

УДК 539.3

EDN: PHODJ DOI: 10.31429/vestnik-22-3-43-50

## Влияние кинетической энергии вращения поперечного сечения балки при изгибе на дисперсионные характеристики гармонических волн

И. С. Царев  

Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального исследовательского центра Института прикладной физики им. А.В. Гапонова–Грехова РАН, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46, 603950, Россия  
✉ Царев Иван Сергеевич; ORCID 0009-0009-8589-0367; e-mail: [tsarev\\_ivan97@mail.ru](mailto:tsarev_ivan97@mail.ru)

**Аннотация.** Рассматривается влияние кинетической энергии вращения поперечного сечения балки на дисперсионные характеристики гармонических изгибных волн в контексте модели Релея. Исследование проводится для балки, расположенной на обобщённом упругом основании с учётом его вертикальной и горизонтальной жесткостей (основание модели Пастернака). Вычисляется дисперсионное соотношение, а также выражения для фазовой и групповой скоростей распространения волн. Оценивается влияние учета инерции на дисперсионную кривую. Выполняется сравнение модели Релея с моделью Бернулли–Эйлера. Полученные результаты показывают целесообразность использования модели Релея в задачах, где важно учитывать дополнительные инерционные эффекты.

**Ключевые слова:** балка модели Релея, поворот поперечного сечения при изгибе, упругое основание модели Пастернака, гармоническая волна, дисперсия.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках государственного задания на проведение фундаментальных научных исследований на 2024–2026 гг. (FFUF-2024-0031, № НИОКТР 1023032800130-3-2.3.2).

**Цитирование:** Царев И. С. Влияние кинетической энергии вращения поперечного сечения балки при изгибе на дисперсионные характеристики гармонических волн // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 3. С. 43–50. EDN: PHODJ. DOI: 10.31429/vestnik-22-3-43-50

Поступила 31 мая 2025 г. После доработки 12 июля 2025 г. Принято 5 августа 2025 г. Публикация 22 сентября 2025 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2025. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## The Influence of the Kinetic Energy of Rotation of the Beam Cross Section During Bending on the Dispersion Characteristics of Harmonic Waves

I. S. Tsarev  

Mechanical engineering research institute of Russian Academy of Sciences – branch of Federal Research Center A.V. Gaponov–Grekhov Institute of applied physics of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Ulyanova st., 46, 603950, Russia

✉ Ivan S. Tsarev; ORCID 0009-0009-8589-0367; e-mail: [tsarev\\_ivan97@mail.ru](mailto:tsarev_ivan97@mail.ru)

**Abstract.** The influence of the kinetic energy of rotation of the beam cross-section on the dispersion characteristics of harmonic flexural waves in the context of the Rayleigh model is considered. The study is carried out for a beam located on a generalized elastic foundation taking into account its vertical and horizontal rigidities (the foundation of the Pasternak model). The dispersion relation, as well as expressions for the phase and group velocities of wave propagation are calculated. The influence of inertia on the dispersion curve is estimated. The Rayleigh model is compared with the Bernoulli–Euler model. The obtained results show the feasibility of using the Rayleigh model in problems where it is important to take into account additional inertial effects.

**Keywords:** Rayleigh model beam, cross-section rotation under bending, elastic foundation of the Pasternak model, harmonic wave, dispersion.

**Funding.** The work was carried out within the state assignment to IAP RAS for fundamental scientific research for 2024–2026 (topic FFUF-2024-0031, No 1023032800130-3-2.3.2).

**Cite as:** Tsarev, I. S., The influence of the kinetic energy of rotation of the beam cross section during bending on the dispersion characteristics of harmonic waves. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 3, pp. 43–50. DOI: 10.31429/vestnik-22-3-43-50

Received 31 May 2025. Revised 12 July 2025. Accepted 5 August 2025. Published 22 September 2025.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2025. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\) license](#).

## Введение

В современных расчетах путевые структуры (например, рельсовые направляющие) часто рассматриваются как балки, лежащие на упругом основании, несущие движущуюся нагрузку [1–3]. При этом высокоскоростное движение грузов может привести, как к генерации изгибных волн в направляющей, так и к резонансу или неустойчивости движения самих грузов [4].

