УДК 539.3

ТРЕХМЕРНЫЙ АНАЛИЗ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИЗГИБА КРИВОГО БРУСА[1]

Л. М. Зубов[2], *А. А. Зеленина*[3]

THREE-DIMENSIONAL ANALYSIS
OF LARGE STRAIN OF SPATIALLY BENDED CURVILINEAR BAR

Zubov L.M., Zelenina A.A.

The problem of bending and twisting of an elastic body in the form of a ring sector with an arbitrary cross-section is considered on the base of precise three-dimensional equations of the non-linear elasticity theory. The initial spatial nonlinear elastostatics problem is reduced to the two-dimensional boundary-value problem for the plane domain in the form of the ring cross-section. Boundary conditions on the bar ends are developed in the integral Saint-Venan terms. Various variation definitions of non-linear two-dimensional problem are given on the bar cross-section.

На основе точных трехмерных уравнений нелинейной теории упругости рассматривается задача об изгибе и кручении упругого тела в форме сектора кругового кольца с произвольным поперечным сечением. Исходная пространственная задача нелинейной эластостатики сведена к двумерной краевой задаче для плоской области в форме поперечного сечения кольца. Решение полученной двумерной задачи позволяет точно удовлетворить уравнениям равновесия в объеме тела и граничным условиям на боковой поверхности стержня. Граничные условия на концах стержня выполняются в интегральном смысле Сен-Венана. Предложено несколько эквивалентных формулировок двумерной задачи на сечении, которые отличаются выбором неизвестных функций. Даны различные вариационные постановки нелинейной двумерной задачи на сечении бруса.

1. Двупараметрические семейства конечных деформаций сектора кругового кольца

Система уравнений эластостатики упругого тела при отсутствии массовых сил состоит [1] из уравнений равновесия

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \tag{1.1}$$

уравнений состояния

$$\mathbf{D} = \frac{dW}{d\mathbf{C}} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{C}, \quad \mathbf{P} = 2\frac{dW}{d\mathbf{G}} \tag{1.2}$$

и геометрических соотношений

$$\mathbf{G} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{C} = \operatorname{grad}\mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = X_k\mathbf{i}_k. \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{D}$ — несимметричный тензор напряжений Пиолы; $W(\mathbf{G})$ — удельная потенциальная энергия деформации упругого материала; $\mathbf{C}$ — градиент деформации; $\mathbf{P}$ — симметричный тензор напряжений Кирхгофа; $\mathbf{G}$ — мера деформации Коши; X_k $(k = 1,2,3)$ — декартовы координаты частиц деформированного тела (эйлеровы координаты); $\mathbf{i}_k$ — координатные орты; div и grad — операторы дивергенции и градиента в лагранжевых координатах. В качестве последних в дальнейшем будем использовать цилиндрические координаты r, φ, z, связанные с декартовыми координатами отсчетной конфигурации x_s $(s = 1,2,3)$ соотношениями $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $x_3 = z$. В случае изотропного материала удельная энергия W выражается через инварианты тензора $\mathbf{G}$

$$I_1 = tr\mathbf{G}, \quad I_2 = \frac{1}{2}\left(tr^2\mathbf{G} - tr\mathbf{G}^2\right), \quad I_3 = \det\mathbf{G}. \tag{1.4}$$

Система (1.1)–(1.3) легко сводится к системе трех скалярных нелинейных уравнений с неизвестными функциями X_1, X_2, X_3 и независимыми переменными r, φ, z.

---

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (02-01-00529, 03-01-06123).

[2]Зубов Леонид Михайлович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теории упругости механико-математического факультета РГУ.

[3]Зеленина Анастасия Александровна, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры высшей математики факультета управления транспортными перевозками РГУПС.

Далее приводятся частные решения системы уравнений (1.1)–(1.3), содержащие неизвестные функции только двух лагранжевых координат. Каждое из этих решений представляет собой двупараметрическое семейство деформаций, которые описываются при помощи функций

$$X_k = X_k(r, \varphi, z), \quad (k = 1, 2, 3).$$

Предположим, что упругое тело в отсчетной конфигурации имеет форму сектора тела вращения, т.е. сектора кольца с произвольным поперечным сечением. Ось вращения совпадает с осью x_3, а координаты r, z отсчитываются в плоскости поперечного сечения кольца. Рассмотрим следующее двупараметрическое семейство деформаций упругого тела, имеющего описанную выше геометрическую форму [2]:

$$\begin{gathered} X_1 = \alpha(r,z)\cos\kappa\varphi - \beta(r,z)\sin\kappa\varphi, \\ X_2 = \alpha(r,z)\sin\kappa\varphi + \beta(r,z)\cos\kappa\varphi, \\ X_3 = \gamma(r,z) + \nu\varphi, \quad \nu, \kappa = const. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Нетрудно видеть, что при деформации вида (1.5) каждая материальная кривая $r = const$, $z = const$, имеющая в отсчетной конфигурации форму дуги окружности, после деформации превращается в простую винтовую линию, осью которой является прямая $X_1 = X_2 = 0$. При $\nu = \beta = 0$ формулы (1.5) описывают чистый изгиб кривого бруса в плоскости X_1X_2. В этом случае каждая дуга окружности $r = const$, $z = const$ переходит в дугу окружности другого радиуса, лежащую в той же плоскости, так что упругое тело после деформации сохраняет форму сектора тела вращения. На основании (1.3), (1.5) находим

