УДК 51.37 EDN: QIKOIN DOI: 10.31429/vestnik-22-2-80-88

Построение согласованной дифференциальной постановки сопряженной задачи для модели переноса пассивной примеси

В. С. Кочергин ✉, **С. В. Кочергин**

Морской гидрофизический институт РАН, ул. Капитанская 2, Севастополь, 299011, Россия

✉ Кочергин Владимир Сергеевич; ORCID 0000-0002-6767-1218; SPIN 9479-0245; e-mail: vskocher@gmail.com

Аннотация. В работе для модели переноса пассивной примеси рассматривается построение сопряженных постановок согласованных с основной задачей. Такое согласование можно рассматривать с позиции дифференциальной постановки, а также с точки зрения дискретизации задачи при ее численной реализации. В данной работе рассматриваются различные аспекты такого согласования для модели переноса в Азовском море и аналогичной модели для Черного моря. Такие постановки успешно применялись при реализации вариационных алгоритмов ассимиляции данных измерений и идентификации параметров модели переноса пассивной примеси. Рассматриваются аспекты построения согласованных постановок в разностном виде. Результаты могут быть использованы для решения различных задач экологической направленности при изучении воздействия источников загрязнения антропогенного характера в акваториях Азовского и Черного морей.

Ключевые слова: модель переноса, пассивная примесь, идентификация, сопряженная задача, минимизация, Азовское море.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № FNNN-2024-0016 «Исследование пространственно-временной изменчивости океанологических процессов в береговой, прибрежной и шельфовых зонах Черного моря под воздействием природных и антропогенных факторов на основе контактных измерений и математического моделирования» (шифр «Прибрежные исследования»).

Цитирование: Кочергин В. С., Кочергин С. В. Построение согласованной дифференциальной постановки сопряженной задачи для модели переноса пассивной примеси // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 2. С. 80–88. EDN: QIKOIN. DOI: 10.31429/vestnik-22-2-80-88

Поступила 15 мая 2025 г. После доработки 7 июня 2025 г. Принято 15 июня 2025 г. Публикация 30 июня 2025 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Construction of a Consistent Differential Formulation of the Adjoint Problem for the Passive Impurity Transfer Model

V. S. Kochergin ✉, **S. V. Kochergin**

Marine Hydrophysical Institute, Kapitanskaya str., 2, Sevastopol, 299011, Russia

✉ Vladimir S. Kochergin; ORCID 0000-0002-6767-1218; e-mail: vskocher@gmail.com

Abstract. When implementing numerical algorithms for identifying the power of pollution sources in the passive impurity transfer model based on measurement data, the question naturally arises of constructing conjugate statements consistent with the main task. Such a matching can be considered from the perspective of a differential formulation, as well as from the point of view of discretization of the problem in its numerical implementation. This paper discusses various aspects of such alignment for the model of transport in the Sea of Azov and a similar model for the Black Sea. Ocean dynamics models are nonlinear in nature. When solving the problem of assimilation of measurement data in hydrodynamic models, linearization is most often performed over a certain time interval (assimilation interval). In this paper, a model of passive impurity transfer is considered, i.e., it does not affect the dynamic processes in the liquid itself. Such models are often used in solving environmental problems. The impurity transfer model is linear. The quadratic prediction quality functional is convex, i.e. it has one extremum. Using a linear model as links to minimize such a functional does not change its convexity, which leads to reliable operation of the procedure for searching for the extremum of the functional. Such a search is performed using an appropriate iterative process. The equations of the transfer model used may have different forms depending on the problem being solved and the region of its application. For example, a σ-coordinate model is used to solve a problem in the waters of the Sea of Azov. The results of the work can be useful in solving various environmental problems in the process of studying the effects of anthropogenic pollution sources in the waters of the Azov and Black Seas.

Keywords: the model of transport of passive admixture, identification of the adjoint task, minimization, Azov sea.

Funding. The work was performed for the state assignment on the topic FNNN-2024-0016 “Study of the spatial and temporal variability of oceanological processes in the coastal, coastal and shelf zones of the Black Sea under the influence of natural and anthropogenic factors based on contact measurements and mathematical modeling” (code “Coastal research”).