Точно рассчитать режимы экстремального движения, зоны резонанса и неустойчивости крайне затруднительно, если в качестве балки — рельсовой направляющей использовать математическую модель Бернулли–Эйлера, а в качестве упругого основания — математическую модель Фусса–Винклера, учитывающую его жесткость только в вертикальном направлении.

Эффективность замены в расчетной модели высокоскоростного движения нагрузки по рельсовой направляющей упругого основания Фусса–Винклера на упругое основание Пастернака, учитывающего его жесткости в вертикальном и горизонтальном направлениях, продемонстрирована в работе [5]. А еще ранее уравнение динамики балки с поправкой Рэлея на двухпараметрическом основании Пастернака успешно использовалось при расчете свайного фундамента мостов на воздействие поперечных волн в сейсмостойких районах [6].

В публикуемой работе при сохранении упругого основания Пастернака гибкая направляющая моделируется не в рамках технической теории Бернулли–Эйлера, а в рамках уточненной теории Рэлея, дополнительно учитывающей кинетическую энергию поворота поперечного сечения балки при ее изгибе. Анализ влияния этого дополнительного фактора на дисперсионные характеристики изгибных волн посвящена настоящая статья.

## 1. Уравнение динамики

Уравнение изгибных колебаний балки модели Рэлея [6], лежащей на обобщенном упругом основании, имеет вид

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho J \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + h_1 w - h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $w(xt)$  — перемещение частиц срединной линии балки при изгибе,  $\rho$  — плотность материала,  $F$  — площадь поперечного сечения балки,  $E$  — модуль Юнга,  $J$  — осевой момент инерции; коэффициенты упругости  $h_1$  и  $h_2$  отображают жесткость «вертикальной» и «горизонтальной» пружин, соответственно.

Для упрощения анализа уравнения (1.1) введем безразмерные величины для перемещения, координаты и времени:

$$U = \frac{w}{w_0}; \quad z = \frac{x}{X}; \quad \tau = \frac{t}{T},$$

где  $w_0$  — максимальное поперечное перемещение, а величины  $X$  и  $T$  можно найти из соотношений между параметрами «масштаба» системы  $\frac{EJT^2}{\rho FX^4} = 1$  и  $\frac{h_1 X^4}{EJ} = 1$ . Эти параметры подобраны для упрощения анализа, удобства интерпретации результатов исследования и построения графиков:

$$U = \frac{w}{w_0}; \quad z = x \sqrt[4]{\frac{h_1}{EJ}}; \quad \tau = t \sqrt{\frac{h_1}{\rho F}}. \quad (1.2)$$

С учетом введенных обозначений уравнение (1.1) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} - \alpha_1 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^2 \partial z^2} + U - \alpha_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь  $\alpha_1 = \frac{J\sqrt{h_1}}{F\sqrt{EJ}}$  — параметр, включающий в себя коэффициент изгибной жесткости балки ( $EJ$ ) и «вертикальный» коэффициент жесткости упругого основания ( $h_1$ );  $\alpha_2 = \frac{h_2}{\sqrt{EJ}\sqrt{h_1}}$  — параметр, описывающий соотношение между коэффициентами упругости  $h_2$  и  $h_1$ .

## 2. Анализ дисперсионных характеристик изгибных волн

Исследование влияния обобщенного упругого основания на параметры изгибной волны, распространяющейся в балке, проведем с помощью уравнения (3). Его решение будем искать в виде бегущей гармонической волны

$$u = Ae^{i(\Omega\tau - Kz)} + A^*e^{-i(\Omega\tau - Kz)}. \quad (2.1)$$

Здесь  $A$  — безразмерная комплексная амплитуда,  $A^*$  — ее комплексно-сопряженная часть,  $\Omega$  — частота и  $K$  — волновое число, связанные с круговой частотой  $\omega$  и размерным волновым числом  $k$  соотношениями

$$\Omega = \frac{\sqrt{\rho FEJ}}{h_1}\omega, \quad K = \sqrt[4]{\frac{EJ}{h_1}}k. \quad (2.2)$$

Подстановка соотношения (2.1) в уравнение (1.3) приводит к дисперсионному уравнению

$$-\Omega^2 + K^4 - \alpha_1\Omega^2K^2 + 1 + \alpha_2K^2 = 0, \quad (2.3)$$

из которого определяем закон дисперсии изгибной волны

$$\Omega = \sqrt{\frac{K^4 + \alpha_2K^2 + 1}{1 + \alpha_1K^2}}. \quad (2.4)$$

Так как реальный интерес в исследовании представляют только характеристики с положительными значениями, в силу того, что отрицательная частота представляет собой лишь смещение по фазе и не приводит к изменению волновой картины, в дальнейшем будем пренебрегать решением с отрицательной частотой колебаний.