$$\begin{gathered} \mathbf{C}(r,\varphi,z) = C_{sk}(r,z)\mathbf{g}_s \otimes \mathbf{d}_k, \\ \mathbf{G} = C_{sm}C_{km}\mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}_k, \end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{g}_1 = \mathbf{i}_1\cos\varphi + \mathbf{i}_2\sin\varphi, \\ \mathbf{g}_2 = -\mathbf{i}_1\sin\varphi + \mathbf{i}_2\cos\varphi, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{d}_1 = \mathbf{i}_1\cos\kappa\varphi + \mathbf{i}_2\sin\kappa\varphi, \\ \mathbf{d}_2 = -\mathbf{i}_1\sin\kappa\varphi + \mathbf{i}_2\cos\kappa\varphi, \quad \mathbf{d}_3 = \mathbf{i}_3, \end{gathered} \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered} C_{11} = \frac{\partial\alpha}{\partial r}, \quad C_{12} = \frac{\partial\beta}{\partial r}, \quad C_{13} = \frac{\partial\gamma}{\partial r}, \\ C_{21} = -\frac{\kappa}{r}\beta, \quad C_{22} = \frac{\kappa}{r}\alpha, \quad C_{23} = \frac{\nu}{r}, \\ C_{31} = \frac{\partial\alpha}{\partial z}, \quad C_{32} = \frac{\partial\beta}{\partial z}, \quad C_{33} = \frac{\partial\gamma}{\partial z}. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Из (1.6), (1.8) видно, что компоненты меры деформации Коши $\mathbf{G}$ в ортонормированном базисе $\mathbf{g}_s$ $(s = 1, 2, 3)$ не зависят от координаты φ. В дальнейшем предполагается, что удельная энергия упругого материала W, рассматриваемая как функция компонент G_{sk} тензора $\mathbf{G}$ в базисе $\mathbf{g}_s$, не зависит явно от координаты φ, но может зависеть от координат r, z: $W = W(G_{sk}, r, z)$. Такие материалы будем называть однородными по координате φ. Указанный класс материалов включает в себя изотропные упругие среды с произвольной неоднородностью по координатам r, z, для которых $W = W(I_1, I_2, I_3, r, z)$, а также некоторые виды анизотропных сред.

Согласно (1.2) для материала, однородного по координате φ, компоненты $P_{sk} = \mathbf{g}_s \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}_k$ тензора напряжений Кирхгофа будут функциями только двух координат r, z. Поэтому тензор напряжений Пиолы при деформации вида (1.5) можно представить в виде

$$\mathbf{D}(r,\varphi,z) = D_{sk}(r,z)\mathbf{g}_s \otimes \mathbf{d}_k. \tag{1.9}$$

Подставляя (1.9) в (1.1), получим скалярную форму уравнений равновесия для напряжений Пиолы

$$\begin{gathered} \frac{\partial(rD_{11})}{\partial r} + \frac{\partial(rD_{31})}{\partial z} = \kappa D_{22}, \\ \frac{\partial(rD_{12})}{\partial r} + \frac{\partial(rD_{32})}{\partial z} = -\kappa D_{21}, \\ \frac{\partial(rD_{13})}{\partial r} + \frac{\partial(rD_{33})}{\partial z} = 0. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Учитывая уравнения состояния (1.2) и соотношения (1.6), (1.8), получим, что уравнение (1.10) есть система трех скалярных уравнений относительно трех функций двух переменных $\alpha\,(r,z)$, $\beta\,(r,z)$, $\gamma\,(r,z)$.

Поперечное сечение кривого бруса, т.е. сечение тела вращения полуплоскостью $\varphi = const$, представляет собой плоскую область σ, ограниченную кривой $\partial\sigma$. Сектор поверхности вращения, образованной вращением кривой $\partial\sigma$, будем называть боковой поверхностью стержня. Если на боковой поверхности с единичной нормалью $\mathbf{n} = n_1\mathbf{g}_1 + n_3\mathbf{g}_3$ задана внешняя нагрузка $\mathbf{f}$, то граничные условия на этой поверхности имеют вид

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{f}. \tag{1.11}$$

Предположим, что вектор распределенной нагрузки $\mathbf{f}$ имеет форму $\mathbf{f} = \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{C}$, где величины $\mathbf{f}^* \cdot \mathbf{g}_s (s = 1, 2, 3)$ не зависят от координаты φ. Тогда краевые условия (1.11) для деформации вида (1.5) не будут содержать переменой φ и вместе с уравнениями (1.10) образуют двумерную краевую задачу для плоской области σ в форме поперечного сечения стержня. Примером поверхностной нагрузки, для которой величины $\mathbf{f}^* \cdot \mathbf{g}_s$ не зависят от φ, может служить гидростатическое давление, равномерно распределенное по боковой поверхности.

