

УДК 539.3

EDN: DKNSRN DOI: 10.31429/vestnik-22-2-45-58

Действие поперечной нестационарной силы на шарнирно опертую моментную упругую прямоугольную пластину (общая модель)

Нгок Дат До¹, Д. В. Тарлаковский^{1,2}✉

¹ Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

² НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

✉ Тарлаковский Дмитрий Валентинович; ORCID 0000-0002-9556-7442; SPIN 1028-7474; e-mail: tdvhome@mail.ru

Аннотация. Общая модель нестационарного изгиба шарнирно опертой моментно-упругой прямоугольной пластины представляет собой систему уравнений, описывающих нестационарный изгиб однородной изотропной пластины толщиной h , выраженных через перемещения. Данная модель выводится из общей системы уравнений и включает в себя шесть уравнений в «перемещениях». Рассматривается прямоугольная пластина в декартовой системе координат. Уравнения динамики дополняются материальными соотношениями, которые связывают силовые факторы с кинематическими характеристиками. На краях пластины заданы условия обобщённого шарнирного закрепления: отсутствие прогиба, а также нулевые значения моментов от тензора напряжений и моментных напряжений. Начальные условия предполагаются нулевыми. Решение для прогибов ищется в виде двойных тригонометрических рядов, разложенных по собственным функциям лапласиана, тогда как углы поворота выражаются через производные этих функций. Показано, что данное представление удовлетворяет граничным условиям. Получены системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложений, которые решаются численными методами. Итоговое решение формируется путём суммирования рядов с заданной точностью в непрерывной норме. В качестве примера исследуется случай воздействия нормальной нагрузки, зависящей от времени по закону функции Хевисайда. Численные расчёты выполнены для центра квадратной пластины, изготовленной из композитного материала.

Ключевые слова: нестационарный изгиб, моментная упругая пластина, уравнения движения, физические соотношения, функция лапласиана, внутренние силовые факторы, двойной тригонометрический ряд, композитный материал.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 25-11-00040).

Цитирование: До Нгок Дат, Тарлаковский Д. В. Действие поперечной нестационарной силы на шарнирно опертую моментную упругую прямоугольную пластину (общая модель) // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 2. С. 45–58. EDN: DKNSRN. DOI: 10.31429/vestnik-22-2-45-58

Поступила 15 мая 2025 г. После доработки 18 июня 2025 г. Принято 19 июня 2025 г. Публикация 30 июня 2025 г.

Вклад каждого соавтора в процесс написания статьи на разных этапах ее создания: идея работы (Тарлаковский Д.В.), рассчитывать и строить графики (Тарлаковский Д.В., До Нгок Дат.), написание статьи (До Нгок Дат.), внесение правок и утверждение окончательного варианта (Тарлаковский Д.В.). Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2025. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

The Action of a Transverse Non-Stationary Force on a Hinged Elastic Rectangular Plate (General Model)

Ngoc Dat Do, D. V. Tarlakovskii^{1,2}✉

¹ Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

² Research Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

✉ Dmitry V. Tarlakovskii; ORCID 0000-0002-9556-7442; e-mail: tdvhome@mail.ru

Abstract. The general model of non-stationary bending of a hinged moment-elastic rectangular plate is a system of equations describing non-stationary bending of a homogeneous isotropic plate of thickness h , expressed through displacements. This model is derived from the general system of equations and includes six equations in “displacements”. A rectangular plate in a Cartesian coordinate system is considered. Dynamic

equations are supplemented by material relations that link force factors with kinematic characteristics. Generalized hinged fixation conditions are specified at the edges of the plate: no deflection, and zero values of moments from the stress tensor and moment stresses. The initial conditions are assumed to be zero. The solution for deflections is sought in the form of double trigonometric series expanded in terms of the eigenfunctions of the Laplacian, while the rotation angles are expressed through the derivatives of these functions. It is shown that this representation satisfies the boundary conditions. Systems of ordinary differential equations are obtained for the expansion coefficients, which are solved by numerical methods. The final solution is formed by summing the series with a given accuracy in the continuous norm. As an example, the case of the action of a normal load, dependent on time according to the law of the Heaviside function, is investigated. Numerical calculations are performed for the center of a square plate made of a composite material.

Keywords: transient bending, moment elastic plate, equations of motion, physical relations, Laplacian function, internal force factors, double trigonometric series, composite material.

Funding. The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project No. 25-11-00040).

Cite as: Do, Ngoc Dat, Tarlakovskii, D. V., The action of a transverse non-stationary force on a hinged elastic rectangular plate (general model). *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 2, pp. 45–58. DOI: 10.31429/vestnik-22-2-45-58

Received 15 May 2025. Revised 18 June 2025. Accepted 19 June 2025. Published 30 June 2025.

The contribution of each co-author to the process of writing the article at different stages of its creation: idea of the work (Tarlakovskii D.V.), calculation and construction of graphs (Tarlakovskii D.V., Do Ngoc Dat), writing the article (Do Ngoc Dat), making edits and approving the final version (Tarlakovskii D.V.). The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2025. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](#) license.

Введение

В последние десятилетия наблюдается значительный рост интереса к исследованию так называемых неклассических моментных сред, которые характеризуются наличием дополнительной степени свободы, связанной с независимым поворотом микроструктурных элементов. Эти материалы выходят за рамки классической теории упругости и требуют применения более сложных моделей. Одной из наиболее распространённых и признанных теоретических основ для описания такого рода сред является теория Коссера, предложенная в работах [1, 2]. Данная теория учитывает не только перемещения, но и микроповороты, что позволяет более точно описывать поведение композитных и других гетерогенных материалов.

Особое внимание в рамках этой теории уделяется решению задач статического типа. Особенно активно такие исследования ведутся применительно к тонким элементам конструкций, например, пластинам, где микроструктура материала оказывает заметное влияние на распределение напряжений и деформаций. Однако динамические аспекты поведения подобных систем пока остаются недостаточно изученными.

Количество научных публикаций, в которых рассматриваются нестационарные процессы в конструкциях с тонкостенными элементами, по-прежнему ограничено. Это объясняется высокой степенью математической и вычислительной сложности, возникающей при моделировании таких процессов. Например, в статье [3] с использованием принципа Гамильтона были сформулированы начально-краевые задачи для обобщённых моментных оболочек с произвольной геометрией. Этот подход позволил получить более универсальные уравнения движения, пригодные для анализа различных динамических режимов.

В ряде последующих работ [4–7] были выведены уравнения движения для сферических оболочек с учетом микроповоротов, основанные на той же теоретической базе. Для их анализа применялись методы, аналогичные тем, что ранее использовались при исследовании классических оболочек, как это представлено в публикациях [8–10]. Такой подход позволил установить связь между классическими и неклассическими моделями, а также оценить влияние микроструктурных параметров на динамическое поведение оболочек.

Некоторые аспекты нестационарных процессов в контексте моментных упругих пластин были проанализированы в работах [11–14]. В двух последних публикациях представлены ключевые направления развития данной научной области, которые получили дальнейшее развитие в последующих исследованиях. В частности, в этих работах применялись две различные теоретические модели. Первая модель основана на классических допущениях Кирхгофа–Лява, предполагающих, что нормальные к средней поверхности волокна остаются прямыми и не деформируются. Вторая модель исключает влияние нормальных деформаций, что позволяет упростить математическую постановку задачи и сократить число переменных. Оба подхода имеют свои преимущества и используются в зависимости от поставленных задач и требований к точности расчётов.