Теперь найдем фазовую и групповую скорости

$$v_\Phi = \frac{\Omega}{K} = \sqrt{\frac{K^4 + \alpha_2K^2 + 1}{K^2 + \alpha_1K^4}}, \quad (2.5)$$

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\Omega}{dK} = \frac{K(2K^2 + \alpha_1K^4 + \alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{(1 + \alpha_1K^2)^3(K^4 + \alpha_2K^2 + 1)}}. \quad (2.6)$$

Зависимости (2.4)–(2.6) приведены на рис. 1–3, соответственно. Графики построены при варьировании параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  следующим образом:

$$\alpha_1 = 0,1 \text{ или } 1; \quad \begin{cases} \alpha_2 = 0,01 — \text{сплошная линия;} \\ \alpha_2 = 0,1 — \text{пунктир;} \\ \alpha_2 = 1 — \text{точки.} \end{cases}$$

Далее покажем зависимости фазовой и групповых скоростей на одном графике, для наглядности берем два случая: а)  $\alpha_1 = 0,1$ ,  $\alpha_2 = 0,1$ ; б)  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0,1$ .

На рис. 4а, 4б можно заметить, что групповая скорость волн совпадает с фазовой скоростью в точке минимума последней. Кроме того, наблюдается совпадение этих скоростей при больших волновых числах и при доминировании «вертикального» коэффициента жесткости  $h_1$  над «горизонтальным» коэффициентом  $h_2$ . Это свидетельствует об отсутствии дисперсии в рассмотренном диапазоне (рис. 4б).

