

УДК 531.39

EDN: SBDBCP DOI: 10.31429/vestnik-22-2-15-30

Альтернативные методы получения фундаментальных решений дифференциальных уравнений и систем в частных производных для изо- и ортотропных материалов. Часть II

П. Г. Великанов  

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ,
ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111, Россия

✉ Великанов Пётр Геннадьевич; ORCID 0000-0003-0845-2880; SPIN 5880-7620; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Аннотация. Среди трех наиболее распространенных в настоящее время численных методов (метод конечных элементов (МКЭ), метод конечных разностей (МКР) и метод граничных элементов (МГЭ)) незаслуженно мало внимания обычно уделяется именно МГЭ, хотя он, как МКЭ и МКР, также является одним из наиболее успешных современных численных методов с высокой точностью полученных результатов для вычисления самых разнообразных и сложных (многосвязных, геометрически и физически нелинейных) конструкций. В этой связи представляется актуальным дальнейшее развитие МГЭ в различных его модификациях для решения задач, основанных на применении предварительно вычисленных точных фундаментальных решений. В данной статье (часть II), являющейся логическим продолжением ранее опубликованной статьи (часть I), с помощью альтернативных методов (метод разложения на плоские волны (метод Радона) и метод функционального анализа для предварительно найденного ассоциированного дифференциального оператора) удалось существенно упростить методику вычисления фундаментальных решений без необходимости предварительного глубокого изучения математической теории обобщенных функций и без привлечения аппарата операционного исчисления. Отмеченная теория и аппарат, к сожалению, до сих пор часто воспринимаются исследователями как трудные для понимания, что порой ограничивает область применения МГЭ. В статье показано, как с помощью альтернативных методов можно значительно быстрее и с меньшими усилиями получить фундаментальные решения задач об изгибе и плосконапряженном состоянии изо- и ортотропных пластин.

Ключевые слова: фундаментальные решения, обобщенные функции, метод разложения на плоские волны, метод Радона, метод функционального анализа, ассоциированный дифференциальный оператор, изотропные пластины, ортотропные пластины.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Великанов П. Г. Альтернативные методы получения фундаментальных решений дифференциальных уравнений и систем в частных производных для изо- и ортотропных материалов. Часть II // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 2. С. 15–30. EDN: SBDBCP. DOI: 10.31429/vestnik-22-2-15-30

Поступила 31 мая 2025 г. После доработки 26 июня 2025 г. Принято 27 июня 2025 г. Публикация 30 июня 2025 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2025. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY).

Alternative Methods for Obtaining Fundamental Solutions of Differential Equations and Partial Differential Systems for Isotropic and Orthotropic Materials. Part II

P. G. Velikanov 

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, 10, K. Marx st., Kazan, 420111, Russia

✉ Peter G. Velikanov; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Abstract. Among the three most common numerical methods currently used (finite element method (FEM), finite difference method (FDM), and boundary element method (BEM)), undeservedly little attention is usually paid to BEM, although it, like FEM and FDM, is also one of the most successful modern numerical methods with high accuracy calculations for calculating the most diverse and complex (multiconnected,

geometrically and physically nonlinear) structures. In this regard, it seems relevant to further develop the BEM in its various modifications to solve problems based on the application of precomputed exact fundamental solutions. In this article (Part II), which is a logical continuation of the previously published article (Part I), using alternative methods (the method of decomposition into plane waves (the Radon method) and the method of functional analysis for a previously found associated differential operator), it was possible to significantly simplify the methodology for calculating fundamental solutions without the need for a preliminary in-depth study of the mathematical theory of generalized functions. and without involving the operational calculus apparatus. Unfortunately, the mentioned theory and apparatus are still often perceived by researchers as difficult to understand, which sometimes limits the scope of the IGE. The article shows how, using alternative methods, it is possible to obtain fundamental solutions to problems of bending and plane-stressed state of iso- and orthotropic plates much faster and with less effort.