Cite as: Kochergin, V. S., Kochergin, S. V., Construction of a consistent differential formulation of the adjoint problem for the passive impurity transfer model. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 2, pp. 80–88. DOI: 10.31429/vestnik-22-2-80-88

Received 15 May 2025. Revised 7 June 2025. Accepted 15 June 2025. Published 30 June 2025.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

Введение

При реализации вариационных алгоритмов ассимиляции данных измерений встает задача построения сопряженных постановок, согласованных с основной задачей. Такое согласование можно рассматривать с позиции дифференциальной постановки, а также с точки зрения дискретизации задачи при ее численной реализации. В данной работе рассматриваются различные аспекты при построении алгоритмов ассимиляции данных измерений. Достаточно полный обзор по методам ассимиляции представлен в работе [1]. Модели динамики океана носят нелинейный характер. При решении задачи усвоения данных измерений в гидродинамических моделях чаще всего производят линеаризацию на некотором интервале времени (интервал ассимиляции). В данной работе рассматривается модель переноса пассивной примеси, т. е. не влияющей на динамические процессы в самой жидкости. Такие модели часто используются при решении задач экологической направленности [2]. Модель переноса примеси является линейной. Квадратичный функционал качества прогноза выпуклый, т. е. имеет один экстремум. Использование линейной модели в качестве связей про минимизации такого функционала не меняет его выпуклости, что приводит к надежной работе процедуры поиска экстремума функционала. Такой поиск осуществляется при помощи соответствующего итерационного процесса. Используемые уравнения модели переноса могут иметь различный вид в зависимости от решаемой задачи и региона ее применения. Например, для решения задачи в акватории Азовского моря используется модель в σ-координатах [3]. В каждом случае построение сопряженных задач имеет свои особенности, поэтому рассмотрим вид сопряженных задач в каждом конкретном случае.

1. Модель переноса в σ-координатах

Рассмотрим модель [3, 4] переноса–диффузии пассивной примеси в σ-координатах

$$\frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial x} DA_H \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} DA_H \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K}{D} \frac{\partial C}{\partial \sigma}, \tag{1.1}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \partial M &: \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} = 0, \\ \sigma = 0 &: \frac{\partial C}{\partial \sigma} = 0, \\ \sigma = -1 &: \frac{\partial C}{\partial \sigma} = 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

и начальными данными

$$C(x, y, \sigma, 0) = C_0(x, y, \sigma), \tag{1.3}$$

где $t \in [0, T]$ — время; D — динамическая глубина; x, y — горизонтальные координаты; σ — безразмерная вертикальная координата, изменяющаяся в пределах от -1 (на дне) до 0 (на поверхности моря); U, V, W — компоненты поля скорости; C — концентрация примеси; A_H и K — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии; $\mathbf{n}$ — нормаль к боковой границе, ∂M — граница области интегрирования модели M; $M_t = M \times [0, T]$.

2. Вариационный алгоритм ассимиляции данных измерений в σ-координатах

Рассмотрим вариационный алгоритм [5–8] ассимиляции, при котором усвоение происходит за счет минимизации следующего выпуклого квадратичного функционала качества прогноза:

$$I_0 = \frac{1}{2}\left(P\left(RC - C^{\text{изм}}\right), P\left(RC - C^{\text{изм}}\right)\right)_{M_t}, \tag{2.1}$$

где P — оператор восполнения нулями поля невязок прогноза при отсутствии данных измерений, R — оператор проектирования в точки наблюдений. Функционал (2.1) при линейных ограничениях (1.1)–(1.3) запишем следующим образом:

$$I = I_0 + \left[\frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} DA_H \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} DA_H \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{K}{D}\frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^*\right]_{M_t} + \\ + \left(\frac{\partial C}{\partial n}, C^*\right)_{\partial M_t} + (C - C_0, C^*)_M + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^*\right)_{\sigma_t^0} + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^*\right)_{\sigma_t^{-1}}, \tag{2.2}$$

где скалярное произведение определяется стандартным способом в L_2. Проинтегрируем соответствующее (2.2) выражение для вариации функционала по частям с учетом аналога уравнения неразрывности и краевых условий. В (2.2) $\sigma_t^0 = \sigma^0 \times [0, T], \sigma_t^{-1} = \sigma^{-1} \times [0, T]$, σ^0 — поверхность моря, а σ^{-1} — дно.

