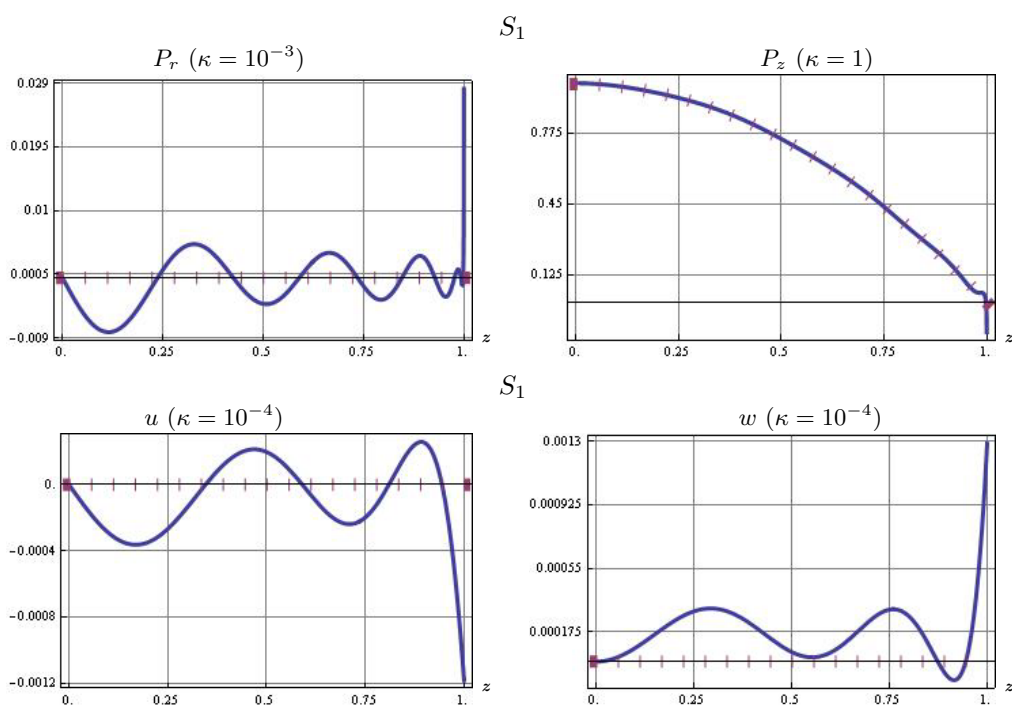


Рис. 4. Верификация граничных условий на участках границы

Fig. 4. Verification of boundary conditions on border sections

(достаточно близкой к угловой поверхности тела) не достоверно и его нужно исключить из рассмотрения.

Изолинии полученных компонент упругого поля представлены на рис. 5 (выражения имеют громоздкий вид и в явном виде необозримы). В силу осевой симметрии изображена область $\{(z, r) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$. Контур деформированного состояния (рис. 5) показан в гипертрофированном виде.

Рассмотрим теперь для этого же цилиндра задачу с сжимающими усилиями более локального характера. Граница S_2 закреплена ($\mathbf{u} = 0$); к границе S_1 приложены усилия (развертка показана на рис. 6):

$$p_r = 0; \quad p_z = \frac{1}{50} \left(\frac{50}{51} - \frac{1}{1/50 + r^2} \right).$$

Развертка поверхности S_1 с граничными условиями показана на рис. 6.