Для изотропного упругого материала в соответствии с (1.2), (1.4) уравнение состояния имеет вид [1] ($\mathbf{E}$ — единичный тензор)

$$\mathbf{D} = 2\left[\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\mathbf{E} - \right. \\ \left. - \frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{G} + I_3\frac{\partial W}{\partial I_3}\mathbf{G}^{-1}\right] \cdot \mathbf{C}. \tag{1.12}$$

В частном случае чистого изгиба кривого бруса, когда $\beta = \nu = 0$, из (1.8) имеем $C_{12} = C_{21} = C_{23} = C_{32} = 0$, откуда и из (1.12) следует, что $D_{12} = D_{21} = D_{23} = D_{32} = 0$. Поэтому при чистом изгибе стержня из изотропного материала одно из трех уравнений (1.10) удовлетворяется тождественно. Если к тому же $\mathbf{f} \cdot \mathbf{d}_2 = 0$, то удовлетворяется тождественно также одно из трех краевых условий в (1.11).

Наряду с (1.5) существует [2] еще одно семейство деформаций сектора тела вращения, для которого исходная система уравнений эластостатики редуцируется в систему с двумя независимыми переменными r, z. Это семейство задается соотношениями

$$\begin{gathered} X_1 = \rho(r,z)\sin\chi\varphi + \psi(r,z)\cos\chi\varphi, \\ X_2 = \tau(r,z) + \eta\varphi, \\ X_3 = \rho(r,z)\cos\chi\varphi - \psi(r,z)\sin\chi\varphi, \\ \eta, \chi = const. \end{gathered} \tag{1.13}$$

При деформации (1.13) дуга окружности $r = const$, $z = const$ переходит в винтовую линию, осью которой является прямая $X_1 = X_3 = 0$. При $\tau = \chi = 0$ формулы (1.13) описывают выпрямление сектора тела вращения в призматический брус. В этом случае дуга каждой окружности $r = const$, $z = const$ после деформации превращается в отрезок прямой линии, параллельной оси X_2. Градиент деформации и мера деформации Коши, соответствующие преобразованию (1.13), имеют вид

$$\begin{gathered} \mathbf{C} = C_{sk}(r,z)\mathbf{g}_s \otimes \mathbf{h}_k, \\ \mathbf{G} = G_{sk}(r,z)\mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}_k, \\ \mathbf{h}_1 = \mathbf{i}_1\cos\chi\varphi - \mathbf{i}_3\sin\chi\varphi, \quad \mathbf{h}_2 = \mathbf{i}_2, \\ \mathbf{h}_3 = \mathbf{i}_1\sin\chi\varphi + \mathbf{i}_3\cos\chi\varphi, \end{gathered} \tag{1.14}$$

$$\begin{gathered} C_{11} = \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad C_{12} = \frac{\partial\tau}{\partial r}, \quad C_{13} = \frac{\partial\rho}{\partial r}, \\ C_{21} = \frac{\chi}{r}\rho, \quad C_{22} = \frac{\eta}{r}, \quad C_{23} = -\frac{\chi}{r}\psi, \\ C_{31} = \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad C_{32} = \frac{\partial\tau}{\partial z}, \quad C_{33} = \frac{\partial\rho}{\partial z}. \end{gathered} \tag{1.15}$$

Для упругого тела, однородного по координате φ, тензор напряжений Пиолы при деформации (1.13) имеет представление

$$\mathbf{D}(r,\varphi,z) = D_{sk}(r,z)\mathbf{g}_s \otimes \mathbf{h}_k,$$

а уравнения равновесия в напряжениях записываются в виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial(rD_{11})}{\partial r} + \frac{\partial(rD_{31})}{\partial z} = -\chi D_{23}, \\ \frac{\partial(rD_{12})}{\partial r} + \frac{\partial(rD_{32})}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial(rD_{13})}{\partial r} + \frac{\partial(rD_{33})}{\partial z} = \chi D_{21}. \end{gathered} \tag{1.16}$$

Из (1.14)–(1.16) и (1.11) следует, что предположения (1.13) о характере деформации упругой среды приводят исходную трехмерную задачу нелинейной теории упругости к двумерной краевой задаче для плоской области σ с неизвестными функциями $\psi(r,z)$, $\rho(r,z)$, $\tau(r,z)$. В задаче о выпрямлении кривого бруса из изотропного материала условия $\tau = \chi = 0$ приводят к соотношениям $C_{12} = C_{21} = C_{23} = C_{32} = 0$, $D_{12} = D_{21} = D_{23} = D_{32} = 0$, благодаря которым одно из уравнений равновесия (1.16) удовлетворяется тождественно, а оставшиеся два служат для определения функций $\psi(r,z)$, $\rho(r,z)$.