1. Постановка задачи

Перейдем к общей модели, по-прежнему рассматривая прямоугольную пластину вида [15]. Уравнения, описывающие движение упругой пластины с учетом моментных напряжений при толщине h , и физические соотношения имеют следующую форму:

$$\begin{aligned}\ddot{w} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \Delta w + \gamma_{\alpha-}^{-2} \theta_\psi - 2\alpha \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) + q, \\ \ddot{\psi}_1 &= c_{\alpha+} \frac{\partial \theta_\psi}{\partial x_1} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \Delta \psi_1 + 2\alpha \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} - r^{-2} \left(\gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_1 - 2\alpha \omega_2 \right) + m_1, \\ \ddot{\psi}_2 &= c_{\alpha+} \frac{\partial \theta_\psi}{\partial x_2} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \Delta \psi_2 - 2\alpha \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} - r^{-2} \left(\gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_2 + 2\alpha \omega_1 \right) + m_2,\end{aligned}\quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\omega}_1 &= 2\alpha v \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right) + \gamma_2^{-2} \Delta \omega_1 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_1} - 4\alpha v \omega_1 + \gamma_3^{-2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} + \tilde{m}_{M1}, \\ \ddot{\omega}_2 &= 2\alpha v \left(\psi_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \gamma_2^{-2} \Delta \omega_2 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_2} - 4\alpha v \omega_2 + \gamma_3^{-2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} + \tilde{m}_{M2}, \\ \ddot{\varphi}_3 &= 2\alpha v \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - 2\varphi_3 \right) + \gamma_2^{-2} \Delta \varphi_3 - r^{-2} (\gamma_3^{-2} \theta_\omega + \gamma_0^{-2} \varphi_3) + \tilde{m}_{2M}; \\ M_{11} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \kappa \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \quad M_{22} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \kappa \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \\ M_{12} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - 2\alpha \varphi_3, \quad M_{21} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + 2\alpha \varphi_3, \\ T_{13} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_1 + \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + 2\alpha \omega_2, \quad T_{23} = \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_2 + \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_2} - 2\alpha \omega_1, \\ T_{31} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_1 + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_1} - 2\alpha \omega_2, \quad T_{32} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_2 + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + 2\alpha \omega_1; \\ R_{11} &= \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \eta_2 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \varphi_3 \right), \quad R_{22} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \eta_2 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \varphi_3 \right), \\ R_{12} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, \quad R_{21} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \eta \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, \\ S_{13} &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, \quad S_{23} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}, \quad N_\omega = \eta_2 \theta_\omega + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_3.\end{aligned}\quad (1.2)$$

где w — прогиб; φ_3 — угол отклонения вектора угла вращения от нормального волокна; ψ_1, ψ_2 — векторы углов поворота нормального волокна, ω_1, ω_2 — координаты вектора свободного вращения; $\theta_\omega = \partial \omega_1 / \partial x_1 + \partial \omega_2 / \partial x_2$; $p, m_1, m_2, \tilde{m}_{M1}, \tilde{m}_{M2}, \tilde{m}_{2M}$ — внешние нагрузки, M_{ij} и T_{ij} — моменты и усилия от тензора напряжений, R_{ij}, N_ω и S_{ij} — моменты и усилия от тензора моментных напряжений.

В данных формулах и далее введены следующие безразмерные параметры (размерные аналоги обозначены штрихом, но в (1.1), (1.2) и последующем изложении этот штрих опускается):

$$\begin{aligned} x'_i &= \frac{x_i}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad w' = \frac{w}{L}, \quad r' = \frac{r}{L}, \quad p' = \frac{pL}{h(\lambda + 2\mu)}, \\ r^2 &= \frac{I}{h}, \quad I = \frac{h^3}{12}, \quad \tilde{m}'_{Mi} = \frac{\tilde{m}_{Mi} L^2}{h}, \\ T'_{kl} &= \frac{T_{kl}}{h(\lambda + 2\mu)}, \quad M'_{kl} = \frac{M_{kl} L}{I(\lambda + 2\mu)}, \quad R'_{kl} = \frac{R_{kl} L}{h(\gamma + \varepsilon)}, \quad N'_\omega = \frac{N_\omega L}{h(\gamma + \varepsilon)}, \\ \gamma_0^2 &= \frac{c_1^2}{c_4^2}, \quad \gamma_1^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \quad \gamma_2^2 = \frac{c_1^2}{c_3^2}, \\ c_1 &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{J}}, \quad c_4 = \sqrt{\frac{\beta + 2\gamma}{J}}, \\ \alpha' &= \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}, \quad \eta = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, \quad \eta_1 = \frac{\gamma}{\gamma + \varepsilon}, \quad \eta_2 = \frac{\beta}{\gamma + \varepsilon}, \\ v &= \frac{\rho L^2}{J}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - \frac{2}{\gamma_1^2}. \end{aligned}$$

На границах пластины принимаем условия обобщенного шарнирного опирания

$$\begin{aligned} w|_{x_1=0,a} &= w|_{x_2=0,b} = 0, \\ M_{11}|_{x_1=0,a} &= 0, \quad M_{22}|_{x_2=0,b} = 0, \quad R_{12}|_{x_1=0,a} = 0, \\ R_{21}|_{x_2=0,b} &= 0, \quad S_{13}|_{x_1=0,a} = 0, \quad S_{23}|_{x_2=0,b} = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Начальные условия полагаем нулевыми:

$$w|_{\tau=0} = \dot{w}|_{\tau=0} = \omega_1|_{\tau=0} = \dot{\omega}_1|_{\tau=0} = \omega_2|_{\tau=0} = \dot{\omega}_2|_{\tau=0} = 0. \quad (1.4)$$

2. Решение начально-краевой задачи

Для решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.4) представляем искомые функции в виде двойных тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \\ a_m &= \frac{\pi m}{a}, \quad b_n = \frac{\pi n}{b}, \\ \omega_1 &= \omega_{10} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \omega_{1mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \quad \omega_{10} = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{1m0}(\tau) \sin a_m x_1, \\ \omega_2 &= \omega_{20} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \omega_{2mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \quad \omega_{20} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{20n}(\tau) \sin b_n x_2, \\ \varphi_3 &= \varphi_{300} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{3m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{30n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \varphi_{3mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\ \psi_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{10n}(\tau) \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \psi_{1mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \\ \psi_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{2m0}(\tau) \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \psi_{2mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\{\sin a_m x_1, \sin b_n x_2\}$ — собственные функции краевой задачи

$$\Delta w = \lambda w, \quad w|_{x_1=0,a} = w|_{x_2=0,b} = 0. \quad (2.2)$$

Отсюда следуют ряды для функций в (1.2):