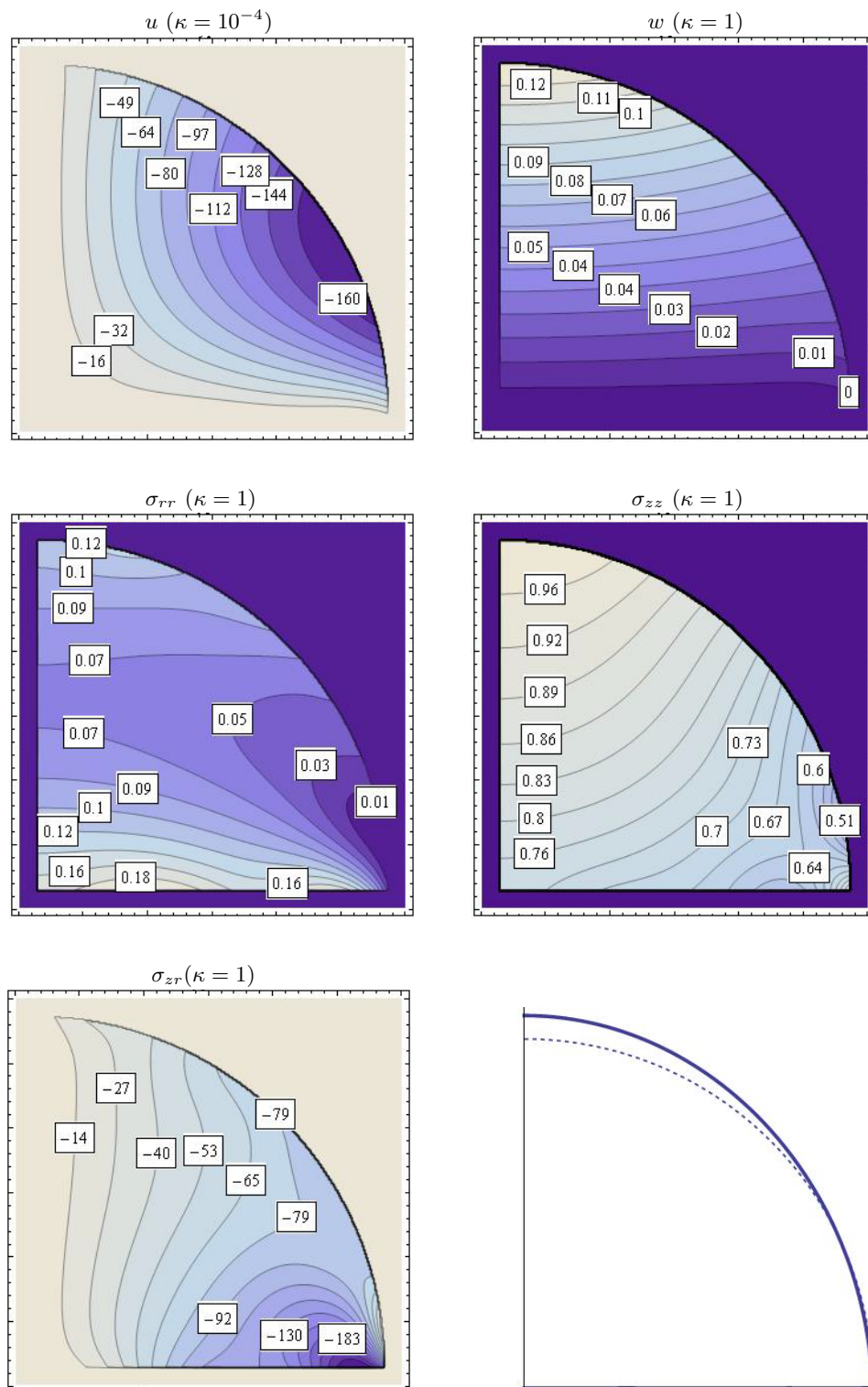


Рис. 5. Изолинии характеристик напряженно-деформированного состояния и контур деформированного тела

Fig. 5. Isolines of stress-strain state characteristics and contour of deformed body