Keywords: fundamental solutions, generalized functions, plane wave decomposition method, Radon method, functional analysis method, associated differential operator, isotropic plates, orthotropic plates.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Velikanov, P.G., Alternative methods for obtaining fundamental solutions of differential equations and partial differential systems for isotropic and orthotropic materials. Part II. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 2, pp. 15–30. DOI: 10.31429/vestnik-22-2-15-30

Received 31 May 2025. Revised 26 June 2025. Accepted 27 June 2025. Published 30 June 2025.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2025. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) license.

Введение

Современная авиационная, ракетнокосмическая и др. индустрии ставят перед разработчиками порой чрезвычайно сложные задачи, решения которых стимулируют дальнейшие исследования разнообразных и сложных (многосвязных, геометрически и физически нелинейных) конструкций, подверженных действию нетривиальных нагрузок (сосредоточенных сил, моментов, импульсов, зарядов и др.; по различным законам распределенных и объемных (массовых) нагрузок) и по различным законам распределенных полей и сред (температурных, магнитных, электрических и др.).

Как показал опыт численных расчетов конструкций различной геометрии и граничных (краевых, начальных) условий, не существует ни одного универсального численного метода для решения всего разнообразия технических проблем (у каждого численного метода есть свои преимущества и недостатки при решении конкретных классов задач). В этой связи не стоит ограничиваться при реализации численных расчетов лишь использованием тех численных методов, для которых существуют широко распространенные программные комплексы. Далеко не всегда полученные с помощью них результаты при сгущении сеточной области сходятся к точным решениям (если такие существуют).

Так одним из наиболее успешных современных численных методов (наряду с методом конечных элементов (МКЭ) и методом конечных разностей (МКР)) расчета сложных конструкций, подверженных действию сколь угодно сложных нагрузок, является метод граничных элементов (МГЭ; метод граничных интегральных уравнений, метод потенциалов, метод интегральных уравнений и др.). Дальнейшее его развитие в виде: непрямого МГЭ (НМГЭ; метода компенсирующих нагрузок), прямого МГЭ (ПМГЭ; метода взвешенных невязок) и полуправого МГЭ, а также метод разрывных решений и др. для решения поставленных задач, основанных на применении предварительно вычисленных точных фундаментальных решений или матриц фундаментальных решений (ФР), является актуальным.

Классическими работами, где дается подробное описание понятий о ФР, являются работы Соболева С.А., Шварца Л., Гельфанда И.М. и Шилова Г.Е., Владимирова В.С. и Жаринова В.В., Шевченко В.П. [1–4] и др. о математической теории обобщенных функций.

В данной статье (часть II), являющейся логическим продолжением ранее опубликованной статьи (часть I) [5], с помощью альтернативных методов (метод разложения на плоские волны

(метод Радона) и метод функционального анализа для предварительно найденного ассоциированного дифференциального оператора) удалось существенно упростить методику вычисления ФР линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами без необходимости предварительного глубокого изучения математической теории обобщенных функций и без привлечения аппарата операционного исчисления (например, интегрального преобразования Фурье) [6–26]. Отмеченная теория и аппарат часто воспринимаются исследователями (особенно инженерными работниками, перед которыми зачастую и ставят задачи по реализации конкретных и практически важных расчетов) как трудные для понимания, что порой ограничивает область применения МГЭ, имеющего значительные потенциальные преимущества в сравнении с другими численными методами, главным из которых является снижение на единицу геометрической размерности задачи. Перечисленные альтернативные методы позволяют значительно упростить отмеченную проблему, чтобы, как и в других численных методах, основное внимание исследователя было уделено минимизации погрешностей дискретизации, аппроксимации и счета.

1. Нахождение ФР линейных дифференциальных уравнений в частных производных с δ -функцией Дирака в правой части

Пусть дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных p -го порядка

$$L_0 w \equiv \sum_{|\alpha|=0}^p A_\alpha(x) D^\alpha w = f(x), x \in R^m. \quad (1.1)$$

Здесь приняты стандартные обозначения: L_0 — исходный линейный дифференциальный оператор в частных производных; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ — мультииндекс с целочисленными неотрицательными компонентами,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m; \quad D^\alpha \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right)^{\alpha_m}.$$

ФР $G(x - \xi, y - \eta)$ дифференциального уравнения (1.1), например, для задач изгиба пластины определяется из выражения вида [1–26]:

$$L_0 G(x - \xi, y - \eta) = \delta(x - \xi, y - \eta), \quad (1.2)$$

где $\delta(x - \xi, y - \eta)$ — двумерная обобщенная δ -функция Дирака.