Аналог уравнения неразрывности в σ-координатах имеет вид

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \sigma} = 0. \tag{2.3}$$

Выберем в качестве множителей Лагранжа решение следующей сопряженной задачи:

$$-\frac{\partial DC^*}{\partial t} - \frac{\partial DUC^*}{\partial x} - \frac{\partial DVC^*}{\partial y} - \frac{\partial WC^*}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} DA_H \frac{\partial C^*}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} DA_H \frac{\partial C^*}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{K}{D}\frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0,$$

$$\partial M : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \sigma = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \sigma = -1 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \tag{2.4}$$

$$t = T : C^* = P\left(C^{\text{изм}} - RC\right).$$

При идентификации, например, начального поля имеем:

$$\nabla_{C_0} I = C^*(x, y, \sigma, 0). \tag{2.5}$$

Значения начального поля концентрации определяются в процессе итераций:

$$C_{0_{n+1}} = C_{0_n} + \tau \nabla_{C_0} I, \tag{2.6}$$

где τ — итерационный параметр, который находится с учетом решения задачи в вариациях. Следует заметить, что проведенные тестовые расчеты показали хорошую сходимость итерационного процесса.

3. Модель переноса пассивной примеси для акватории Черного моря

В данном случае уравнение модели транспорта примеси имеет следующий вид [9, 10]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial (UC)}{\partial x} + \frac{\partial (VC)}{\partial y} + \frac{\partial (WC)}{\partial z} = A_H \Delta C + \frac{\partial}{\partial z} A_V \frac{\partial C}{\partial z}, \tag{3.1}$$

где C — концентрация примеси; A_H — коэффициент горизонтальной турбулентной диффузии; A_V — коэффициент вертикальной турбулентной диффузии.

На поверхности ($z = 0$) задается отсутствие потока:

$$A_V \frac{\partial C}{\partial z} = 0. \tag{3.2}$$

На твердых границах, дне и в области устьев рек ставятся условия отсутствия потока вещества. В области Босфора и Керченского пролива реализуется условие Дирихле первого рода (в данном расчете нулевое). В начальный момент времени задается поле концентрации $C^0(x, y, z)$. Задача решается в области $M_T = M \times [0, T]$.

4. Сопряженная задача

Уравнению (3.1) с краевыми условиями (3.2) и начальными данными, поставим в хсоответствующую сопряженную задачу:

$$-\frac{\partial C^*}{\partial t} - \frac{\partial (UC^*)}{\partial x} - \frac{\partial (VC^*)}{\partial y} - \frac{\partial (WC^*)}{\partial z} = A_H \Delta C^* + \frac{\partial}{\partial z} A_V \frac{\partial C^*}{\partial z}, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} & z = 0 : A_V \frac{\partial C^*}{\partial z} - wC^* = 0, \\ & z = H : A_V \frac{\partial C^*}{\partial z} = 0, \\ & \partial M : A_H \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \\ & T : C^* = P\left(C^{\text{изм}} - RC\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

В области устьев рек и проливов задается $C^* = 0$.

5. Построение согласованных разностных дискретизаций

Рассмотрим следующее уравнение переноса пассивной примеси:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} + \frac{\partial VC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial z} = A_V \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + A_H \Delta C \tag{5.1}$$

с краевыми условиями

$$\partial M : \frac{\partial C}{\partial n} = 0$$

и начальными данными

$$t = 0 : C\left(x, y, z\right) = C_0\left(x, y, z\right).$$

Уравнению (5.1) поставим в соответствие формально-сопряженное

$$-\frac{\partial C^*}{\partial t} + U\frac{\partial C^*}{\partial x} + V\frac{\partial C^*}{\partial y} + W\frac{\partial C^*}{\partial z} = A_V \frac{\partial^2 C^*}{\partial z^2} + A_H \Delta C^*, \tag{5.2}$$

которое в силу уравнения неразрывности можно переписать в следующем виде:

$$-\frac{\partial C^*}{\partial t} + \frac{\partial UC^*}{\partial x} + \frac{\partial VC^*}{\partial y} + \frac{\partial WC^*}{\partial z} = A_V \frac{\partial^2 C^*}{\partial z^2} + A_H \Delta C^* \tag{5.3}$$