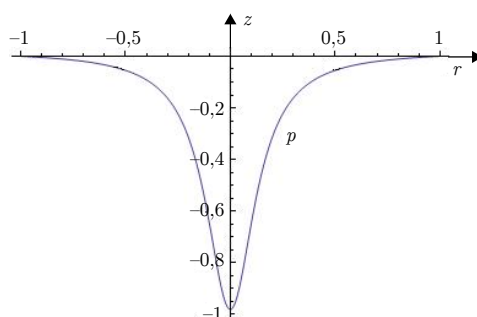


Рис. 6. Развертка граничных условий на поверхности S_1

Fig. 6. Unfolding of boundary conditions on the surface S_1

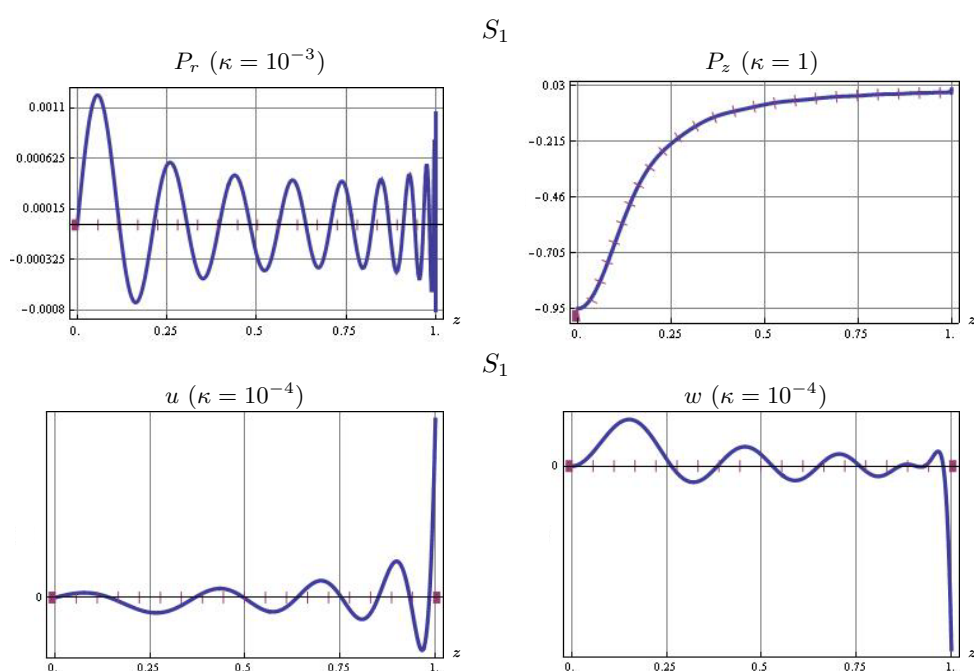


Рис. 7. Верификация граничных условий на участках границы S_1 и S_2 в задаче о локальном сжатии

Fig. 7. Verification of boundary conditions on the boundary sections S_1 and S_2 in the local compression problem

Ортонормированный базис внутренних состояний, а также матрица коэффициентов a_{kj} остаются прежними, как и в предыдущей задаче. Коэффициенты q_k изменятся в силу новых граничных условий (приводить не будем).

Для решения данной задачи потребовался уже ортонормированный базис из 55 элементов. Приведем верификацию граничных условий (рис. 7), как основной показатель оценки точности решения.

Максимальная погрешность как наибольшее отклонение восстановленных граничных условий от заданных, находится в точке $(r, z) \in (0, 1)$ и составила 5 %. Однако данная погрешность преодолевается путем увеличения числа используемых элементов базиса. В доказательство этому приведем на рис. 8 компоненту усилия p_z на поверхности S_1 при использовании 40 элементов базиса.

В данной задаче осцилляции в точке $(r, z) \in (1, 0)$ не происходит, так как заданные усилия при подходе к этой точке близки к нулю.