Как показано в [3], для уравнений с постоянными коэффициентами ФР всегда существуют. Более того, ФР не единственны, они определяются с точностью до слагаемого (решения), являющегося произвольным решением однородного уравнения $L_0 G(x - \xi, y - \eta) = 0$ и, кроме того, являются обобщенными функциями. Из (1.2) видно, что ФР $G(x - \xi, y - \eta)$ зависит только от свойств дифференциального оператора L_0 . Без ограничения общности далее будем считать, что $\xi = \eta = 0$, т.е. далее будем считать, что сосредоточенная нагрузка, моделируемая двумерной обобщенной δ -функцией Дирака, приложена в начале системы координат.

Для проверки правильности найденного ФР дифференциального уравнения используют две методики: или с помощью формулы дифференцирования обобщенных функций [8]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_G + (-1)^{i-1} \delta(x_1, \dots, x_n) \int_{\Gamma} \Phi dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n, \quad (1.3)$$

где $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_G$ — обычная производная от функции Φ , Γ — граница области G (один из контуров, внутри которого находится особенность), или с помощью проверки равновесия пластины, ограниченной кривой, при действии на нее единичной нагрузки [8, 16]. Обе отмеченных методики эквивалентны и приводят к идентичным результатам.

Известно, что сами по себе методики получения ФР, например, с помощью алгоритмов интегрального преобразования Фурье и др., с помощью метода последовательного (перестановочного) интегрирования и многих других [1–26] зачастую сложны, поэтому там, где это возможно, была поставлена задача свести поиск ФР ни к операции интегрирования, как было неоднократно проделано ранее другими методами [1–26], а к операции дифференцирования аппроксимирующих ФР функций. По аналогии с [5, 24] в дальнейшем данный метод будем называть методом функционального анализа.

Чтобы оценить сложность получения ФР, например, с помощью алгоритмов интегрального преобразования Фурье перечислю его основные этапы: применение к каждому из уравнений систем двумерного интегрального преобразования Фурье; получение трансформант из систем алгебраических уравнений, например, с помощью метода Крамера и др. точным (прямым) методом; использование формулы обращения двумерного интегрального преобразования Фурье; в зависимости от полюсов подынтегральной функции и их кратности могут быть применены соответствующие формулы из теории вычетов для введенной в рассмотрение обобщенной функции $\theta(\eta)$ и правил ее дифференцирования с последующим приведением интегралов к табличному виду, если такие вообще существуют. Понятно, что вышеописанная классическая методика, использующая операционное исчисление, порой кажется излишне сложной и громоздкой.

2. Нахождение ФР с помощью метода разложения на плоские волны (метод Радона)

Найдем ФР уравнения (1.2) при $\xi = \eta = 0$, осуществив разложение обобщенной δ -функции Дирака на плоские волны, т.е. представляя решение как среднее по всем направлениям единичной окружности от функции вида:

$$\bar{r}\bar{\omega} = x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = \xi,$$

где $\bar{r}(x, y)$ — произвольный радиус-вектор, составляющий с осью x угол α ; $\bar{\omega}(\cos(\theta), \sin(\theta))$ — единичный радиус-вектор на окружности 2π , составляющий с осью x угол θ .