$$\begin{aligned} M_{11} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{11mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, & M_{22} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{22mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \\ M_{12} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{12mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, & M_{21} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{21mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\ T_{13} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{13mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, & T_{31} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{31mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \\ T_{23} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{23mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, & T_{32} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{32mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \\ R_{11} &= R_{1100} + \sum_{m=1}^{\infty} R_{11m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} R_{110n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} R_{11mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\ R_{22} &= R_{2200} + \sum_{n=1}^{\infty} R_{220n} \cos b_n x_2 + \sum_{m=1}^{\infty} R_{220m} \cos a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} R_{22mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\ S_{13} &= \sum_{m=1}^{\infty} S_{13m0} \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} S_{13mn} \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \\ S_{23} &= \sum_{n=1}^{\infty} S_{230n} \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} S_{23mn} \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \\ N_{\omega} &= N_{\omega 00} + \sum_{m=1}^{\infty} N_{\omega m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} N_{\omega 0n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} N_{\omega mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из (2.1)–(2.3) с учетом полноты систем тригонометрических функций имеют место равенства:
– $m, n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \theta_{\omega mn} &= a_m \omega_{1mn} + b_n \omega_{2mn}, \\ M_{11mn} &= -a_m \psi_{1mn} - \kappa b_n \psi_{2mn}, & M_{22mn} &= -\kappa a_m \psi_{1mn} - b_n \psi_{2mn}, \\ M_{12mn} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} a_m \psi_{2mn} + \gamma_{\alpha-}^{-2} b_n \psi_{1mn} - 2\alpha \varphi_{3mn}, \\ M_{21mn} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} b_n \psi_{1mn} + \gamma_{\alpha-}^{-2} a_m \psi_{2mn} + 2\alpha \varphi_{3mn}, \\ T_{13mn} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{1mn} + \gamma_{\alpha+}^{-2} a_m w_{mn} + 2\alpha \omega_{2mn}, \\ T_{23mn} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{2mn} + \gamma_{\alpha+}^{-2} b_n w_{mn} - 2\alpha \omega_{1mn}, \\ T_{31mn} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{1mn} + \gamma_{\alpha-}^{-2} a_m w_{mn} - 2\alpha \omega_{2mn}, \\ T_{32mn} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{2mn} + \gamma_{\alpha-}^{-2} b_n w_{mn} + 2\alpha \omega_{1mn}, \\ R_{11mn} &= \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 a_m \omega_{1mn} + \eta_2 b_n \omega_{2mn} + \eta_2 \varphi_{3mn}, \\ R_{22mn} &= \eta_2 a_m \omega_{1mn} + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 b_n \omega_{2mn} + \eta_2 \varphi_{3mn}, \\ R_{12mn} &= -a_m \omega_{2mn} - \eta b_n \omega_{1mn}, & R_{21mn} &= -b_n \omega_{1mn} - \eta a_m \omega_{2mn}, \\ S_{13mn} &= -a_m \varphi_{3mn}, & S_{23mn} &= -b_n \varphi_{3mn}, \\ N_{\omega mn} &= \eta_2 (a_m \omega_{1mn} + b_n \omega_{2mn}) + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_{3mn}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

– $m \geq 1, n = 0$:

$$\begin{aligned}\theta_{\omega m 0} &= a_m \omega_{1m 0}, \quad M_{11m 0} = -a_m \psi_{1m 0}, \quad M_{22m 0} = -\kappa a_m \psi_{1m 0}, \\ M_{12m 0} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} a_m \psi_{2m 0} - 2\alpha \varphi_{3m 0}, \quad M_{21m 0} = \gamma_{\alpha-}^{-2} a_m \psi_{2m 0} + 2\alpha \varphi_{3m 0}, \\ T_{13m 0} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{1m 0} + \gamma_{\alpha+}^{-2} a_m w_{m 0} + 2\alpha \omega_{2m 0}, \quad T_{23m 0} = \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{2m 0} - 2\alpha \omega_{1m 0}, \\ T_{31m 0} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{1m 0} + \gamma_{\alpha-}^{-2} a_m w_{m 0} - 2\alpha \omega_{2m 0}, \quad T_{32m 0} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{2m 0} + 2\alpha \omega_{1m 0}, \\ R_{11m 0} &= \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 a_m \omega_{1m 0} + \eta_2 \varphi_{3m 0}, \quad R_{22m 0} = \eta_2 a_m \omega_{1m 0} + \eta_2 \varphi_{3m 0}, \\ R_{12m 0} &= -a_m \omega_{2m 0}, \quad R_{21m 0} = -\eta a_m \omega_{2m 0}, \quad S_{13m n} = -a_m \varphi_{3m n}, \\ N_{\omega m 0} &= \eta_2 a_m \omega_{1m 0} + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_{3m 0}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

– $m = 0, n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\theta_{\omega 0 n} &= b_n \omega_{20 n}, \quad M_{110 n} = -\kappa b_n \psi_{20 n}, \quad M_{220 n} = -b_n \psi_{20 n}, \\ M_{120 n} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} b_n \psi_{10 n} - 2\alpha \varphi_{30 n}, \quad M_{210 n} = \gamma_{\alpha+}^{-2} b_n \psi_{10 n} + 2\alpha \varphi_{30 n}, \\ T_{130 n} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{10 n} + 2\alpha \omega_{20 n}, \quad T_{230 n} = \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{20 n} + \gamma_{\alpha+}^{-2} b_n w_{0 n} - 2\alpha \omega_{10 n}, \\ T_{310 n} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{10 n} - 2\alpha \omega_{20 n}, \quad T_{320 n} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{20 n} + \gamma_{\alpha-}^{-2} b_n w_{0 n} + 2\alpha \omega_{10 n}, \\ R_{110 n} &= \eta_2 b_n \omega_{20 n} + \eta_2 \varphi_{30 n}, \quad R_{220 n} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 b_n \omega_{20 n} + \eta_2 \varphi_{30 n}, \\ R_{120 n} &= -\eta b_n \omega_{10 n}, \quad R_{210 n} = -b_n \omega_{10 n}, \quad S_{23m n} = -b_n \varphi_{30 n}, \\ N_{\omega 0 n} &= \eta_2 b_n \omega_{20 n} + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_{30 n}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

– $m = n = 0$:

$$\begin{aligned}M_{1200} &= -M_{2100} = -2\alpha \varphi_{300}, \quad T_{1300} = \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{100} 2\alpha \omega_{200}, \\ T_{2300} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_{200} - 2\alpha \omega_{100}, \quad T_{3100} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{100} - 2\alpha \omega_{200}, \\ T_{3200} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{200} + 2\alpha \omega_{100}, \quad R_{1100} = \eta_2 \varphi_{300}, \\ R_{2200} &= \eta_2 \varphi_{300}, \quad N_{\omega 00} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_{300}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Из (2.1) и (2.3) вытекает, что граничные условия (1.3) выполняются.

Система уравнений для определения коэффициентов рядов выводится путем подстановки выражений (1.1), предварительно разложив правые части уравнений в соответствующие функциональные ряды:

$$\begin{aligned}p &= \sum_{m,n=1}^{\infty} p_{mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \\ \tilde{m}_{M1} &= \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{m}_{M1m0} \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \tilde{m}_{M1mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \\ \tilde{m}_{M2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}_{M20n} \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \tilde{m}_{M2mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \\ \tilde{m}_{2M} &= \tilde{m}_{2M00} + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{m}_{2Mm0} \cos a_m x_1 + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}_{2M0n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \tilde{m}_{2Mmn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\ m_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} m_{10n}(\tau) \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} m_{1mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \\ m_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} m_{2m0}(\tau) \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} m_{2mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Из (1.1) получаем систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений – при $m, n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{X}}_{mn}^{(6)} &= \mathbf{A}_{mn}^{(6)} \mathbf{X}_{mn}^{(6)} + \mathbf{B}_{mn}^{(6)}, \\ \mathbf{A}_{mn}^{(6)} &= (a_{mnij})_{6 \times 6}, \mathbf{X}_{mn}^{(6)} = (w_{mn}, \omega_{1mn}, \omega_{2mn}, \varphi_{3mn}, \psi_{1mn}, \psi_{2mn})^T, \\ \mathbf{B}_{mn}^{(6)} &= (p_{mn}, \tilde{m}_{M1mn}, \tilde{m}_{M2mn}, \tilde{m}_{2M}, m_1, m_2)^T,\end{aligned}\quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned}a_{mn11} &= -\gamma_{\alpha+}^{-2} (a_m^2 + b_n^2), \quad a_{mn12} = -2\alpha b_n, \quad a_{mn13} = 2\alpha a_m, \\ a_{mn14} &= 0, \quad a_{mn15} = -\gamma_{\alpha-}^{-2} a_m, \quad a_{mn16} = -\gamma_{\alpha-}^{-2} b_n; \\ a_{mn21} &= 2\alpha v b_m, \quad a_{mn22} = -(\gamma_0^{-2} a_m^2 + \gamma_2^{-2} b_n^2 + 4\alpha v), \quad a_{mn23} = a_{mn32} = -c_{02} a_m b_n, \\ a_{mn24} &= -\gamma_3^{-2} a_m, \quad a_{mn25} = 0, \quad a_{mn26} = -2\alpha v; \\ a_{mn31} &= -2\alpha v a_m, \quad a_{mn33} = -(\gamma_2^{-2} a_m^2 + \gamma_0^{-2} b_n^2 + 4\alpha v), \\ a_{mn34} &= -\gamma_3^{-2} b_n, \quad a_{mn35} = 2\alpha v, \quad a_{mn36} = 0; \\ a_{mn41} &= 0, \quad a_{mn42} = -r^{-2} \gamma_3^{-2} a_m, \quad a_{mn43} = -r^{-2} \gamma_3^{-2} b_n, \\ a_{mn44} &= -[4\alpha v + \gamma_2^{-2} (a_m^2 + b_n^2) + r^{-2} \gamma_0^{-2}], \quad a_{mn45} = -2\alpha v b_n, \quad a_{mn46} = 2\alpha v a_m; \\ a_{mn51} &= -r^{-2} \gamma_{\alpha-}^{-2} a_m, \quad a_{mn52} = 0, \quad a_{mn53} = -r^{-2} 2\alpha, \\ a_{mn54} &= -2\alpha b_n, \quad a_{mn55} = -[a_m^2 + \gamma_{\alpha+}^{-2} (b_n^2 + r^{-2})], \quad a_{mn56} = -c_{\alpha+} a_m b_n; \\ a_{mn61} &= -r^{-2} \gamma_{\alpha-}^{-2} b_n, \quad a_{mn62} = -r^{-2} 2\alpha, \quad a_{mn63} = 0, \\ a_{mn64} &= 2\alpha a_m, \quad a_{mn65} = -c_{\alpha+} a_m, \quad a_{mn66} = -[b_n^2 + \gamma_{\alpha+}^{-2} (a_m^2 + r^{-2})].\end{aligned}\quad (2.10)$$

– при $m \geq 1, n = 0$:

$$\begin{aligned}\ddot{\omega}_{1m0} &= a_{m022} \omega_{1m0} + a_{m024} \varphi_{3m0} + a_{m026} \psi_{2m0} + \tilde{m}_{M1}; \\ a_{m022} &= -(\gamma_0^{-2} a_m^2 + 4\alpha v), \quad a_{m024} = -\gamma_3^{-2} a_m, \quad a_{m026} = -2\alpha v; \\ \ddot{\varphi}_{3m0} &= a_{m042} \omega_{1m0} + a_{m044} \varphi_{3m0} + a_{m046} \psi_{2m0} + \tilde{m}_{M2m0}; \\ a_{m042} &= -r^{-2} \gamma_3^{-2} a_m, \quad a_{m044} = -[4\alpha v + \gamma_2^{-2} a_m^2 + r^{-2} \gamma_0^{-2}], \quad a_{m046} = 2\alpha v a_m; \\ \ddot{\psi}_{2m0} &= a_{m062} \omega_{1m0} + a_{m064} \varphi_{3m0} + a_{m066} \psi_{2m0} + m_1; \\ a_{m062} &= -r^{-2} 2\alpha, \quad a_{m064} = 2\alpha a_m, \quad a_{m066} = -[\gamma_{\alpha+}^{-2} (a_m^2 + r^{-2})].\end{aligned}\quad (2.11)$$

– при $m = 0, n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\ddot{\omega}_{20n} &= a_{0n33} \omega_{20n} + a_{0n34} \varphi_{30n} + a_{0n35} \psi_{10n} + \tilde{m}_{M2}; \\ a_{0n33} &= -(\gamma_0^{-2} b_n^2 + 4\alpha v), \quad a_{0n34} = -\gamma_3^{-2} b_n, \quad a_{0n35} = 2\alpha v; \\ \ddot{\varphi}_{30n} &= a_{0n43} \omega_{20n} + a_{0n44} \varphi_{30n} + a_{0n45} \psi_{10n} + \tilde{m}_{M2mn}; \\ a_{0n43} &= -r^{-2} \gamma_3^{-2} b_n, \quad a_{0n44} = -[4\alpha v + \gamma_2^{-2} b_n^2 + r^{-2} \gamma_0^{-2}], \quad a_{0n45} = -2\alpha v b_n, \\ \ddot{\psi}_{10n} &= a_{0n53} \omega_{20n} + a_{0n54} \varphi_{30n} + a_{0n55} \psi_{10n} + m_1; \\ a_{0n53} &= -r^{-2} 2\alpha, \quad a_{0n54} = -2\alpha b_n, \quad a_{0n55} = -[\gamma_{\alpha+}^{-2} (b_n^2 + r^{-2})].\end{aligned}\quad (2.12)$$

– при $m, n = 0$:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_{300} &= a_{0066} \varphi_{300} + \tilde{m}_{2M}, \quad a_{0066} = -(r^{-2} \gamma_0^{-2} + 4\alpha v), \\ \ddot{\psi}_{100} &= a_{0043} \omega_{200} + a_{0044} \psi_{100} + m_1, \quad a_{0043} = r^{-2} 2\alpha, \quad a_{0044} = -r^{-2} \gamma_{\alpha+}^{-2}, \\ \ddot{\psi}_{200} &= a_{0052} \omega_{100} + a_{0055} \psi_{200} + m_2, \quad a_{0052} = -r^{-2} 2\alpha, \quad a_{0055} = -r^{-2} \gamma_{\alpha+}^{-2}.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Эти уравнения совместно с дополнением к (1.4) равенств

$$\varphi_{3mn}|_{\tau=0} = \dot{\varphi}_{3mn}|_{\tau=0} = \psi_{1mn}|_{\tau=0} = \dot{\psi}_{1mn}|_{\tau=0} = \psi_{2mn}|_{\tau=0} = \dot{\psi}_{2mn}|_{\tau=0} = 0. \quad (2.14)$$

образует задачи Коши

Задачи, соответствующие уравнениям (2.11)–(2.13), решаются достаточно просто. К начальным условиям (2.9), (2.10), (2.14) используется подход, аналогичный описанному в [15]. В результате получаем

$$\mathbf{X}_{mn}^{(6)L}(s) = -\left(\mathbf{A}_{mn}^{(6)} - \mathbf{E}s^2\right)^{-1} \mathbf{B}_{mn}^{(6)}.$$

$$\mathbf{X}_{mn}^{(6)}(\tau) = \sum_{k=1}^6 \operatorname{Res}_{s=s_k} \mathbf{X}_{mn}^{(6)L} e^{s\tau},$$

где s_k — нули знаменателя

3. Пример

Для примера рассмотрим сосредоточенную в точке (x_{10}, x_{20}) , где $0 < x_{10} < a$, $0 < x_{20} < b$, и нагрузку следующего вида

$$p = \delta(x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}) H(\tau), \quad m_1 = m_2 = \tilde{m}_{M1} = \tilde{m}_{M2} = \tilde{m}_{2M} = 0. \quad (3.1)$$

где $\delta(x_1, x_2)$ и $H(\tau)$ — дельта-функция Дирака и функция Хевисайда [6, 16].