Изолинии восстановленных компонент тензора напряжений, возникающих от действия внешних сил, и контур в деформированном состоянии приведены на рис. 9. Поскольку ненулевая

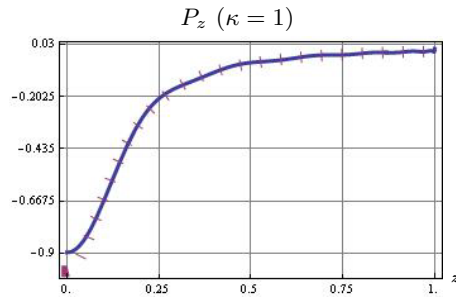


Рис. 8. Компонента усилия p_z на поверхности S_1 при использовании 40 элементов базиса

Fig. 8. Component of the force p_z on the surface S_1 using 40 basis elements

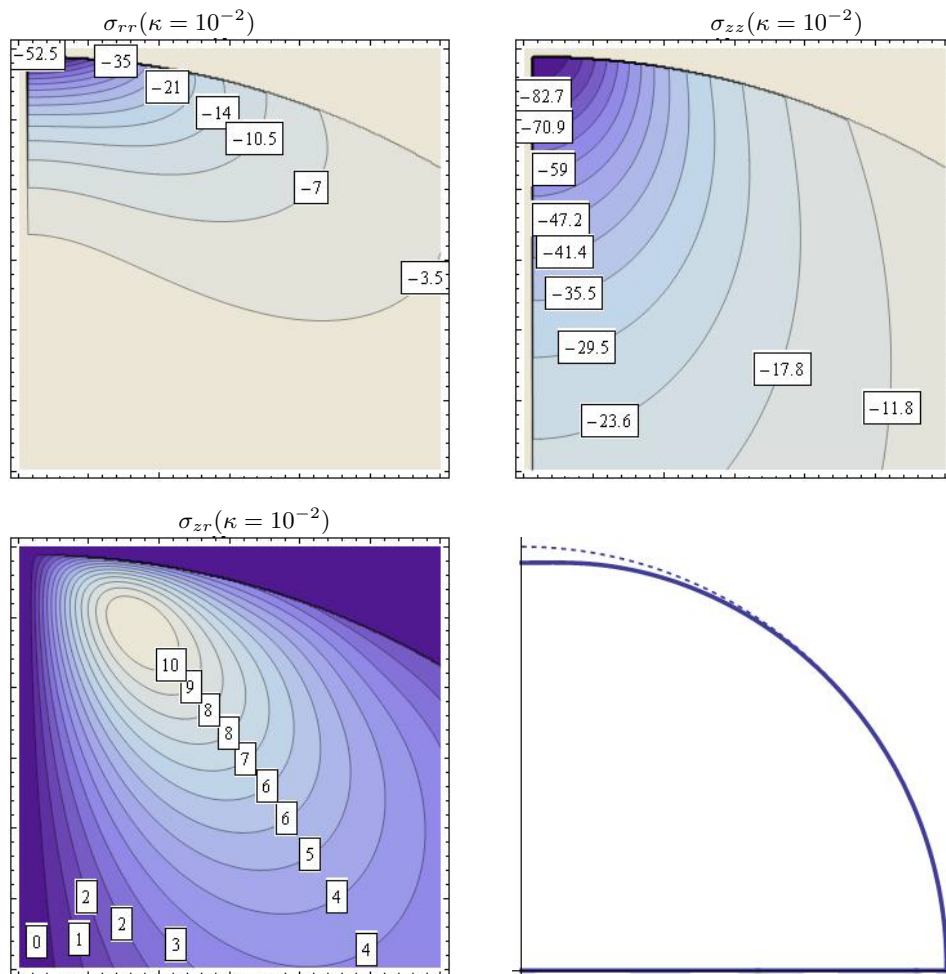


Рис. 9. Изолинии компонент тензора напряжений и контур деформированного тела в задаче со сжимающими усилиями

Fig. 9. Isolines of stress tensor components and contour of deformed body in problem with compressive forces

картина напряжений расположена преимущественно в верхней части области меридионального сечения, то для наглядности покажем область $\{(z, r) | 0 \leq r \leq 0.5, 0.5 \leq z \leq 1\}$.

Все полученные компоненты упругого поля строго удовлетворяют уравнениям (2.1)–(2.3).