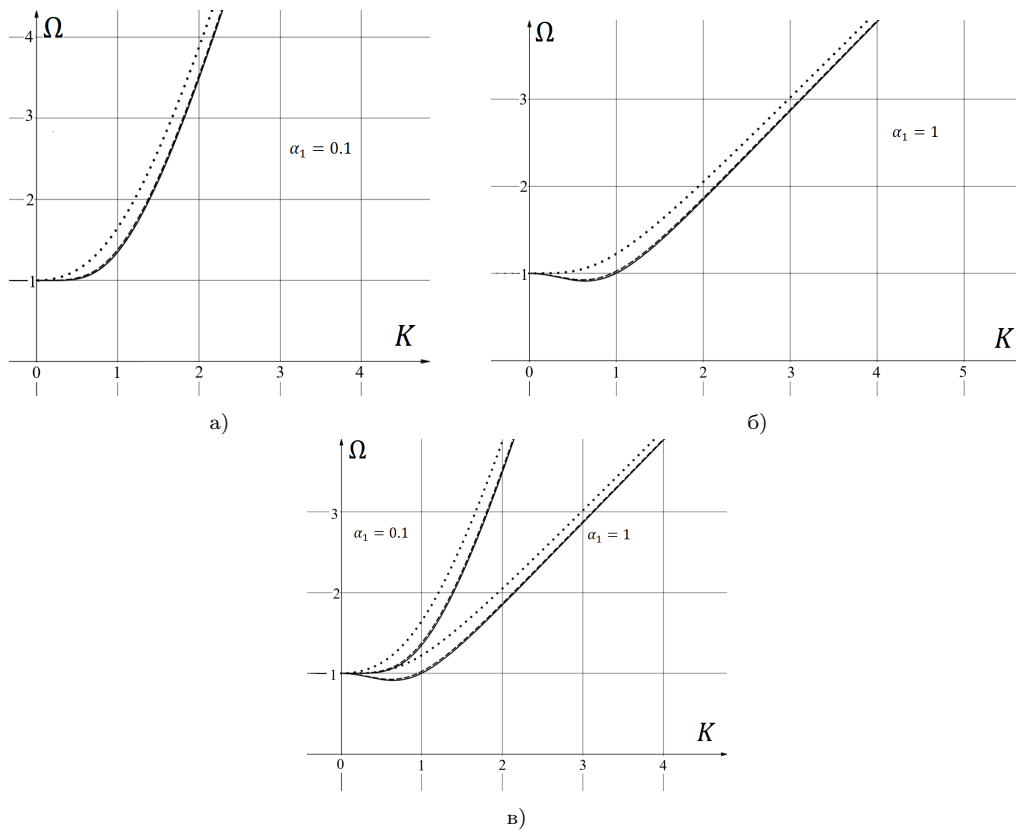


Рис. 1. Дисперсия при варьировании коэффициента  $\alpha_2$  и фиксированном коэффициенте  $\alpha_1 = 0,1$  (а) и  $\alpha_1 = 1,0$  (б), а также при больших волновых числах (в)

Fig. 1. Dispersion with varying coefficient  $\alpha_2$  and fixed coefficient  $\alpha_1 = 0,1$  (a) and  $\alpha_1 = 1,0$  (б), as well as with large wave numbers (в)

Представим асимптоты при стремлении волнового числа к бесконечности и покажем внутреннюю непротиворечивость системы.

При  $k \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}\Omega &= \sqrt{\frac{K^4 + \alpha_2 K^2 + 1}{1 + \alpha_1 K^2}} \rightarrow \frac{1}{1} \rightarrow 1; \\ \vartheta_\Phi &= \sqrt{\frac{K^4 + \alpha_2 K^2 + 1}{K^2 + \alpha_1 K^4}} \rightarrow \frac{1}{K} \rightarrow \infty; \\ \vartheta_{\text{гр}} &= \frac{K(2K^2 + \alpha_1 K^4 + \alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{(1 + \alpha_1 K^2)^3 (K^4 + \alpha_2 K^2 + 1)}} \rightarrow \frac{0}{1} \rightarrow 0.\end{aligned}$$

При  $k \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned}\Omega &= \sqrt{\frac{K^4 + \alpha_2 K^2 + 1}{1 + \alpha_1 K^2}} \rightarrow \frac{K^2}{\sqrt{\alpha_1} K} \rightarrow \infty; \\ \vartheta_\Phi &= \sqrt{\frac{K^4 + \alpha_2 K^2 + 1}{K^2 + \alpha_1 K^4}} \rightarrow \frac{K^2}{\sqrt{\alpha_1} K^2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}; \\ \vartheta_{\text{гр}} &= \frac{K(2K^2 + \alpha_1 K^4 + \alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{(1 + \alpha_1 K^2)^3 (K^4 + \alpha_2 K^2 + 1)}} \rightarrow \frac{\alpha_1 K^5}{\sqrt{\alpha_1^3 K^{10}}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}.\end{aligned}$$