Ей соответствуют следующие коэффициенты рядов (2.4)–(2.7) [16]:

$$\begin{aligned} p_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \delta(x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}) H(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2 dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{4}{ab} H(\tau) \sin a_m x_{10} \sin b_n x_{20}, \quad m_1 = m_2 = \tilde{m}_{M1} = \tilde{m}_{M2} = \tilde{m}_{2M} = 0. \end{aligned}$$

При этих условиях начальные задачи, соответствующие уравнениям (2.11)–(2.13), однородные. Поэтому решения соответствующих начальных задач тривиальные

$$\omega_{1m0} = \varphi_{3m0} = \psi_{2m0} \equiv 0 \quad (m \geq 1), \quad \omega_{20n} = \varphi_{30n} = \psi_{10n} \equiv 0 \quad (n \geq 1).$$

Будем полагать, что материал — композит со следующими физическими характеристиками [7, 13]:

$$\begin{aligned} \lambda &= 7,59 \text{ ГПа}; \quad \mu = 1,89 \text{ ГПа}; \quad \alpha = 7,45 \text{ МПа}; \quad \gamma + \varepsilon = 2,64 \text{ кН}; \\ J &= 0,429 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}; \quad c_1 = 2,28 \cdot 10^3 \text{ м/с}; \quad c_2 = 9,29 \cdot 10^2 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Плотность материала, скорости c_3 , c_4 и необходимые в этой главе безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} \rho &= \mu/c_2^2 = 2,19 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad \beta + 2\gamma = 2,65 \text{ кН}, \quad \gamma = 0,440 \text{ кН}; \quad \beta = 1,77 \text{ кН}, \\ \varepsilon &= 2,20 \text{ кН}; \quad \gamma - \varepsilon = -1,76 \text{ кН}; \quad c_3 = 2,48 \cdot 10^3 \text{ м/с}; \quad c_4 = 2,485 \cdot 10^3 \text{ м/с}; \\ \gamma_1 &= 2,45; \quad \gamma_2 = 0,919; \quad \gamma_3 = 1,20; \quad \gamma_0 = 0,917; \quad \alpha = 0,66 \cdot 10^{-3}; \\ v &= 5,1 \cdot 10^6; \quad \kappa = 0,668; \quad \eta = -0,667; \quad \eta_1 = 0,167; \quad \eta_2 = 0,670. \end{aligned}$$

В качестве характерного линейного размера принимаем $L = 1$ м. Считаем, что толщина пластины $h = 0,05$ м, откуда, получаем $r^2 = 0,208 \cdot 10^{-3}$. В расчетах полагаем, что пластина квадратная: $a = b = 1$, а нагрузка приложена в ее центре: $x_{10} = x_{20} = 1/2$. При этом коэффициенты p_{mn} в (3.1) определяются так:

$$p_{mn} = 4H(\tau) \begin{cases} 0 & \text{при } m = 2k \text{ или } n = 2l, \\ (-1)^k (-1)^l & \text{при } m = 2k + 1 \text{ и } n = 2l + 1. \end{cases}$$

Ряды (2.1), (2.2) вида

$$f(x_1, x_2, \tau) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}(x_1, x_2, \tau)$$

заменяются частичными суммами

$$S_N(x_1, x_2, \tau) = \sum_{m,n=1}^N f_{mn}(x_1, x_2, \tau).$$

Погрешность приближенного равенства $f \approx S_N$ оценивается следующими величинами:

– при фиксированных x_1 и x_2 :

$$\varepsilon = \frac{\|f_{N+1,N+1}(x_1, x_2, \tau)\|_{\tau}}{\|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_{\tau}}, \quad \|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_{\tau} = \max_{\tau \in [0, T]} |S_N(x_1, x_2, \tau)|;$$

– при фиксированных x_2 и τ :

$$\varepsilon = \frac{\|f_{N+1,N+1}(x_1, x_2, \tau)\|_1}{\|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_1}, \quad \|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_1 = \max_{x_1 \in [0, 1]} |S_N(x_1, x_2, \tau)|;$$

– при фиксированных x_1 и τ :

$$\varepsilon = \frac{\|f_{N+1,N+1}(x_1, x_2, \tau)\|_2}{\|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_2}, \quad \|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_2 = \max_{x_2 \in [0, 1]} |S_N(x_1, x_2, \tau)|,$$

где величина T определяет рассматриваемый диапазон изменения времени.

На рис. 1–12 приведены зависимости прогиба w , углов поворота ω_1, ω_2 , векторы углов поворота нормального волокна ψ_1, ψ_2 и величины φ_3 от координат x_1, x_2 и времени соответственно при различных значениях τ и x_1, x_2 . Во всех вариантах погрешность ε составляла менее 5 % при $N = 30$.