2. Формулировка двумерной краевой задачи на сечении кольца

Рассмотрим более подробно формулировку двумерной краевой задачи для плоской области σ в форме поперечного сечения кривого бруса, испытывающего деформацию вида (1.5). Боковую поверхность бруса будем считать свободной от нагрузки. Краевая задача на сечении бруса состоит из граничных условий (1.11), в которых $\mathbf{f} = 0$, и из уравнений равновесия (1.10), в которых величины D_{sk} предполагаются выраженными через неизвестные функции переменных α, β, γ при помощи уравнений состояния (1.2) и кинематических соотношений (1.6)–(1.8). Постоянные κ и ν считаются заданными параметрами.

Пусть $\alpha_0(r,z), \beta_0(r,z), \gamma_0(r,z)$ — решение указанной краевой задачи. Тогда легко проверить, что функции

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 \cos K - \beta_0 \sin K, \\ \beta &= \alpha_0 \sin K + \beta_0 \cos K, \\ \gamma &= \gamma_0 + L, \quad K, L = const \end{aligned} \tag{2.1}$$

также удовлетворяют уравнениям (1.10) и граничным условиям (1.11). Это означает, что положение упругого тела после деформации определено с точностью до поворота вокруг оси X_3 и поступательного смещения вдоль той же оси. Отмеченную неоднозначность решения можно устранить, наложив на неизвестные функции дополнительные условия, исключающие возможность произвольного поворота вокруг орта $\mathbf{i}_3$ и произвольного смещения вдоль этого орта. В качестве таких условий можно использовать, например, следующие интегральные соотношения:

$$\iint\limits_\sigma \big(\gamma(r,z) - z\big)\, dr\, dz = 0, \tag{2.2}$$

$$\iint\limits_\sigma \big(\cos\theta - 1\big)\, dr\, dz = 0, \tag{2.3}$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \frac{\partial\beta}{\partial r}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \frac{\partial\beta}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\alpha}{\partial r}\right)^2}}.$$

В случае чистого изгиба сектора кольца характер деформации, предписываемый формулами (1.5) при $\beta = \nu = 0$, не допускает произвольного поворота вокруг орта $\mathbf{i}_3$, а допускает только возможность произвольного поступательного движения вдоль оси X_3. Для устранения неоднозначности решения необходимо и достаточно только одного соотношения (2.2). Аналогичная ситуация имеет место в задаче чистого изгиба призматического тела [3].

Краевую задачу (1.10), (1.11), (2.2), (2.3) на сечении бруса можно преобразовать, исключив кинематические переменные α, β, γ и приняв за неизвестные другие величины. В результате исключения функций α, β, γ из выражений для C_{sk} в (1.8) получим уравнения совместности относительно компонент градиента деформации

$$\begin{aligned} &\kappa C_{11} - \frac{\partial}{\partial r}(rC_{22}) = 0, \\ &\kappa C_{12} + \frac{\partial}{\partial r}(rC_{21}) = 0, \\ &\kappa C_{31} - \frac{\partial}{\partial z}(rC_{22}) = 0, \\ &\kappa C_{32} + \frac{\partial}{\partial z}(rC_{21}) = 0, \\ &\frac{\partial C_{13}}{\partial z} - \frac{\partial C_{33}}{\partial r} = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Нетрудно проверить, что в односвязной области σ функции α, β, γ определяются однозначно заданными функциями $C_{k\alpha}$, C_{13}, C_{33} ($\alpha = 1,2$; $k = 1,2,3$), удовлетворяющими уравнениям (2.4) при условии, что задано значение функции γ в некоторой точке области σ.

В случае чистого изгиба система уравнений совместности состоит из трех соотношений:

$$\begin{aligned} &\kappa C_{11} - \frac{\partial}{\partial r}(rC_{22}) = 0, \\ &\kappa C_{31} - \frac{\partial}{\partial z}(rC_{22}) = 0, \\ &\frac{\partial C_{13}}{\partial z} - \frac{\partial C_{33}}{\partial r} = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Так как согласно (1.2) компоненты тензора напряжений Пиолы D_{sk} выражаются через величины C_{mn}, уравнения равновесия (1.10) вместе с уравнениями совместности (2.4) образуют систему восьми уравнений с восемью неизвестными. Число неизвестных функций $C_{sk}(r,z)$ $(s,k = 1,2,3)$ равно восьми по той причине, что компонента C_{23} согласно (1.8) является известной функцией. Краевые условия на контуре $\partial\sigma$ поперечного сечения бруса

$$n_1 D_{1k} + n_3 D_{3k} = 0 \quad (k = 1,2,3) \tag{2.6}$$

представляют собой нелинейные ограничения на значения функций $C_{sk}(r,z)$.

Краевая задача (1.10), (2.4), (2.6), описывающая пространственный изгиб кривого бруса и сформулированная через компоненты тензора $\mathbf{C}$, как легко проверить, нечувствительна к следующей замене неизвестных функций ($K = const$):

$$\mathbf{C} \to \mathbf{C}\cdot\Big[(\mathbf{E}-\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3)\cos K + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_3\times\mathbf{E}\sin K\Big].$$

Указанная неоднозначность решения устраняется при помощи ограничения (2.3), в котором теперь $\cos\theta$ должен быть выражен в терминах C_{sk}:

$$\cos\theta = \frac{C_{31}+C_{12}}{\sqrt{\left(C_{31}+C_{12}\right)^2+\left(C_{32}-C_{11}\right)^2}}. \quad (2.7)$$

Надобность в условии (2.2), очевидно, пропадет, если за неизвестные принять компоненты тензора $\mathbf{C}$.