Следует отметить, что решение смешанных задач теории упругости методом граничных состояний является более «энергозатратным» в плане машинного времени процессом, чем

решение первой и второй основных задач. Здесь возникает необходимость в вычислении матрицы коэффициентов a_{kj} , которая представляет собой квадратуры от довольно громоздких выражений. Сходимость решения обеспечивается путем наращивания базиса внутренних состояний. Исключение составляют особые точки границы.

Таким образом, метод граничных состояний показал свою эффективность в определении осесимметричного напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропных тел вращения в условиях смешанной стационарной задачи теории упругости.

Литература [References]

1. Станкевич, И.В., Численное решение смешанных задач теории упругости с односторонними связями. *Математика и математическое моделирование*, 2017, № 5, с. 40–53. [Stankevich, I.V., Numerical solution of mixed problems of elasticity theory with one-way constraints. *Matematika i matematicheskoye modelirovaniye = Mathematics and mathematical modeling*, 2017, no. 5, pp. 40–53. (in Russian)] DOI: [10.24108/mathm](https://doi.org/10.24108/mathm)
2. Божкова, Л.В., Рябов, В.Г., Норицина, Г.И., Смешанная плоская задача теории упругости для двухслойной кольцевой области. *Известия Московского государственного технического университета МАМИ*, 2011, № 1(11), с. 217–221. [Bozhkova, L.V., Ryabov, V.G., Noritsina, G.I., Mixed plane problem of elasticity theory for a two-layer annular region. *Izvestiya Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta MAMI = Bulletin of the Moscow State Technical University MAMI*, 2011, no. 1(1), pp. 217–221. (in Russian)]
3. Соболев, Б.В., Об асимптотических решениях трехмерных статических задач теории упругости со смешанными граничными условиями. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, 2011, № 4(4), с. 1778–1780. [Sobol, B.V., On asymptotic solutions of three-dimensional static problems of elasticity theory with mixed boundary conditions. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo = Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevsky*, 2011, no. 4(4), pp. 1778–1780. (in Russian)]
4. Станкевич, И.В., Математическое моделирование задач теории упругости с использованием МКЭ на основе функционала Рейсснера. *Символ науки*, 2017, № 4(2), с. 21–25. [Stankevich, I.V., Mathematical modeling of problems in elasticity theory using FEM based on the Reissner functional. *Simvol nauki = Symbol of Science*, 2017, no. 4(2), pp. 21–25. (in Russian)]
5. Пеньков, В.Б., Пеньков, В.В., Применение метода граничных состояний для решения основной смешанной задачи линейного континуума. *Известия Тульского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Информатика*, 2000, т. 6, № 2, с. 124–127. [Penkov V.B., Penkov V.V., Application of the boundary state method to solve the basic mixed linear continuum problem. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika = Bulletin of the Tula State University. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2000, vol. 6, no. 2, pp. 124–127. (in Russian)]
6. Пеньков, В.Б., Саталкина, Л.В., Шульмин, А.С., Основная смешанная задача для сферической полости в упругом пространстве. *Известия Тульского государственного университета. Серия: Естественные науки*, 2014, вып. 1, ч. 1, с. 207–215. [Penkov V.B., Satalkina L.V., Shulmin A.S., The basic mixed problem for a spherical cavity in elastic space. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Estestvennye nauki = Bulletin of the Tula State University. Series: Natural Sciences*, 2014, iss. 1, pt. 1, pp. 207–215. (in Russian)]
7. Иванычев, Д.А., Метод граничных состояний в решении первой основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*, 2020, № 66, с. 96–111. [Ivanychev, D.A., The method of boundary states in the solution of the first fundamental problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika = Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2020, no. 66, pp. 96–111. (in Russian)] DOI: [10.17223/19988621/66/8](https://doi.org/10.17223/19988621/66/8)
8. Иванычев, Д.А., Метод граничных состояний в решении второй основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*, 2019, № 61, с. 45–60. [Ivanychev, D.A., The method of boundary states in the solution of the second fundamental problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika = Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2019, no. 61, pp. 45–60. (in Russian)] DOI: [10.17223/19988621/61/5](https://doi.org/10.17223/19988621/61/5)
9. Иванычев, Д.А., Решение контактной задачи теории упругости для анизотропных тел вра-