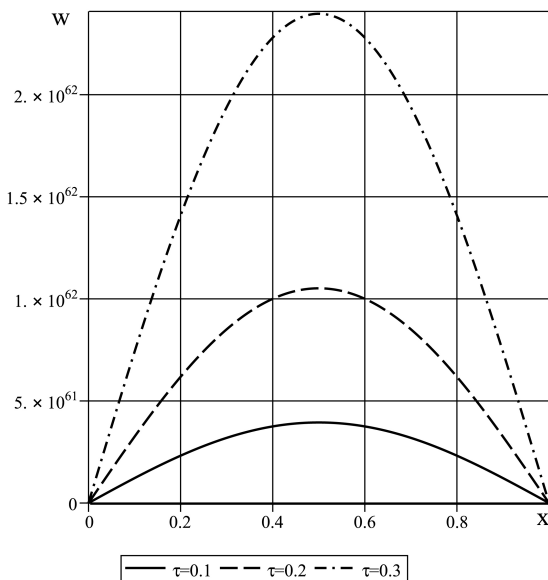


Рис. 1. Зависимость прогиба w от времени τ

Fig. 1. Dependence of deflection w on time τ

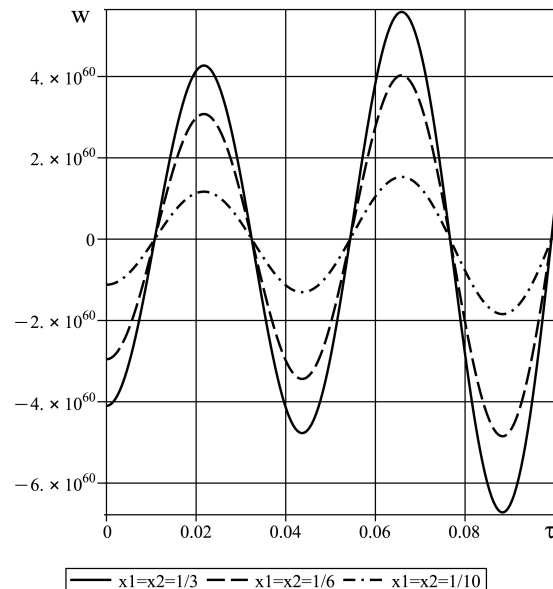


Рис. 2. Зависимость прогиба w от координат x_1, x_2

Fig. 2. Dependence of deflection w on coordinates x_1, x_2

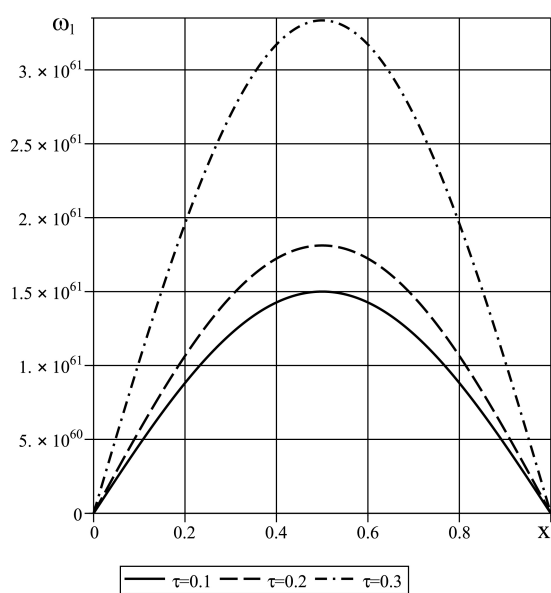


Рис. 3. Зависимость ω_1 от времени τ
Fig. 3. Dependence of ω_1 on time τ

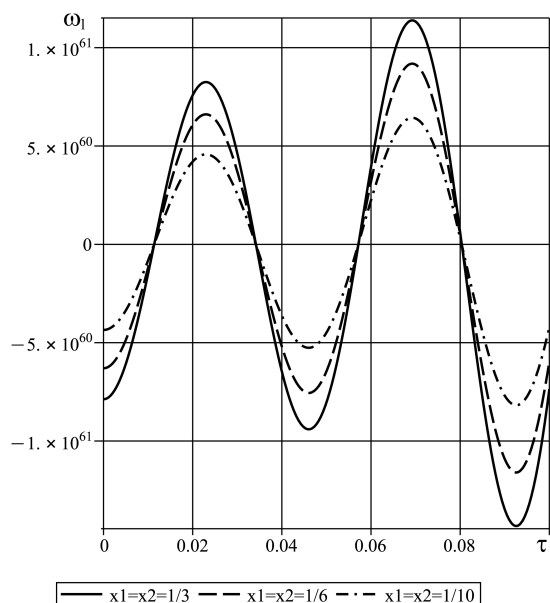


Рис. 4. Зависимость ω_1 от координат x_1, x_2
Fig. 4. Dependence of ω_1 on coordinates x_1, x_2

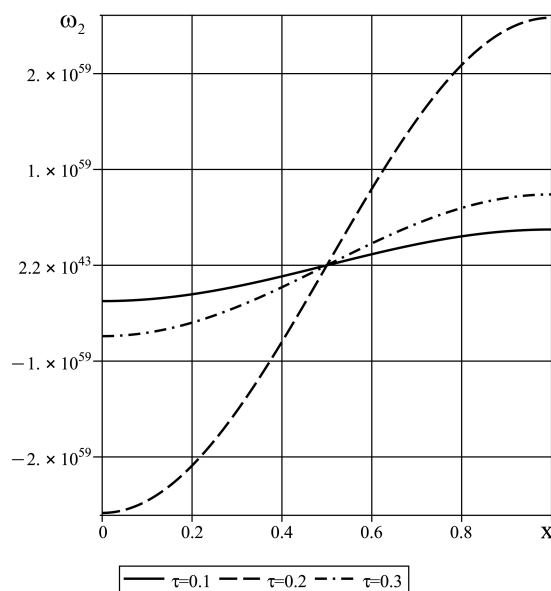


Рис. 5. Зависимость ω_2 от времени τ
Fig. 5. Dependence of ω_2 on time τ

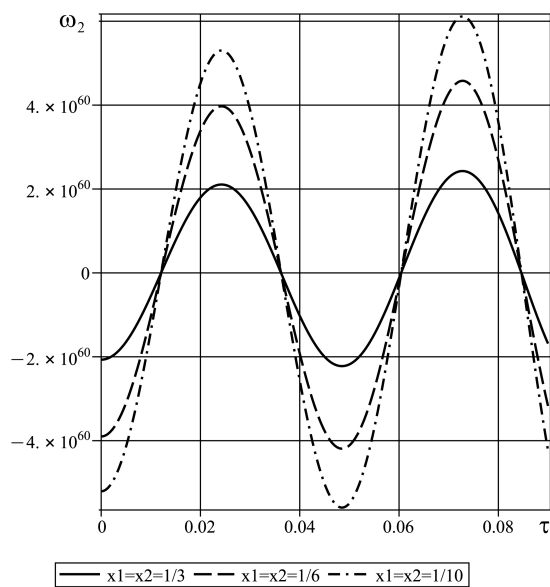


Рис. 6. Зависимость ω_2 от координат x_1, x_2
Fig. 6. Dependence of ω_2 on coordinates x_1, x_2

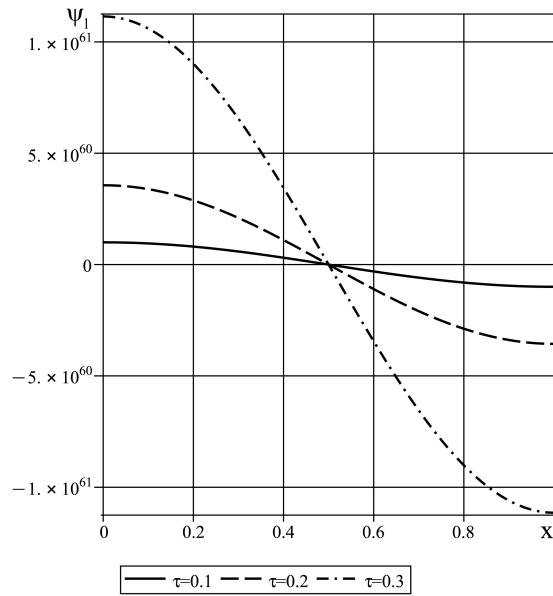


Рис. 7. Зависимость ψ_1 от времени τ
Fig. 7. Dependence of ψ_1 on time τ

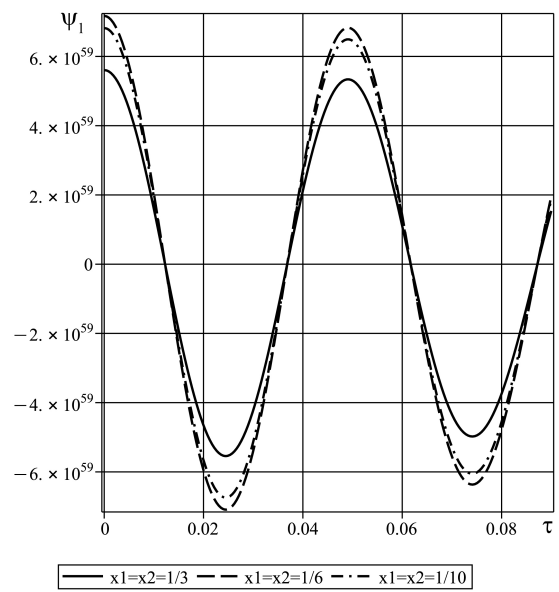


Рис. 8. Зависимость ψ_1 от координат x_1, x_2
Fig. 8. Dependence of ψ_1 on coordinates x_1, x_2