Т.о., следуя [1], обобщенная δ -функция Дирака после ее разложения на плоские волны примет вид

$$\delta(x, y) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|\xi|^2}.$$

В результате дифференциальное уравнение (1.2) представимо в виде

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) G = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|\xi|^2},$$

решение которого будет зависеть лишь от функции плоской волны ξ . Это решение можно записать в виде

$$G(x, y) = \int_0^{2\pi} G_1(\xi) d\theta; \quad L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) G_1(\xi) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\xi|^2}. \quad (2.1)$$

Если в операторе L_0 перейти к переменной ξ , то частные производные примут вид

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \xi}$$

и уравнение (2.1) перейдет в обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$L_0(\cos(\theta), \sin(\theta)) \frac{d^{2m} G_1(\xi)}{d\xi^{2m}} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\xi|^2},$$

интегрируя которое 2m раз, получим

$$G_1(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^2 L_0(\cos(\theta), \sin(\theta))} \iint_{2m} \dots \int |\xi|^{-2} (d\xi)^{2m}. \quad (2.2)$$

В соответствии с теорией обобщенных функций многократное интегрирование функции $|\xi|^\nu$ приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \iint_{2m} \dots \int |\xi|^\nu (d\xi)^{2m} &= \frac{|\xi|^{\nu+2m} (\operatorname{sign}(\xi))^{2m}}{(\nu+1)\dots(\nu+2m)} + Q_\nu(\xi), \\ Q_\nu(\xi) &= \sum_{k=1}^m \frac{\xi^{2m-2k}}{(2k-1)! (2m-2k)!}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Сумма $Q_\nu(\xi)$ в выражении (2.3) добавляется для устранения полюсов первого члена уравнения в точках $\nu = -2k$. $Q_\nu(\xi)$ является многочленом степени, меньшей $2m$, и поэтому удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению (1.2).

В результате в решение (2.2) можно включить лишь то слагаемое уравнения из $Q_\nu(\xi)$, которое позволяет устраниТЬ полюс при $\nu = -2$, а именно:

$$\frac{|\xi|^{\nu+2m}}{(\nu+1)\dots(\nu+2m)} + \frac{\xi^{2m-2}}{(2m-2)!(\nu+2)}; \quad (2m > 2).$$

Совершав предельный переход при $\nu \rightarrow -2$, получим

$$\lim_{\nu \rightarrow -2} \frac{\xi^{2m-2}}{(2m-2)!} \frac{(1-|\xi|^{\nu+2})}{(\nu+2)} = -\frac{\xi^{2m-2}}{(2m-2)!} \ln |\xi|.$$

В результате получаем следующее выражение для ФР:

$$G(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2 (2m-2)!} \int_0^{2\pi} \frac{\xi^{2m-2} \ln |\xi|}{L(\cos(\theta), \sin(\theta))} d\theta. \quad (2.4)$$

Интеграл (2.4) с помощью подстановки $\rho \bar{a} = \bar{r}; \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{(\bar{r}\bar{\omega})^{2m-2} \ln |\bar{r}\bar{\omega}|}{L(\cos(\theta), \sin(\theta))} d\theta &= \rho^{2m-2} \ln \rho \int_0^{2\pi} \frac{(\bar{a}\bar{\omega})^{2m-2}}{L(\cos(\theta), \sin(\theta))} d\theta + \\ &\quad + \rho^{2m-2} \int_0^{2\pi} \frac{(\bar{a}\bar{\omega})^{2m-2} \ln |\bar{a}\bar{\omega}|}{L(\cos(\theta), \sin(\theta))} d\theta. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Второе слагаемое в правой части (2.5) можно отбросить, т.к. оно является регулярным решением однородного уравнения (1.2). Таким образом остается вычислить лишь интеграл вида

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^{2m-2}(\theta - \alpha)}{L(\cos(\theta), \sin(\theta))} d\theta,$$

замена переменной $t = \operatorname{ctg}(\theta)$ в котором, переводит его в следующий интеграл:

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t \cos(\alpha) + \sin(\alpha))^{2m-2}}{(t^2 + 1)^2 L\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)} dt.$$

Этот интеграл вычисляется с помощью теории вычетов. Окончательно получим следующую формулу для определения ФР дифференциального уравнения (1.2) вида

$$G(\rho, \alpha) = \frac{i\rho^{2m-2} \ln \rho}{\pi (2m-2)!} \sum \operatorname{Res} \left(\frac{(t \cos(\alpha) + \sin(\alpha))^{2m-2}}{(t^2+1)^2 L\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)} \right). \quad (2.6)$$

Вычеты в (2.6) берутся лишь для точек верхней полуплоскости.