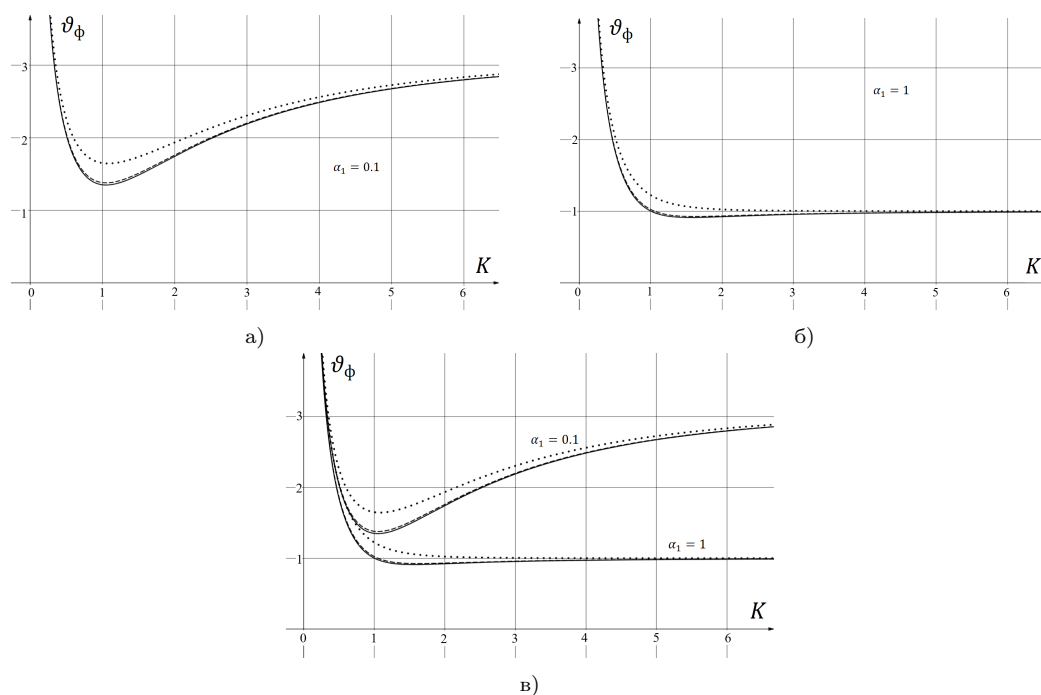


Рис. 2. Фазовая скорость в зависимости от  $\alpha_1 = 0,1$  (а),  $\alpha_1 = 1,0$  (б), а также при больших волновых числах (в)

Fig. 2. Phase velocity depending on  $\alpha_1 = 0,1$  (a),  $\alpha_1 = 1,0$  (б), and also at large wave numbers (в)

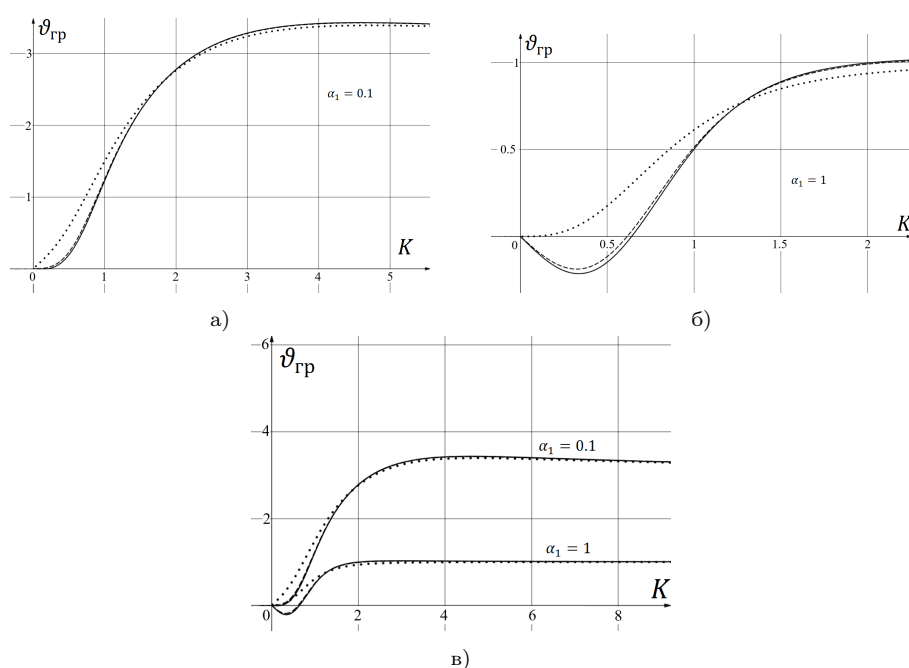


Рис. 3. Групповая скорость в зависимости от  $\alpha_1 = 0,1$  (а),  $\alpha_1 = 1,0$  (б), а также при больших волновых числах (в)

Fig. 3. Group velocity depending on  $\alpha_1 = 0,1$  (a),  $\alpha_1 = 1,0$  (б), and also at large wave numbers (в)