с краевыми условиями

$$\partial M : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0$$

и начальными данными

$$t = T : C^* \left(x, y, z \right) = Q \left(x, y, z \right).$$

При интегрировании сопряженных задач в качестве $Q\left(x, y, z\right)$ могут задаваться либо функции специального вида при построении функций влияния, либо невязки прогноза, характеризующие отклонение решения от данных измерений при использовании вариационных алгоритмов ассимиляции данных измерений. Помножим (5.1) на C^* и проинтегрируем с учетом краевых условий и начальных данных. Полученное интегральное тождество имеет следующий вид:

$$\left[\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} + \frac{\partial VC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} A_V \frac{\partial C}{\partial z}, C^* \right]_{M_t} + \\ + \left(\frac{\partial C}{\partial n}, C^* \right)_{\Gamma_t} + \left(C - C_0, C^* \right)_M = 0, \quad (5.4)$$

где скалярное произведение определяется стандартным способом. Дискретный аналог интегрального тождества получается из (5.4) при использовании разностных дискретизаций и замене интегрирования по пространству на суммирование по дискретным индексам в рассматриваемой области. Аппроксимация сопряженной задачи получается из разностного аналога интегрального тождества суммированием по частям с учетом краевых условий и разностного аналога уравнения неразрывности. При численной реализации модели переноса – диффузии (5.1) дискретизация диффузионных членов стандартна. Из разностного аналога интегрального тождества получим дискретизацию аналогичных членов сопряженной задачи. Основные особенности необходимо учитывать при разностной аппроксимации адвективных членов.

Для решения уравнения (5.1) запишем монотонную консервативную схему [2]

$$\frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left[A_H \left(1 + R^x_{i+1/2} \mu_{i+1/2} + R^x_{i+1/2} \right) \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x} - \right. \\ \left. - A_H \left(1 + R^x_{i-1/2} \mu_{i-1/2} - R^x_{i-1/2} \right) \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x} \right] + \\ + \frac{1}{\Delta y} \left[A_H \left(1 + R^y_{j+1/2} \mu_{j+1/2} + R^y_{j+1/2} \right) \frac{C_{j+1} - C_j}{\Delta y} - \right. \\ \left. - A_H \left(1 + R^y_{j-1/2} \mu_{j-1/2} - R^y_{j-1/2} \right) \frac{C_j - C_{j-1}}{\Delta y} \right] + \\ + \frac{1}{\Delta z} \left[A_V \left(1 + R^z_{m+1/2} \mu_{m+1/2} + R^z_{m+1/2} \right) \frac{C_{m+1} - C_m}{\Delta z} - \right. \\ \left. - A_V \left(1 + R^z_{m-1/2} \mu_{m-1/2} - R^z_{m-1/2} \right) \frac{C_m - C_{m-1}}{\Delta z} \right] = 0, \quad (5.5)$$

где

$$R^x_{i+1/2} = -\frac{U_{i+1/2} \Delta x}{2A_H}, \quad R^x_{i-1/2} = -\frac{U_{i-1/2} \Delta x}{2A_H}, \quad R^y_{j+1/2} = -\frac{V_{j+1/2} \Delta y}{2A_H}, \\ R^y_{j-1/2} = -\frac{V_{j-1/2} \Delta y}{2A_H}, \quad R^z_{m+1/2} = -\frac{W_{m+1/2} \Delta z}{2A_V}, \quad R^z_{m-1/2} = -\frac{W_{m-1/2} \Delta z}{2A_V}.$$

В (5.5) для простоты записи некоторые индексы опущены. Для численной реализации модели использовать явную схему при условии выполнения условия Куранта для устойчивости расчетов. При соответствующем выборе множителя $\mu\left(R\right)$ из (5.5) можно получать различные аппроксимации для уравнения переноса. Так при:

– $\mu\left(R\right) = 0$ имеем схему с центральной разностью [11];

– $\mu(R) = \operatorname{sign}(R)$ — схему с направленной разностью [11];

– $\mu(R) = \dfrac{|R|}{1+|R|}\operatorname{sign}(R)$ — схему Самарского А.А. [12];

– $\mu(R) = \dfrac{|R|}{1+|R|+|R|^2}\cdot R$ — схему Булеева Н.И., Тимухина Г.И. [13];

– $\mu(R) = \dfrac{1+2|R|}{3+3|R|+2|R|^2}\cdot R$ — схему Булеева Н.И. [14] ;

– $\mu(R) = \operatorname{cth}(R) - \dfrac{1}{R}$ — схему Ильина А.М. [15, 16].