Вместо компонент градиента деформации $\mathbf{C}$ за неизвестные функции можно принять компоненты D_{mn} тензора напряжений Пиолы. Чтобы записать уравнения совместности (2.4) через напряжения, необходимо выразить градиент деформации $\mathbf{C}$ через тензор $\mathbf{D}$. Считая материал изотропным и следуя методу [4], сначала выражаем положительно определенный тензор растяжения $\mathbf{U} = (\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^T)^{1/2}$ через симметричный тензор напряжений Яуманна $\mathbf{S} = \mathbf{D}\cdot\mathbf{A}^T$, где $\mathbf{A} = (\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^T)^{-1/2}\cdot\mathbf{C}$ — собственно ортогональный тензор, определяющий повороты материальных волокон при деформации упругого тела. После этого задача построения зависимости $\mathbf{C}(\mathbf{D})$ сводится к представлению тензора поворота $\mathbf{A}$ через тензор Пиолы: $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{D})$, так как справедливы равенства

$$\begin{aligned}\mathbf{C} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{A} = f_1(\mathbf{S})\cdot\mathbf{A}(\mathbf{D}) &= \\ = f_1\big[\mathbf{D}\cdot\mathbf{A}^T(\mathbf{D})\big]\cdot\mathbf{A}(\mathbf{D}). &\quad (2.8)\end{aligned}$$

Здесь $f_1(\mathbf{S})$ — тензорная функция, обратная к функции $\mathbf{S} = f(\mathbf{U})$. Зависимость $\mathbf{A}(\mathbf{D})$ находится как решение уравнения [4]

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\cdot\mathbf{D}^T. \quad (2.9)$$

В рассматриваемой задаче пространственного изгиба кривого бруса уравнение (2.9) в соответствии с (1.6), (1.9) эквивалентно следующему:

$$\mathbf{D}_0\cdot\mathbf{A}_0^T = \mathbf{A}_0\cdot\mathbf{D}_0^T. \quad (2.10)$$

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}|_{\varphi=0} = D_{sk}(r,z)\mathbf{g}_s\otimes\mathbf{g}_k, \quad \mathbf{A}_0 = \mathbf{A}|_{\varphi=0}.$$

Решение уравнения (2.10) не единственно и имеет вид

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{K}^{-1}\cdot\mathbf{D}_0. \quad (2.11)$$

$$\mathbf{K} = \pm\sqrt{L_1}\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{a}_1 \pm \sqrt{L_2}\mathbf{a}_2\otimes\mathbf{a}_2 \pm \sqrt{L_3}\mathbf{a}_3\otimes\mathbf{a}_3,$$

где L_m и $\mathbf{a}_m$ — собственные значения и собственные единичные векторы тензора $\mathbf{D}_0\cdot\mathbf{D}_0^T$.

Хотя в сечениях бруса $\varphi = const$, достаточно удаленных от сечения $\varphi = 0$, повороты материальных волокон могут быть очень большими, можно утверждать, что если параметры $|\kappa - 1|$ и $|\nu|$ не слишком велики, то углы поворота материальных волокон в каждой точке сечения бруса $\varphi = 0$ не будут превышать 9°. Тогда, как показано в [4], единственное решение уравнения (2.10) относительно $\mathbf{A}_0$ выделяется из совокупности (2.11) при помощи неравенств

$$\det\mathbf{A}_0 > 0, \quad tr\mathbf{A}_0 > 1. \quad (2.12)$$

Итак, при учете ограничений (2.12) существует единственное представление компонент градиента деформации C_{sk} через напряжения Пиолы D_{mn}, что позволяет сформулировать двумерную задачу (1.10), (2.3), (2.4), (2.6), (2.7) в напряжениях D_{mn}.

Нахождение тензора поворота $\mathbf{A}_0$ по формулам (2.11), (2.12) в общем случае требует применения численных методов. В задаче чистого изгиба кривого бруса, следуя методу [3], удается получить явное выражение тензора $\mathbf{A}_0$ через $\mathbf{D}_0$

$$\begin{aligned}\mathbf{A_0} = \frac{|p|}{\Delta}\Big[&(\mathbf{g_1}\otimes\mathbf{g_1}+\mathbf{g_3}\otimes\mathbf{g_3}) - \\ &-\frac{q}{p}(\mathbf{g_1}\otimes\mathbf{g_3}-\mathbf{g_3}\otimes\mathbf{g_1})\Big] + \mathbf{g_2}\otimes\mathbf{g_2}, \quad (2.13)\end{aligned}$$