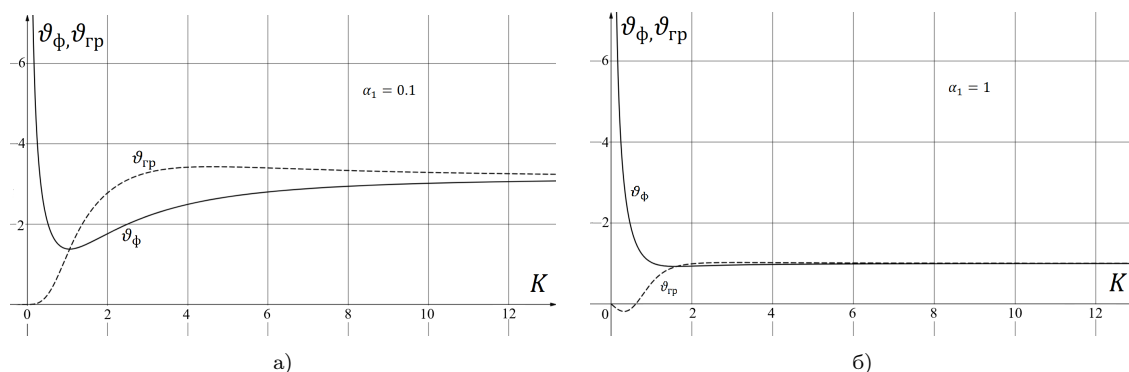


Рис. 4. Фазовая (а) и групповая (б) скорости в зависимости от волнового числа при разных параметрах основания

Fig. 4. Phase (a) and group (б) velocities depending on the wave number for different base parameters

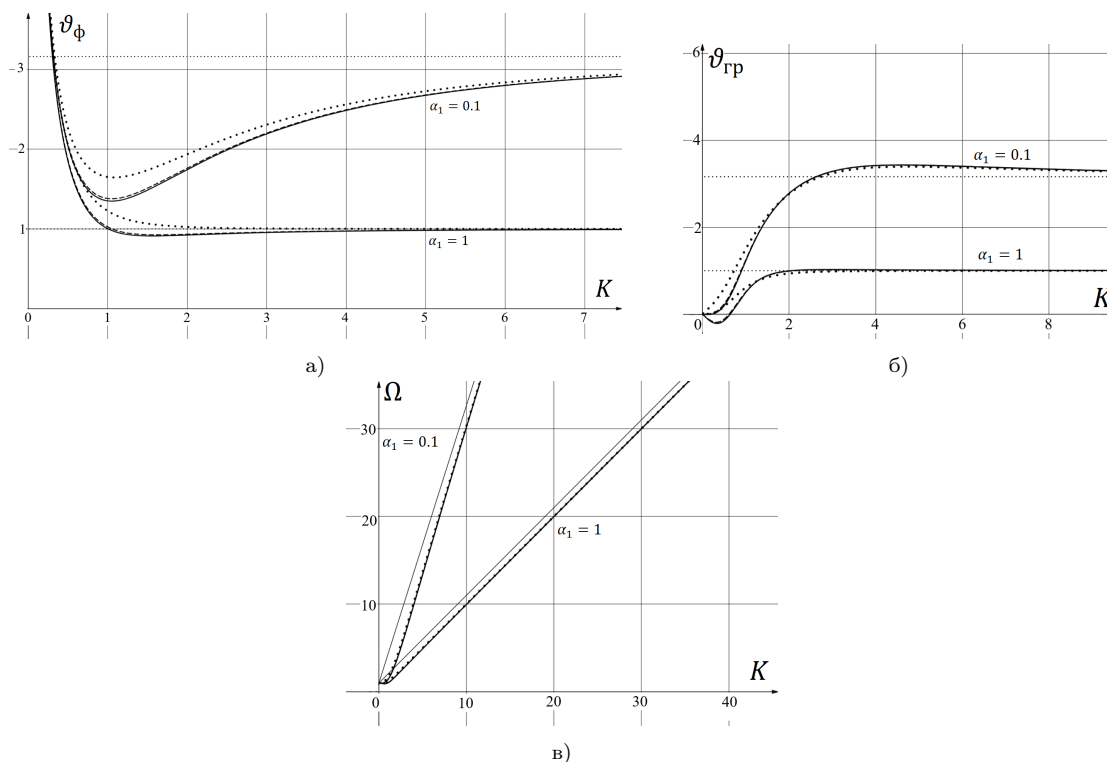


Рис. 5. Асимптоты фазовых (а), групповых (б) скоростей и дисперсии в зависимости от волнового числа (в)

Fig. 5. Asymptotes of phase (a), group (б) velocities and dispersion depending on the wave number (в)

Графики соответствующих асимптот построены ниже в большем масштабе для наглядности. Данные на рис. 5 позволяют убедиться в достоверности полученных результатов.