Из разностного аналога интегрального тождества, основанного на схеме (5.5), можно получить согласованную схему для сопряженной задачи

$$
\begin{gathered}
-\frac{C^{*n+1}-C^{*n}}{\Delta t}-\\
-\frac{1}{\Delta x}\left(A_H\frac{\left(1+R^x_{i+1/2}\mu_{i+1/2}-R^x_{i+1/2}\right)C^*_{i+1}-\left(1+R^x_{i+1/2}\mu_{i+1/2}+R^x_{i+1/2}\right)C^*_i}{\Delta x}-\right.\\
\left.-A_H\frac{\left(1+R^x_{i-1/2}R_{i-1/2}\mu_{i-1/2}-R^x_{i-1/2}\right)C^*_i-\left(1+R^x_{i-1/2}\mu_{i-1/2}+R^x_{i-1/2}\right)C^*_{i-1}}{\Delta x}\right)-\\
-\frac{1}{\Delta y}\left(A_H\frac{\left(1+R^y_{j+1/2}\mu_{i+1/2}-R^y_{j+1/2}\right)C^*_{j+1}-\left(1+R^y_{j+1/2}\mu_{i+1/2}+R^y_{j+1/2}\right)C^*_j}{\Delta y}-\right.\\
\left.-A_H\frac{\left(1+R^y_{j-1/2}\mu_{j-1/2}-R^y_{j-1/2}\right)C^*_j-\left(1+R^y_{j-1/2}\mu_{j-1/2}+R^y_{j-1/2}\right)C^*_{j-1}}{\Delta y}\right)-\\
-\frac{1}{\Delta z}\left(A_V\frac{\left(1+R^z_{m+1/2}\mu_{m+1/2}-R^z_{m+1/2}\right)C^*_{m+1}-\left(1+R^z_{m+1/2}\mu_{m+1/2}+R^z_{m+1/2}\right)C^*_m}{\Delta z}-\right)\\
-\frac{1}{\Delta z}\left(A_V\frac{\left(1+R^z_{m-1/2}\mu_{m-1/2}-R^z_{m-1/2}\right)C^*_m-\left(1+R^z_{m-1/2}\mu_{m-1/2}+R^z_{m-1/2}\right)C^*_{m-1}}{\Delta z}=0\right).
\end{gathered}
\tag{5.6}
$$

Рассмотрим (5.5) при $\mu = 0$:

$$
\begin{gathered}
\frac{C^{n+1}-C^n}{\Delta t}=A_H\frac{C_{i+1}-2C_i+C_{i-1}}{\Delta x^2}-\frac{U_{i+1/2}C_{i+1}-U_{i+1/2}C_i+U_{i-1/2}C_i-U_{i-1/2}C_{i-1}}{2\Delta x}+\\
+A_H\frac{C_{j+1}-2C_j+C_{j-1}}{\Delta y^2}-\frac{V_{j+1/2}C_{j+1}-V_{j+1/2}C_j+V_{j-1/2}C_j-V_{j-1/2}C_{j-1}}{2\Delta z}+\\
+A_V\frac{C_{m+1}-2C_m+C_{m-1}}{\Delta z^2}-\frac{W_{m+1/2}C_{m+1}-W_{m+1/2}C_m+W_{m-1/2}C_m-W_{m-1/2}C_{m-1}}{2\Delta z}.
\end{gathered}
\tag{5.7}
$$