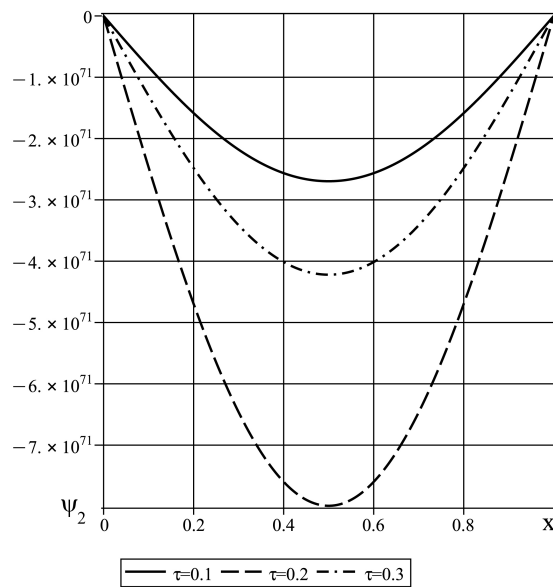


Рис. 9. Зависимость ψ_2 от времени τ
Fig. 9. Dependence of ψ_2 on time τ

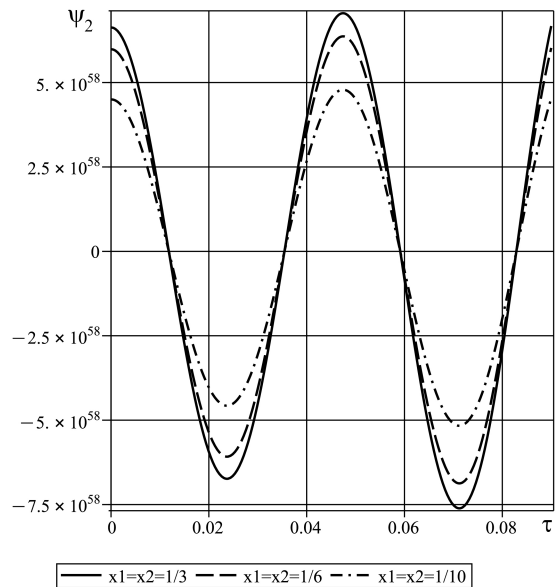


Рис. 10. Зависимость ψ_2 от координат x_1, x_2
Fig. 10. Dependence of ψ_2 on coordinates x_1, x_2

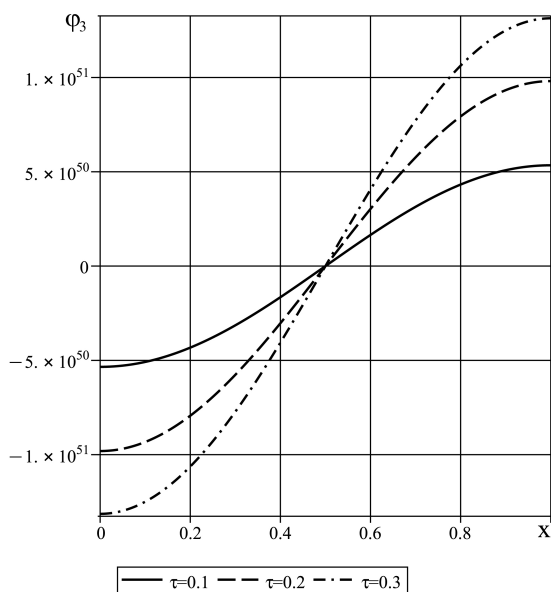


Рис. 11. Зависимость φ_3 от времени τ

Fig. 11. Зависимость φ_3 от времени τ

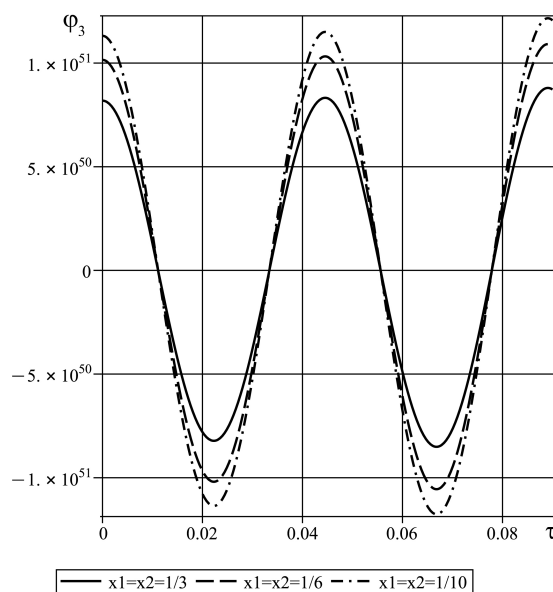


Рис. 12. Зависимость φ_3 от координат x_1, x_2

Fig. 12. Dependence of φ_3 on coordinates x_1, x_2

Заключение

В настоящем исследовании разработана обобщённая модель динамического изгиба прямоугольной упругой пластины с шарнирными граничными условиями. Проведённое сопоставление расчётных данных из работ [15,17] с результатами п. 3 демонстрирует качественное совпадение графических зависимостей. Наблюдаемые количественные расхождения обусловлены различиями в математических моделях, использованных в указанных разделах, что является вполне естественным с позиций механики деформируемого твердого тела. Полученные результаты имеют строгое теоретическое обоснование.

Разработанная методика позволяет эффективно находить решение поставленной задачи. Проведенные численные эксперименты для случая нормальной нагрузки, изменяющейся согласно функции Хевисайда, подтвердили высокую точность метода и его перспективность для исследования динамических процессов в упругих пластинах. Данный подход представляет значительный интерес для инженерных приложений, в частности для авиакосмической промышленности и машиностроения, где особое значение приобретает точный расчет динамических параметров конструкций.

Литература [References]

1. Лай, Тхань Туан, Тарлаковский, Д.В., Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера. *Труды МАИ*, 2012, № 53. [Lai, Thanh Tuan, Tarlavovsky, D.V. Propagation of nonstationary axisymmetric disturbances from the surface of a sphere filled with a Cosserat pseudo-elastic medium. *Trudy MAI = Proc. of MAI*, 2012, no. 53. (in Russian)] URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29267>
2. Горшков, А.Г., Медведский, А.Л., Рабинский, Л.Н., Тарлаковский, Д.В., *Волны в сплошных средах*. Москва, Физматлит, 2004. [Gorshkov, A.G., Medvedsky, A.L., Rabinsky, L.N., Tarlavovsky, D.V., *Volny v sploshnykh sredakh = Waves in Continuous Media*. Moscow, Fizmatlit, 2004. (in Russian)]
3. Quoc, Chien Mai, Ryazantseva, M.Yu., Tarlavovskii, D.V., Generalized Linear Model of Dynamics of Elastic Moment Shells. In *Advanced Structured Materials, vol. 186: Deformation and Destruction of Materials and Structures Under Quasi-static and Impulse Loading*. Springer Nature Switzerland AG, 2020, pp. 273–293. DOI: [10.1007/978-3-031-22093-7_11](https://doi.org/10.1007/978-3-031-22093-7_11)