$$p = D_{11}+D_{33}, \quad q = D_{31}-D_{13}, \quad \Delta = \sqrt{p^2+q^2}.$$

Следующий шаг преобразования двумерной краевой задачи на сечении кольца заключается в тождественном удовлетворении уравнений равновесия (1.10) при помощи функций напряжений. Выразим неизвестные напряжения D_{mn} через пять новых неизвестных по формулам

$$\begin{gathered} rD_{11} = \kappa\Phi_{11}, \quad rD_{31} = \kappa\Phi_{31}, \\ rD_{12} = \kappa\Phi_{12}, \quad rD_{32} = \kappa\Phi_{32}, \\ D_{22} = \frac{\partial\Phi_{11}}{\partial r} + \frac{\partial\Phi_{31}}{\partial z}, \\ D_{21} = -\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial r} - \frac{\partial\Phi_{32}}{\partial z}, \\ rD_{13} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad rD_{33} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Выражения (2.14) тождественно удовлетворяют уравнениям (1.10) и представляют собой общее решение этих уравнений. Последнее вытекает из того, что функции Φ_{11}, Φ_{12}, Φ_{31}, Φ_{32} определяются по заданным в односвязной области σ напряжениям однозначно, а функция Φ — с точностью до произвольной аддитивной постоянной, не влияющей на напряженное состояние тела. Величины Φ, Φ_{11}, Φ_{12}, Φ_{31}, Φ_{32}, называемые функциями напряжений, остается подчинить уравнениям совместности (2.4), соотношениям (2.3), (2.7) и краевым условиям (2.6). Последние записываются через функции напряжений следующим образом (s — текущая длина дуги граничного контура $\partial\sigma$):

$$\begin{gathered} \frac{\partial\Phi}{\partial s} = 0, \\ n_1\Phi_{11} + n_3\Phi_{31} = 0, \\ n_1\Phi_{12} + n_3\Phi_{32} = 0. \end{gathered} \tag{2.15}$$

Линейность граничных условий (2.15) является важным достоинством формулировки краевой задачи на сечении бруса при помощи функций напряжений.

В задаче о чистом изгибе выражения, тождественно удовлетворяющие уравнениям равновесия, имеют более простой по сравнению с (2.14) вид:

$$\begin{gathered} rD_{11} = \kappa\Phi_{11}, \quad rD_{31} = \kappa\Phi_{31}, \\ D_{22} = \frac{\partial\Phi_{11}}{\partial r} + \frac{\partial\Phi_{31}}{\partial z}, \\ rD_{13} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad r\mathrm{D}_{33} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}. \end{gathered} \tag{2.16}$$

Приведем еще уравнения совместности и общее решение уравнений равновесия (1.16) для семейства деформаций (1.13):

$$\kappa C_{11} + \frac{\partial\,(rC_{23})}{\partial r} = 0, \quad \kappa C_{13} - \frac{\partial\,(rC_{21})}{\partial r} = 0,$$

$$\kappa C_{31} + \frac{\partial\,(rC_{23})}{\partial z} = 0, \quad \kappa C_{33} - \frac{\partial\,(rC_{21})}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial C_{32}}{\partial r} - \frac{\partial C_{12}}{\partial z} = 0, \quad C_{22} = \frac{\eta}{r},$$

$$rD_{11} = \chi\Phi_{11}, \quad rD_{31} = \chi\Phi_{31}, \quad rD_{13} = \chi\Phi_{13},$$

$$rD_{33} = \chi\Phi_{33}, \quad D_{21} = \frac{\partial\Phi_{13}}{\partial r} + \frac{\partial\Phi_{33}}{\partial z},$$

$$D_{23} = -\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial r} - \frac{\partial\Phi_{31}}{\partial z}, \quad rD_{12} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

$$rD_{32} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}.$$

3. Краевые условия на торцах кривого бруса

Решение двумерной краевой задачи на сечении сектора кольца, сформулированной в разд. 2, позволяет точно удовлетворить уравнениям равновесия и совместности в объеме упругого тела и граничным условиям на его боковой поверхности. Этого нельзя сказать о граничных условиях на торцевых поверхностях бруса $\varphi = const$, которые могут быть выполнены лишь приближенно, за счет подбора постоянных κ и ν.

Определим главный вектор $\mathbf{F}$ и главный момент $\mathbf{M}$ сил, действующих в произвольном сечении $\varphi = const$ кривого бруса, испытывающего деформацию (1.5) при отсутствии нагрузки на боковой поверхности. На основании (1.9) имеем (всюду далее интегрирование ведется по области σ)

$$\begin{gathered} \mathbf{F}(\varphi) = \iint \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{D} dr dz = \\ = F_1\mathbf{d}_1 + F_2\mathbf{d}_2 + F_3\mathbf{d}_3, \\ F_k = \iint D_{2k}\, dr\, dz \quad (k = 1, 2, 3), \end{gathered} \tag{3.1}$$

где F_k — постоянные величины. Необходимое условие равновесия $\mathbf{F}(\varphi_1) = \mathbf{F}(\varphi_2)$ части кривого бруса, ограниченной боковой поверхностью и сечениями $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$, где φ_1