В [1] нахождение ФР приведено лишь для изотропной пластины. В данной статье ФР из [1] является одним из многочисленных ФР для более общей задачи изгиба тонкой линейно упругой изотропной пластины, лежащей на упругом двухпараметрическом упругом основании по модели Пастернака–Власова. Таким образом, получим следующие ФР, зависящие от величин p и χ , что полностью совпало с результатами, полученными ранее с помощью метода двумерного интегрального преобразования Фурье в [12, 15]:

$$(\nabla^2 \nabla^2 - 2p^2 \nabla^2 + \chi^4) G(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{D}; \quad 2p^2 = \frac{k_t h^2}{4D}; \quad \chi^4 = \frac{k_z}{D} = \frac{1}{l^4} \Rightarrow$$

а) $p < \chi \Rightarrow G(x, y) = G(r) = -\frac{1}{2\pi\beta^2 D} \operatorname{kei}_0\left(\frac{r}{l}, \phi\right)$,

где $\beta^2 = \sqrt{\chi^4 - p^4}$, $\phi = \frac{1}{2} \arctan \frac{\beta^2}{p^2}$; $\operatorname{kei}_0(x, \phi)$ — обобщенная функция Томпсона–Кельвина;

б) $p = \chi \Rightarrow G(x, y) = G(r) = -\frac{1}{4\pi\chi^2 D} \operatorname{kei}'_0\left(\frac{r}{l}\right)$;

в) $p > \chi \Rightarrow G(x, y) = G(r) = -\frac{1}{4\pi s^2 D} \left\{ K_0\left(\sqrt{p^2 + s^2} r\right) - K_0\left(\sqrt{p^2 - s^2} r\right) \right\}$, где $s^2 = \sqrt{p^4 - \chi^4}$;
 $K_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка;

г) $\chi = 0 \Rightarrow G(x, y) = G(r) = -\frac{1}{4\pi p^2 D} \left\{ \ln r + K_0(\sqrt{2}pr) \right\}$;

д) $p = 0 \Rightarrow G(x, y) = G(r) = -\frac{l^2}{2\pi D} \operatorname{kei}_0\left(\frac{r}{l}\right)$;

е) $p = \chi = 0 \Rightarrow G(x, y) = G(r) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r$.

3. Нахождение ФР для задачи изгиба ортотропной пластины

Дальнейшим развитием метода функционального анализа, являющегося логическим продолжением ранее опубликованной статьи (часть I), может стать, например, поиск ФР задачи изгиба тонкой линейно упругой ортотропной пластины постоянной толщины, которая описывается дифференциальным уравнением вида [8]:

$$L_0 G(x, y) \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\delta_1 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) G(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{D_1}, \quad (3.1)$$

где

$$\delta_1 = \nu_2 + \frac{2\tilde{G}(1 - \nu_1\nu_2)}{E_1}; \quad \delta_2 = \frac{D_2}{D_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1};$$

L_0 — исходный линейный дифференциальный оператор в частных производных; E_i ($i = 1, 2$) — модули упругости Юнга (модули упругости первого рода) в ортогональных направлениях; ν_1 , ν_2 — коэффициенты Пуассона (коэффициенты поперечной деформации) ортотропного материала, для которого имеет место равенство $E_1\nu_2 = E_2\nu_1$; \tilde{G} — модуль сдвига (модуль упругости второго рода) в касательной плоскости; $D_i = \frac{E_i h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}$ ($i = 1, 2$) — изгибные (цилиндрические) жесткости пластины в ортогональных направлениях; h — толщина ортотропной пластины.