- щения с массовыми силами. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2019, № 2, с. 49–62. [Ivanychev, D.A., The contact problem Solution of the elasticity theory for anisotropic rotation bodies with mass forces. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika = Bull. of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*. 2019, no. 2, pp. 49–62. (in Russian)] DOI: [10.15593/perm.mech/2019.2.05](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.2.05)
10. Kuzmenko, V.I., Kuzmenko, N.V., Levina, L.V., A way to solve the problems of isotropic elasticity theory with voluminous forces in a polynomial view. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, vol. 83, no. 1, pp. 84–94. DOI: [10.3103/S0025654419050108](https://doi.org/10.3103/S0025654419050108)
11. Penkov, V.B., Ivanychev, D.A., Novikova, O.S., Levina L.V., An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 973, no. 012015. DOI: [10.1088/1742-6596/973/1/012015](https://doi.org/10.1088/1742-6596/973/1/012015)
12. Пеньков, В.Б., Пеньков, В.В., Метод граничных состояний для решения задач линейной механики. *Дальневосточный математический журнал*, 2001, т. 2, № 2, с. 115–137. [Penkov, V.B., Penkov, V.V., The boundary state method for solving linear mechanics problems. *Dal'nevostochny' jmatematicheskij zhurnal = Far Eastern Mathematical Journal*, 2001, vol. 2, no. 2, pp. 115–137. (in Russian)]
13. Александров, А.Я., Соловьев, Ю.И., *Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного)*. Москва, Наука, 1978. [Aleksandrov, A.Ya., Solov'ev, Yu.I., *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primenenie metodov teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo) = Spatial Problems of the Theory of Elasticity (Application of Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable)*. Moscow, Nauka, 1978. (in Russian)]
14. Лурье, А.И., *Пространственные задачи теории упругости*. Москва, Госиздат технико-теоретической литературы, 1955. [Lur'ye, A.I., *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti = Spatial problems of the theory of elasticity*. Moscow, Gosizdat tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1955. (in Russian)]
15. Пеньков, В.Б., Сотников, А.А., Смешанная задача о взаимодействии упругого шара с жесткой гладкой поверхностью. В *Материалы I всероссийской научно-практической конференции молодых ученых «Металлургия и машиностроение. Тенденции развития современной науки»*. Липецк, ЛГТУ, 2020, с. 126–130. [Penkov, V.B., Penkov, V.V., Mixed problem of interaction of an elastic ball with a rigid smooth surface. In *Proc. of the 1st All-Russian scientific and practical conference of young scientists "Metallurgy and mechanical engineering. Trends in the development of modern science"*. Lipetsk, LGTU, 2020, pp. 126–130. (in Russian)]
16. Лехницкий, С.Г., *Теория упругости анизотропного тела*. Москва, Наука, 1977. [Lexniczkiy, S.G., *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela = Theory of elasticity of anisotropic body*. Moscow, Nauka, 1977. (in Russian)]
17. Левина, Л.В., Новикова, О.С., Пеньков, В.Б., Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела. *Вестник ЛГТУ*, 2016, № 2 (28), с. 16–24. [Levina, L.V., Novikova, O.S., Penkov, V.B., Full-parameter solution of the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body. *Vestnik LGTU = Bulletin of LGTU*, 2016, no. 2 (28), pp. 16–24. (in Russian)]
18. Саталкина, Л.В., Нарращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений. В *Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета*. Липецк, ЛГТУ, 2007, с. 130–131. [Satalkina, L.V., Building up the basis of the state space with hard constraints on the energy intensity of computations. In *Sbornik tezisev dokladov nauchnoj konferencii studentov i aspirantov Lipeckzko gosudarstvennogo texnicheskogo universiteta*. Lipeckz, LGTU, 2007, pp. 130–131. (in Russian)]