4. Михайлова, Е.Ю., Тарлаковский, Д.В., Федотенков, Г.В., Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек. *Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки*, 2018, т. 160, кн. 3, с. 561–577. [Mikhaylova, E.Yu., Tarlakovsky, D.V., Fedotenkov, G.V., Generalized linear model of dynamics of thin elastic shells. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskije nauki = Scientific Notes of Kazan University. Series Physics and Mathematics*, 2018, vol. 160, book 3, pp. 561–577. (in Russian)] EDN: YZSUDR
5. Левицкий, Д.Ю., Федотенков, Г.В., Нестационарное деформированное состояние пластины Тимошенко. *Труды МАИ*, 2022, № 125. [Levitsky, D.Yu., Fedotenkov, G.V., Nonstationary deformed state of the Timoshenko plate. *Trudy MAI = Proc. of MAI*, 2022, no. 125]. DOI: [10.34759/trd-2022-125-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-125-05)
6. Михайлова, Е.Ю., Тарлаковский, Д.В., Федотенков, Г.В., *Упругие пластины и пологие оболочки*. Москва, Изд-во МАИ, 2018. [Mikhaylova, E.Yu., Tarlakovsky, D.V., Fedotenkov, G.V., *Uprugie plastiny i pologie obolochki = Elastic Plates and Shallow Shells*. Moscow, MAI Publishing, 2018. (in Russian)]
7. Михайлова, Е.Ю., Тарлаковский, Д.В., Федотенков, Г.В., *Общая теория упругих оболочек*. Москва, Изд-во МАИ, 2018. [Mikhaylova, E.Yu., Tarlakovsky, D.V., Fedotenkov, G.V., *Obshchaya teoriya uprugikh obolochek = General Theory of Elastic Shells*. Moscow, MAI Publishing, 2018. (in Russian)]
8. Нгуен, Нгок Хоа, Тарлаковский, Д.В., Нестационарные поверхностные функции влияния для упруго-пористой полуплоскости. *Труды МАИ*, 2012, № 53. [Nguyen, Ngoc Hoa, Tarlakovsky, D.V., Nonstationary surface influence functions for an elastic-porous half-plane. *Trudy MAI = Proc. of MAI*, 2012, no. 53. (in Russian)] URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29269>
9. Чан, Ле Тхай, Тарлаковский, Д.В., Моментно упругая полуплоскость под действием поверхностных нестационарных нормальных перемещений. *Труды МАИ*, 2018, № 102. [Tran, Le Thai, Tarlakovsky, D.V., Moment elastic half-plane under the action of nonstationary surface normal displacements. *Trudy MAI = Proc. of MAI*, 2018, no. 102. (in Russian)] URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=99731>
10. Нгуен, Тхань Тунг, Тарлаковский, Д.В., Антиплоское нестационарное движение электромагнитно-упругого полупространства с учетом пьезоэлектрических эффектов. *Труды МАИ*, 2019, № 105. [Nguyen, Thanh Tung, Tarlakovsky, D.V., Antiplane nonstationary motion of an electromagnetic elastic half-space considering piezoelectric effects. *Trudy MAI = Proc. of MAI*, 2019, no. 105. (in Russian)] URL: <https://mai.ru/publications/index.php?ID=104123>
11. До, Нгок Дат, Тарлаковский, Д.В., Нестационарный изгиб шарнирно опертой моментной упругой прямоугольной пластины – простейшая модель. В *Матер. XXIX Междунар. симпоз. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 1*. Москва, ООО «ТРП», 2023, с. 102. [Do, Ngoc Dat, Tarlakovsky, D.V., Unsteady bending of a hinged moment elastic rectangular plate - the simplest model. In *Materialy XXIX Mezhdunarodnyy simpozium “Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruksiy i sploshnykh sred” im. A.G. Gorshkova. T. 1 = Proc. XXIX Int. symposium “Dynamic and technological problems of mechanics of structures and continuous media” named after A.G. Gorshkov. Vol. 1*. Moscow, “TRP” Ltd., 2023, p. 102. (in Russian)] EDN: STXKTM
12. До, Нгок Дат, Тарлаковский, Д.В., Изгиб шарнирно опертой моментной упругой прямоугольной пластины при использовании двух упрощающих гипотез под действием нестационарной нагрузки. В *Матер. Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 70-летию БелИИЖТа «Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов». Ч. 2*. Гомель, БелГУТ, 2023, с. 156–158. [Do, Ngoc Dat, Tarlakovsky, D.V., Bending of a hinged moment elastic rectangular plate using two simplifying hypotheses under the action of a non-stationary load. In *Materialy Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, posvyashch. 70-letiyu BelIIZhTa «Innovatsionnoe razvitie transportnogo i stroitel'nogo kompleksov». Ch. 2 = Proc. Int. scientific-practical. conf., dedicated to the 70th anniversary of BelSUT “Innovative development of transport and construction complexes”. Pt. 2*. Gomel, BelSUT, 2023, pp. 156–158. (in Russian)] URL: <http://elib.bsut.by/handle/123456789/9163?show=full>
13. Михайлова, Е.Ю., Тарлаковский, Д.В., Федотенков, Г.В., *Упругие пластины и пологие оболочки*. Москва, Изд-во МАИ, 2018. [Mikhaylova, E.Yu., Tarlakovsky, D.V., Fedotenkov, G.V., *Uprugie plastiny i pologie obolochki = Elastic plates and shallow shells*. Moscow, MAI Publishing House, 2018. (in Russian)]
14. Тарлаковский, Д.В., Фарманян, А.Ж., Гафуров, У.С., Уравнения движения изотропной сферической моментной упругой оболочки. *Проблемы прочности и пластичности*, 2024, т. 86, № 2, с. 168–181. [Tarlakovskiy, D.V., Farmanyanyan, A.Zh., Gafurov, U.S., Equations of motion of an isotropic spherical moment elastic shell. *Problemy prochnosti i plastichnosti = Problems of Strength and Plasticity*, 2024, vol. 86, no. 2, pp. 168–181. (in Russian)] DOI: [10.32326/1814-9146-2024-86-2-168-181](https://doi.org/10.32326/1814-9146-2024-86-2-168-181)
15. До, Нгок Дат, Тарлаковский, Д.В., Федотенков, Г.В., Действие поперечной нестационарной силы

- на шарнирно опертую моментную упругую прямоугольную пластину (простейшая модель). *Труды МАИ*, 2024, № 139. [Do, Ngoc Dat, Tarlakovsky, D.V., Fedotenkov, G.V., Action of transverse non-stationary force on a hinged moment elastic rectangular plate (the simplest model). *Trudy MAI = Proc. of MAI*, 2024, no. 139. (in Russian)] URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183451>
16. Оконечников, А.С., Тарлаковский, Д.В., Федотенков, Г.В., *Обобщенные функции в механике деформируемого твердого тела. Интегральные преобразования и дифференциальные уравнения*. Москва, Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2019. [Okonechnikov, A.S., Tarlakovsky, D.V., Fedotenkov, G.V., *Obobshchennye funktsii v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela. Integral'nye preobrazovaniya i differentsial'nye uravneniya = Generalized Functions in the Mechanics of Deformable Solids. Integral Transforms and Differential Equations*. Moscow, MAI-PRINT Publishing, 2019. (in Russian)]
17. До, Нгок Дат, Тарлаковский, Д.В., Нестационарный изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластины (усложненные модели). *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2025, т. 25, № 3, с. 29–49. [Do, Ngoc Dat, Tarlakovsky, D.V., Unsteady bending of a hinged rectangular plate (complicated models). *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 25, no. 3, pp. 29–49 (in Russian)]. DOI: [10.31429/vestnik-22-1-29-49](https://doi.org/10.31429/vestnik-22-1-29-49)