и φ_2 — произвольные действительные числа, согласно (1.7), (3.1) приводит к равенствам

$$\begin{gathered} s_1F_1 - s_2F_2 = 0, \quad s_2F_1 + s_1F_2 = 0, \\ s_1 = \cos\kappa\varphi_1 - \cos\kappa\varphi_2, \\ s_2 = \sin\kappa\varphi_1 - \sin\kappa\varphi_2. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Определитель системы (3.2) относительно F_1, F_2 отличен от нуля, следовательно, $F_1 = F_2 = 0$. Таким образом, главный вектор сил в сечении стержня при деформации вида (1.5) одинаков для всех сечений $\varphi = const$ и направлен по оси X_3. Теперь вычислим главный момент $\mathbf{M}$ сил в сечении $\varphi = const$ относительно некоторой точки на прямой $X_1 = X_2 = 0$. Так как главный вектор параллелен указанной прямой, момент не зависит от выбора точки приведения на оси X_3, что позволяет вычислять момент относительно точки $X_1 = X_2 = X_3 = 0$. Учитывая, что $F_1 = F_2 = 0$, при помощи (1.5), (1.9) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\varphi) = -\iint \mathbf{g}_2\cdot\mathbf{D}\times \\ \times(\alpha\mathbf{d}_1 + \beta\mathbf{d}_2 + \gamma\mathbf{i}_3 + \nu\varphi\mathbf{i}_3)\,dr\,dz = \\ = M_1\mathbf{d}_1 + M_2\mathbf{d}_2 + M_3\mathbf{i}_3, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \iint (D_{23}\beta - D_{22}\gamma)\,dr\,dz, \\ M_2 &= \iint (D_{21}\gamma - D_{23}\alpha)\,dr\,dz, \\ M_3 &= \iint (D_{22}\alpha - D_{21}\beta)\,dr\,dz. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Согласно (3.4) величины M_k ($k = 1, 2, 3$) постоянны. Из условия баланса моментов всех сил, приложенных к участку кольца, заключенному между полуплоскостями $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$, получим

$$s_1M_1 - s_2M_2 = 0, \quad s_2M_1 + s_1M_2 = 0,$$

откуда вытекает, что $M_1 = M_2 = 0$.

Итак, доказано, что реализация деформации (1.5) требует приложения к концам кривого бруса системы сил, статически эквивалентной силе F_3 и изгибающему моменту M_3, действующим в точке оси вращения X_3 и направленным вдоль этой оси. После решения двумерной краевой задачи на сечении, сформулированной в разд. 2, сила и момент становятся известными функциями параметров κ и ν:

$$F_3 = F(\kappa, \nu), \quad M_3 = M(\kappa, \nu). \tag{3.5}$$

Обращение функций F и M позволяет определить параметры κ и ν по заданным значениям силы F_1 и момента M_1.

В задаче чистого изгиба $D_{23} \equiv 0$, поэтому $F_3 = 0$. Следовательно, реализация деформации (1.5) в случае, когда $\beta = \nu = 0$, требует приложения к концам бруса только изгибающих моментов.

Функции (3.5) обладают свойством

$$\frac{\partial F}{\partial\kappa} = \frac{\partial M}{\partial\nu}, \tag{3.6}$$

для доказательства которого обратимся к потенциальной энергии деформации участка стержня, заключенного между сечениями $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$:

$$(\varphi_2 - \varphi_1)\Pi, \quad \Pi = \iint W r\,dr\,dz.$$

Имея в виду формулы (1.8), рассмотрим функционал Π, вычисленный при решении двумерной краевой задачи (1.10), (2.2), (2.3), (2.6):

$$\begin{aligned} \Pi(\kappa,\nu) = \iint W\Big[\alpha(r,z,\kappa,\nu), \beta(r,z,\kappa,\nu), \\ \gamma(r,z,\kappa,\nu), \kappa, \nu\Big] r\,dr\,dz. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь учтено, что решение задачи (1.10), (2.2), (2.3), (2.6) зависит от параметров κ, ν. Исходя из формул

$$\frac{\partial\mathbf{d}_1}{\partial\kappa} = \varphi\mathbf{d}_2, \quad \frac{\partial\mathbf{d}_2}{\partial\kappa} = -\varphi\mathbf{d}_1, \quad \frac{\partial\mathbf{d}_1}{\partial\nu} = \frac{\partial\mathbf{d}_2}{\partial\nu} = 0$$

и равенств, вытекающих из симметричности тензора напряжений Кирхгофа

$$C_{\mathrm{ks}}D_{kn} = C_{kn}D_{ks},$$

на основании (1.2), (1.6), (1.9), (3.7) получим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \kappa} = \iint D_{mn} \frac{\partial C_{mn}}{\partial \kappa} r\,dr\,dz =$$
$$= \iint (D_{22}\alpha - D_{21}\beta)\,dr\,dz +$$
$$+ \iint \Big[rD_{11}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial \alpha}{\partial \kappa}) + rD_{12}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial \beta}{\partial \kappa}) +$$
$$+ rD_{13}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial \gamma}{\partial \kappa}) - D_{21}\kappa\frac{\partial \beta}{\partial \kappa} +$$
$$+ D_{22}\kappa\frac{\partial \alpha}{\partial \kappa} + D_{31}r\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial \alpha}{\partial \kappa}) +$$
$$+ D_{32}r\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial \beta}{\partial \kappa}) + D_{33}r\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial \gamma}{\partial \kappa})\Big]\,dr\,dz. \quad (3.8)$$