Построим сравнительный график модели Рэлея и модели Бернулли-хЭйлера и наглядно увидим разницу. Для определенности, в модели Рэлея возьмем коэффициент  $\alpha_2 = 0,1$ , а также вариации второго коэффициента:  $\alpha_1 = 0,1$  и  $\alpha_1 = 1$ . Для модели Бернулли-Эйлера коэффициент  $\alpha_1 = 0$ , так как не учитывается изгибающий момент при повороте поперечного сечения балки. Модель Бернулли показана черным цветом на графике, модели Рэлея черным пунктиром ( $\alpha_1 = 0,1, \alpha_2 = 0,1$ ) и черными точками ( $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0,1$ ) соответственно.

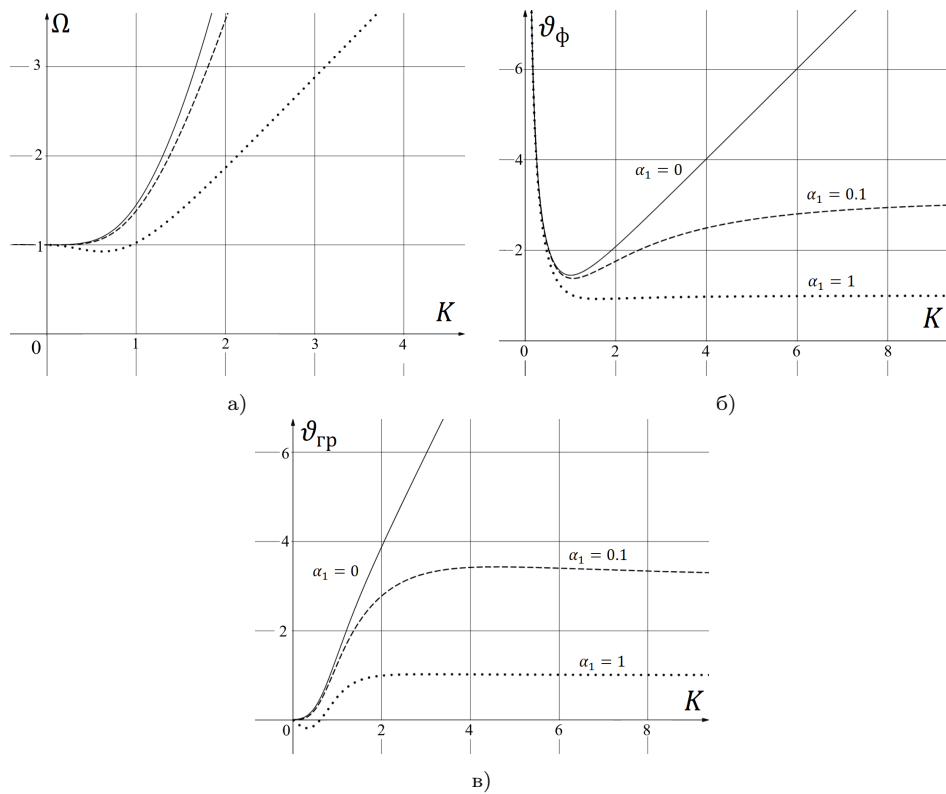


Рис. 6. Графики сравнения моделей балки

Fig. 6. Graphs of comparison of beam models

Из рис. 6 видно, что модель Бернулли–Эйлера дает завышенную оценку скоростей и дисперсии в модели, в сравнении с уточненной моделью Рэлея.

Заметим, что эффективный метод расчета внутренних усилий и деформаций предварительно напряженной двутавровой балки, лежащей на упругом основании Пастернака предложен в работе [8]; колебания функционально-градиентных балок с дефектами, лежащих на упругом основании Пастернака при термическом нагружении, изучались в работе [9]. Термоиндуцированные колебания балки, изготовленной из функционально-градиентного материала и опирающейся на двухпараметрическое упругое основание, исследованы в работе [10], где уравнение нестационарной теплопроводности является нелинейным.

Волновая динамика систем, представленных в [8–10], ждет своих исследователей.

## Заключение

В данной работе проведен анализ дисперсионных характеристик изгибных волн в балке, опирающейся на обобщенное упругое основание, с учетом инерции вращения ее поперечного сечения при изгибе. На основе модели Рэлея получено безразмерное уравнение движения, позволяющее учитывать и инерционные, и упругие эффекты среды.