Из (5.7) видно, что адвективный член аппроксимируется аналогом центрально-разностной аппроксимации со вторым порядком аппроксимации. Аналогично из (5.5) при выборе $\mu = \operatorname{sgn} R$ и $U, V, W < 0$ имеем:

$$
\begin{gathered}
\frac{C^{n+1}-C^n}{\Delta t}=A_H\frac{C_{i+1}-2C_i+C_{i-1}}{\Delta x^2}-U_{i+1/2}\frac{C_{i+1}-C_i}{\Delta x}+\\
+A_H\frac{C_{j+1}-2C_j+C_{j-1}}{\Delta y^2}-V_{j+1/2}\frac{C_{j+1}-C_j}{\Delta y}+\\
+A_V\frac{C_{m+1}-2C_m+C_{m-1}}{\Delta z^2}-W_{m+1/2}\frac{C_{m+1}-C_m}{\Delta z}.
\end{gathered}
\tag{5.8}
$$

А при $U, V, W > 0$, получаем

$$\frac{C^{n+1}-C^n}{\Delta t} = A_н \frac{C_{i+1}-2C_i+C_{i-1}}{\Delta x^2} - U_{i-1/2}\frac{C_i-C_{i-1}}{\Delta x} + \\ + A_н \frac{C_{j+1}-2C_j+C_{j-1}}{\Delta y^2} - V_{j-1/2}\frac{C_j-C_{j-1}}{\Delta y} + \\ + A_V \frac{C_{m+1}-2C_m+C_{m-1}}{\Delta z^2} - W_{m-1/2}\frac{C_m-C_{m-1}}{\Delta z}. \quad (5.9)$$

Из уравнения (5.6) при $\mu = 0$ имеем

$$-\frac{C^{*n+1}-C^{*n}}{\Delta t} = A_н \frac{C^*_{i+1}-2C^*_i+C^*_{i-1}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i+1/2}C^*_{i+1}+U_{i+1/2}C^*_i-U_{i-1/2}C^*_i-U_{i-1/2}C^*_{i-1}}{2\Delta x} + \\ + A_н \frac{C^*_{j+1}-2C^*_j+C^*_{j-1}}{\Delta y^2} + \frac{V_{j+1/2}C^*_{j+1}+V_{j+1/2}C^*_j-V_{j-1/2}C^*_j-V_{j-1/2}C^*_{j-1}}{2\Delta y} + \\ + A_V \frac{C^*_{m+1}-2C^*_m+C^*_{m-1}}{\Delta z^2} + \frac{W_{m+1/2}C^*_{m+1}+W_{m+1/2}C^*_m-W_{m-1/2}C^*_m-W_{m-1/2}C^*_{m-1}}{2\Delta z}. \quad (5.10)$$

То есть адвективный член в сопряженной задаче (5.3) аппроксимируется аналогом центрально-разностной аппроксимации. Аналогично из (5.6) при $\mu = \operatorname{sgn} R$ и $U, V, W < 0$, получим:

$$-\frac{C^{*n+1}-C^{*n}}{\Delta t} = A_н \frac{C^*_{i+1}-2C^*_i+C^*_{i-1}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i+1/2}C^*_i-U_{i-1/2}C^*_{i-1}}{\Delta x} + \\ + A_н \frac{C^*_{j+1}-2C^*_j+C^*_{j-1}}{\Delta y^2} + \frac{V_{j+1/2}C^*_j-V_{j-1/2}C^*_{j-1}}{\Delta y} + \\ + A_V \frac{C^*_{m+1}-2C^*_m+C^*_{m-1}}{\Delta z^2} + \frac{W_{m+1/2}C^*_m-W_{m-1/2}C^*_{m-1}}{\Delta z}, \quad (5.11)$$

а при $U, V, W > 0$ получаем

$$-\frac{C^{*n+1}-C^{*n}}{\Delta t} = A_н \frac{C^*_{i+1}-2C^*_i+C^*_{i-1}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i+1/2}C^*_{i+1}-U_{i-1/2}C^*_i}{\Delta x} + \\ + A_н \frac{C^*_{i+1}-2C^*_i+C^*_{i-1}}{\Delta y^2} + \frac{V_{j+1/2}C^*_{j+1}-V_{j-1/2}C^*_j}{\Delta y} + \\ + A_V \frac{C^*_{m+1}-2C^*_m+C^*_{m-1}}{\Delta z^2} + \frac{W_{m+1/2}C^*_{m+1}-W_{m-1/2}C^*_m}{\Delta z}. \quad (5.12)$$

Как видно из (5.5)–(5.12), аппроксимация адвективного члена в основной задаче идентична аппроксимации дивергентного члена в сопряженной задаче. Оценим отличия в аппроксимации таких членов уравнения.