Интегрируя по частям и применяя формулу Грина, нетрудно проверить, что второй интеграл в (3.8) обращается в нуль в силу уравнений равновесия (1.10) и граничных условий (2.6). Сославшись на (3.4), находим

$$M_3 = \frac{\partial \Pi(\kappa, \nu)}{\partial \kappa}. \quad (3.9)$$

Аналогичным способом доказывается равенство

$$F_3 = \frac{\partial \Pi(\kappa, \nu)}{\partial \nu}. \quad (3.10)$$

Из (3.9) и (3.10) вытекает соотношение (3.6).

Рассматривая равновесие произвольного сектора кривого бруса, можно показать, что реализация семейства деформаций (1.13) требует приложения к концам бруса системы сил, статически эквивалентной силе F_2 и моменту M_2, действующим в точке оси винтовых линий, в которые превращаются после деформации окружности $r = const$, $z = const$, и направленным вдоль этой оси. При этом справедливы соотношения, аналогичные (3.9), (3.10):

$$F_2 = \frac{\partial \Pi(\eta, \chi)}{\partial \eta}, \quad M_2 = \frac{\partial \Pi(\eta, \chi)}{\partial \chi}.$$

4. Вариационные постановки двумерной задачи

Сформулированная в разд. 2 двумерная нелинейная краевая задача для области в форме поперечного сечения бруса допускает различные вариационные постановки, вытекающие из вариационных принципов нелинейной теории упругости [5]. Ограничимся выражениями двух основных функционалов, условия стационарности которых эквивалентны двумерной краевой задаче, описывающей пространственный изгиб сектора кольца.

4.1. Функционал типа Лагранжа

$$\Pi_1[\alpha, \beta, \gamma] = \iint W(\alpha, \beta, \gamma) r\,dr\,dz. \quad (4.1)$$

Функционал Π_1 определен на множестве дважды дифференцируемых в области σ функций двух переменных $\alpha(r, z)$, $\beta(r, z)$, $\gamma(r, z)$, задающих согласно (1.5) поле перемещений упругого бруса. Удельная энергия деформации W предполагается выраженной через функции α, β, γ при помощи (1.8). Условие стационарности функционала (4.1) $\delta\Pi_1 = 0$ эквивалентно уравнениям равновесия (1.10) и граничным условиям (2.6), в которых напряжения D_{sk} выражены через функции α, β, γ.

4.2. Функционал типа Кастильяно

$$\Pi_2[D_{23}, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{31}, \Phi_{32}, \Phi] =$$
$$= \iint \Big[V(D_{23}, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{31}, \Phi_{32}, \Phi) -$$
$$- \frac{\nu}{r} D_{23} \Big] r\,dr\,dz. \quad (4.2)$$

Здесь V — удельная дополнительная энергия упругого материала, являющаяся функцией тензора напряжений Пиолы и связанная с удельной потенциальной энергией деформации W преобразованием Лежандра

$$V(\mathbf{D}) = tr\big[\mathbf{C}^T(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}\big] - W(\mathbf{D}),$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{D}) = \frac{dV}{d\mathbf{D}}.$$

Способ определения зависимости $\mathbf{C}(\mathbf{D})$, необходимой для построения функции $V(\mathbf{D})$, описан в разд. 2. В (4.2) использовано представление (2.14) тензора Пиолы через функции напряжений, тождественно удовлетворяющие уравнениям равновесия (1.10). Допустимые функции напряжений должны быть дифференцируемыми и удовлетворять условиям (2.15). Условия стационарности функционала Π_2 состоят из уравнений совместности (2.4), выраженных через функции напряжений и соотношения

$$\frac{\nu}{r} = \frac{\partial V}{\partial D_{23}}.$$

Приведенные вариационные постановки можно использовать при решении нелинейной двумерной задачи на сечении кривого бруса методами Ритца или конечных элементов.

Литература

1. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. *Зубов Л. М.* Полуобратные решения нелинейной теории упругости, приводящие к двумерным краевым задачам // ДАН. 2000. Т. 374. №6. С. 765–767.
3. *Зеленина А. А., Зубов Л. М.* Нелинейная теория чистого изгиба призматических упругих тел // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 416–423.
4. *Зубов Л. М.* О представлении градиента перемещений изотропного упругого тела через тензор напряжений Пиола // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 6. С. 1070–1077.
5. *Зубов Л. М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 3. С. 406–410.

Статья поступила 21 января 2003 г.
Ростовский государственный университет, Ростовский государственный университет путей сообщения