Кроме того, показано, что учет вращательной инерции приводит к снижению фазовой и групповой скорости, особенно в диапазоне малых волновых чисел, где упрощенная модель Бернулли–Эйлера дает завышенные оценки. При этом модель Рэлея демонстрирует согласованность с физическими ожиданиями и предсказуемое асимптотическое поведение: как при стремлении волнового числа к нулю, так и к бесконечности. Результаты работы имеют прикладное значение для задач проектирования и диагностики инженерных конструкций, в которых важно корректное описание высокочастотных колебаний и взаимодействия с податливым

основанием. В перспективе данная модель может быть обобщена на случай неоднородных или анизотропных материалов, а также на системы с нелинейными характеристиками основания.

## Литература [References]

1. Fryba, L., *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*. London, Thomas Telford, 1999.
2. Иванченко, И.И., *Динамика транспортных сооружений: высокоскоростные подвижные, сейсмические и ударные нагрузки*. Москва, Наука, 2011. [Ivanchenko, I.I., *Dynamics of Transport Structures: High-Speed Moving, Seismic and Impact Loads*. Moscow, Nauka. 2011. (in Russian)]
3. Метрикин, А.В., Веричев, С.Н., Вострухов, А.В., *Фундаментальные задачи высокоскоростного наземного транспорта*. Saarbrücken, Lambert Academic Publishing, 2015. [Metrikine, A.V., Verichev, S.N., Vostrukhov, A.V., *Fundamental Tasks of High-Speed Land Transport*. Saarbrücken, Lambert Academic Publishing, 2015. (in Russian)]
4. Весницкий, А.И., *Избранные труды по механике*. Нижний Новгород, Изд-во «Наш дом», 2010. [Vesnitsky, A.I., *Selected Works on Mechanics*. Nizhny Novgorod, Publishing house “Nash Dom”, 2010. (in Russian)]
5. Ерофеев, В.И., Лисенкова, Е.Е., Царев, И.С., Динамическое поведение балки, лежащей на обобщенном упругом основании, с движущейся нагрузкой. *Прикладная математика и механика*, 2021, т. 85, № 2, с. 193–209. [Erofeev, V.I., Lisenkova, E.E., Tsarev, I.S., Dynamic Behavior of a Beam Lying on a Generalized Elastic Foundation and Subject to a Moving Load. *Mechanics of Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1295–1306. (in Russian)] DOI: [10.3103/S0025654421070116](https://doi.org/10.3103/S0025654421070116)
6. Косауров, А.П., Расчет свайного фундамента мостов в сейсмоопасных районах. *Инновационные технологии в образовании и науке. Сборник материалов Второй Международной научно-практической конференции*, Москва, 2017, с. 291–295. [Kosaurov, A.P., Calculation of pile foundations of bridges in seismically hazardous areas. *Innovative technologies in education and science. Collection of Materials of the Second International Scientific and Practical Conference*, Moscow, 2017, pp. 291–295. (in Russian)] URL: <https://interactive-plus.ru>
7. Ерофеев, В.И., Кажаяев, В.В., Семерикова, Н.П., *Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность*. Москва, Физматлит, 2002. [Erofeev, V.I., Kazhaev, V.V., Semerikova, N.P., *Waves in Rods. Dispersion. Dissipation. Nonlinearity*. Moscow, Fizmatlit, 2002. (in Russian)]
8. Ye, Y., Wei, S., Cai, D., Yang, J., Wei, P., Yue, C., Wu, S., Calculation Method for Internal Force and Deformation of the Prestressed L-Beam on Elastic Foundation. *Frontiers in Earth Science. Section: Solid Earth Geophysics*, 2022, vol. 10. DOI: [10.3389/feart.2022.996876](https://doi.org/10.3389/feart.2022.996876)
9. Abdelbari, S., Attia, A., Bourada, F., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Ghazwani, M.H., Investigation of Dynamic Characteristics of Imperfect FG Beams on the Winkler-Pasternak Foundation under Thermal Loading. *Physical Mesomechanics*, 2023, vol. 26, no. 5, pp. 557–772. DOI: [10.1134/S1029959923050089](https://doi.org/10.1134/S1029959923050089)
10. Bagheri, H., Kiani, Y., Eslami, M.R., Geometrically nonlinear response of fgm beams on elastic foundation subjected to thermal shock. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*. 2023, vol. 47, pp. 187–201. DOI: [10.1007/s40997-022-00506-z](https://doi.org/10.1007/s40997-022-00506-z)