Пусть, например, $U < 0$, тогда с учетом знака при члене в сопряженной задаче, отвечающем за перенос выберем соответствующую аппроксимацию по оси x

$$U_{i+1/2}\frac{C^*_{i+1}-C^*_i}{\Delta x} - \frac{U_{i+1/2}C^*_{i+1}-U_{i+1/2}C^*_i}{\Delta x} = -C^*_i\left(\frac{U_{i+1/2}-U_{i-1/2}}{\Delta x}\right) \approx C^*\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (5.13)$$

При решении трехмерной задачи при условии выполнения уравнения неразрывности такие члены по всем трем направления в сумме обращаются в ноль. Рассмотрим центрально-разностную аппроксимацию (5.7) и вычтем аппроксимацию адвективного члена в сопряженной задаче (5.10)

$$\frac{U_{i+1/2}C^*_{i+1} - U_{i+1/2}C^*_i + U_{i-1/2}C^*_i - U_{i-1/2}C^*_{i-1}}{\Delta x} - \\ - \frac{U_{i+1/2}C^*_{i+1} + U_{i+1/2}C^*_i - U_{i-1/2}C^*_i - U_{i-1/2}C^*_{i-1}}{\Delta x} = \\ = -C^*_i \frac{U_{i+1/2} - U_{i-1/2}}{\Delta x} \approx -C^* \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (5.14)$$

При решении трехмерной задачи при условии выполнения уравнения неразрывности такие члены также по всем трем направления в сумме обращаются в ноль. То есть в данных предельных случаях аппроксимации идентичны при условии выполнения уравнения неразрывности. Аналогичный результат можно получить и при других значениях μ. Поэтому для решения сопряженной задачи можно использовать процедуры, применяемые при интегрировании основной задачи.

Результаты могут быть использованы для решения различных задач экологической направленности при изучении воздействия источников загрязнения антропогенного характера в акваториях Азовского и Черного морей.

Литература [References]

1. Шутяев, В.П., Методы усвоения данных наблюдений в задачах физики атмосферы и океана. *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*, 2019, т. 55, № 1, с. 17–34. [Shutyaev, V.P., Methods for observation data assimilation in problems of physics of atmosphere and ocean. *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 17-–31. DOI: 10.1134/S0001433819010080 (in Russian)]
2. Еремеев, В.Н., Кочергин, В.П., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., *Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов*. Севастополь, ЭКОСИ-Гидрофизика, 2002. [Eremeev, V.N., Kochergin, V.P., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki glubokovodnykh basseynov = Mathematical modeling of hydrodynamics of deep-water basins*. Sevastopol, ECOSI-Gidrophysics, 2002. (in Russian)]
3. Фомин, В.В., Численная модель циркуляции вод Азовского моря. *Научные труды УкрНИГМИ*, 2002, вып. 249, с. 246–255. [Fomin, V.V., Numerical model of water circulation in the Sea of Azov. *Nauchnye trudy UkrNIGMI = Scientific works of UkrNIGMI*, 2002, iss. 249, pp. 246–255. (in Russian)]
4. Иванов, В.А., Фомин, В.В., Математическое моделирование динамических процессов в зоне море – суша. Севастополь, ЭКОСИ-гидрофизика, 2008. [Ivanov, V.A., Fomin, V.V., Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskih processov v zone more – susha = Mathematical modeling of dynamic processes in the sea-land zone. Sevastopol', EKOSI-gidrofizika, 2008. (in Russian)]
5. Marchuk, G.I., Penenko, V.V., Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment. In Marchuk G.I. (ed.) *Modelling and Optimization of Complex Systems*, Berlin: Springer, 1979, p. 240–252. DOI: 10.1007/BFb0004167
6. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Идентификация мощности источника загрязнения в Казантипском заливе на основе применения вариационного алгоритма. *Морской гидрофизический журнал*, 2015, № 2, с. 79–88. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Identification of the pollution source power in the Kazantip Bay based on the application of the variational algorithm. *Morskoy gidrofizicheskiy zhurnal = Marine Hydrophysical Journal*, 2015, no. 2, pp. 79–88. (in Russian)] EDN: VDVDER DOI: 10.22449/0233-7584-2015-2-79-88
7. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Использование вариационных принципов и решения сопряженной задачи при идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси. *Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа*, 2010, вып. 22, с. 240–244. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Use of variational principles and solution of the conjugate problem in identification of input parameters of the passive admixture transport model. *Ekologicheskaya bezopasnost' pribrezhnoy i shel'fovoy zon i kompleksnoe ispol'zovanie resursov shel'fa = Environmental safety of coastal and shelf zones and integrated use of shelf resources*, 2010, issue 22, pp. 240–244. (in Russian)] EDN: WTBIDL
8. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Использование решения сопряженных задач при идентификации входных параметров модели переноса и планировании эксперимента. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2017, № 2, с. 42–47. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Using the solution of conjugate problems in identifying input parameters of the transfer model and planning an experiment. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo*

ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation, 2017, no. 2, pp. 42–47. (in Russian)] EDN: ZSBWKK DOI: 10.31429/vestnik-22-1-62-67

9. Демышев, С.Г., Дымова О.А., Кочергин В.С., Кочергин С.В., Определение местоположения начального поля концентрации возможного источника загрязнения в акватории Черного моря у Гераклейского полуострова на основе метода сопряженных уравнений. *Морской гидрофизический журнал*, 2020, т. 36, № 2, с. 226–237. [Demyshev, S.G., Dymova O.A., Kochergin V.S., Kochergin S.V., Determining the location of the initial concentration field of a possible pollution source in the Black Sea near the Heraclean Peninsula based on the adjoint equation method. *Morskoy gidrofizicheskiy zhurnal = Marine Hydrophysical Journal*, 2020, vol. 36, no. 2, pp. 226–237. (in Russian)] EDN: QXFBMA DOI: 10.22449/0233-7584-2020-2-226-237

10. Demyshev, S.G., Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Using the Variational Approach and Adjoint Equations Method Under the Identification of the Input Parameter of the Passive Admixture Transport Model. In *Conf. Proc. "Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes. 3rd Inter-national Scientific School for Young Scientists, Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Science"*, Springer International Publishing AG, part of Springer Nature, 2018, ch. 7, pp. 51–61. DOI: 10.1007/978-3-319-77788-7

11. Роуч, П., *Вычислительная гидродинамика.* Москва, Мир, 1980. [Roach, P., *Vychislitel'naya gidrodinamika = Computational Fluid Dynamics.* Moscow, Mir, 1980. (in Russian)]

12. Самарский, А.А., *Теория разностных схем.* Москва, Наука, 1983. [Samarskii, A.A., *Teoriya raznostnykh skhem = Theory of Difference Schemes.* Moscow, Nauka, 1983. (in Russian)]

13. Булеев, Н.И., Тимухин, Г.И., О составлении разностных уравнений гидродинамики вязкой неоднородной среды. *Численные методы механики сплошной среды*, 1972, т. 3, № 4, с. 19–26. [Buleev, N.I., Timukhin, G.I., On the formulation of difference equations for the hydrodynamics of a viscous inhomogeneous medium. *Chislennye metody mekhaniki sploshnoy sredy = Numerical Methods of Continuum Mechanics*, 1972, v. 3, no. 4, pp. 19–26. (in Russian)]

14. Булеев, Н.И., *Пространственная модель турбулентного обмена.* Москва, Наука, 1983. [Buleev, N.I., *Prostranstvennaya model' turbulentnogo obmena = Spatial Model of Turbulent Exchange.* Moscow, Nauka, 1983. (in Russian)]

15. Ильин, А.М., Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. *Математические заметки*, 1969, т. 6, вып. 2, с. 237–248. [Ilyin, A.M., Difference scheme for a differential equation with a small parameter at the highest derivative. *Matematicheskie zametki = Mathematical Notes*, 1969, vol. 6, iss. 2, pp. 237–248. (in Russian)]

16. Дулан, Э., Миллер, Дж., Шилдерс, У., *Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем.* Москва, Мир, 1983. [Doolan, E., Miller, J., Shielders, W., *Ravnomernye chislennye metody resheniya zadach s pogranichnym sloem = Uniform Numerical Methods for Solving Boundary Layer Problems.* Moscow, Mir, 1983. (in Russian)]