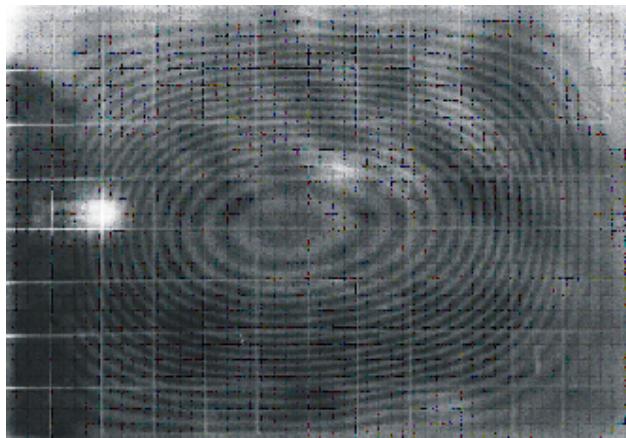


Рис. 1. Визуализация действия локальной нагрузки в центре ортотропной прямоугольной пластиинки с помощью метода голограммической интерферометрии [27]

Fig. 1. Visualization of the action of a local load at the center of an orthotropic rectangular plate using the method of holographic interferometry [27]

В отличие от ранее рассмотренного случая изгиба под действием сосредоточенной нагрузки изотропной пластины, для которого, как было показано в части I, линии равного прогиба являются окружностями, для ортотропной пластины, что подтверждается, например, результатами [27], где показана интерференционная картина прогиба ортотропной пластины, полученная методом голограммической интерферометрии (рис. 1), линия равного прогиба имеет вид эллипса, поэтому ФР для ортотропной пластины $G(x, y) \neq G(r)$.

В [8] показано, что вблизи точки приложения сосредоточенной нагрузки асимптотические формулы для ФР имеют логарифмическую особенность, поэтому одной из аппроксимирующих ФР для ортотропной пластины функций будет функция, подобная аппроксимирующей ФР функции для изотропной пластины.

Уравнение (3.1) представимо в виде

$$\nabla_1^2 \nabla_2^2 G(x, y) \equiv \nabla_2^2 \nabla_1^2 G(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{D_1}, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_i^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}; \quad y_i = \frac{y}{k_i} \quad (i = 1, 2); \quad k_{1,2}^2 = \lambda^2 \left(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1} \right); \\ \mu &= \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_2}}; \quad \lambda = \sqrt[4]{\delta_2}. \end{aligned}$$

Искомое ФР, например, для случая $\mu^2 > 1$ будем искать в виде

$$G(x, y) \equiv \frac{1}{2} \left(G_1 \left(x, \frac{y}{k_1} \right) + G_2 \left(x, \frac{y}{k_2} \right) \right), \quad (3.3)$$

так как полусумма этих решений также является ФР в свете предположения для них о выполнении следующих равенств

$$\begin{aligned} \nabla_i^2 G_i \left(x, \frac{y}{k_i} \right) &= 0 \quad (i = 1, 2); \\ \nabla_1^2 \nabla_2^2 G(x, y) &= \frac{1}{2} \nabla_1^2 \nabla_2^2 (G_1 + G_2) = \frac{1}{2} \nabla_1^2 (\nabla_2^2 G_1 + \nabla_2^2 G_2) = \frac{1}{2} \nabla_1^2 \nabla_2^2 G_1; \\ \nabla_2^2 \nabla_1^2 G(x, y) &= \frac{1}{2} \nabla_2^2 \nabla_1^2 (G_1 + G_2) = \frac{1}{2} \nabla_2^2 (\nabla_1^2 G_1 + \nabla_1^2 G_2) = \frac{1}{2} \nabla_2^2 \nabla_1^2 G_2. \end{aligned}$$

Сложив правые части двух последних уравнений, получим

$$\frac{1}{2}\nabla_1^2\nabla_2^2G_1 + \frac{1}{2}\nabla_2^2\nabla_1^2G_2 = \nabla_1^2\nabla_2^2G(x, y) \equiv \nabla_2^2\nabla_1^2G(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{D_1}. \quad (3.4)$$

Анализ вышеприведенного ФР и его производных для изотропной пластины позволяет искать решения $G_i\left(x, \frac{y}{k_i}\right)$, ($i = 1, 2$) в виде

$$G_i\left(x, \frac{y}{k_i}\right) = f_{1i}\left(x, \frac{y}{k_i}\right) + f_{2i}\left(x, \frac{y}{k_i}\right) \quad (i = 1, 2). \quad (3.5)$$

При этом, как было ранее сказано, в свете логарифмической особенности для ФР $f_{1i}\left(x, \frac{y}{k_i}\right)$ ($i = 1, 2$) будем искать в виде

$$f_{1i}\left(x, \frac{y}{k_i}\right) = \left(A_i x^2 + B_i \left(\frac{y}{k_i}\right)^2\right) \ln\left(x^2 + \left(\frac{y}{k_i}\right)^2\right) \quad (i = 1, 2). \quad (3.6)$$

Ограничиться для ортотропных пластин аналогом для изотропных пластин мы не можем (в силу эллиптичности линий равного прогиба для ФР ортотропной пластины), поэтому в качестве функций $f_{2i}\left(x, \frac{y}{k_i}\right)$ ($i = 1, 2$) должна быть функция, производные которой по своей структуре должны быть аналогичны производным для ФР изотропной пластины. Рассматривая таблицы различных производных функций, понимаем, что в качестве функций $f_{2i}\left(x, \frac{y}{k_i}\right)$ ($i = 1, 2$) можем взять, например, арктангенс или арккотангенс с соответствующими аргументами и функциональными сомножителями. Таким образом, взяв, например, арктангенс $f_{2i}\left(x, \frac{y}{k_i}\right)$ ($i = 1, 2$) будем искать в виде

$$f_{2i}\left(x, \frac{y}{k_i}\right) = \left(C_i x \frac{y}{k_i}\right) \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{k_i x}\right) \quad (i = 1, 2). \quad (3.7)$$

В действительности искомых произвольных постоянных не 6, как может показаться на первый взгляд, а всего 3, так как $G_i\left(x, \frac{y}{k_i}\right)$ ($i = 1, 2$) отличаются друг от друга лишь коэффициентами k_i ($i = 1, 2$), поэтому, заменив в $G_1\left(x, \frac{y}{k_1}\right)$ в найденных трех произвольных постоянных k_1 на k_2 , получим $G_2\left(x, \frac{y}{k_2}\right)$.

Теперь с помощью формулы (1.3) находим все необходимые для дифференциального уравнения (3.1) производные аппроксимирующей ФР $G(x, y)$ функции. Проще всего сначала определить обычные производные от аппроксимирующей функции ФР $G(x, y)$ (3.3): так как в сумме они должны дать нуль, то коэффициенты при одинаковых степенях функций должны также обратиться в нуль — эти коэффициенты и позволяют образовать систему алгебраических уравнений, из которых в любом пакете символьной математики, например, в Wolfram Mathematica [26, 28] можно найти интересующие коэффициенты:

$$A_i = \frac{(-1)^{i-1} k_i}{8\pi D_1(k_1^2 - k_2^2)}, \quad B_i = \frac{(-1)^i k_i}{8\pi D_1(k_1^2 - k_2^2)}, \quad C_i = \frac{(-1)^i k_i}{2\pi D_1(k_1^2 - k_2^2)} \quad (i = 1, 2).$$

Случай 1, когда $\mu^2 > 1$.

Выполнив вышеописанную процедуру, после нахождения A_i , B_i , C_i ($i = 1, 2$), подстановки их в (3.3) и упрощения полученного выражения, получим ФР вида

$$G(x, y) = \frac{1}{16\pi D_1(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \left[\frac{k_i^2 x^2 - y^2}{k_i} \ln(x^2 k_i^2 + y^2) - 4xy \operatorname{arctg} \frac{y}{xk_i} \right], \quad (3.8)$$

где $k_{1,2}^2 = \lambda^2 (\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1})$, которое с точностью до коэффициента (вместо 16 в [8] 8, что можно связать с тем, что в [8] не был учтен коэффициент 1/2 в формуле (3.3)) совпало с решением, полученным в [8] с помощью метода последовательного (перестановочного) интегрирования.

Случай 2, когда $\mu^2 < 1$.

Этот случай соответствует реальным ортотропным пластинам в условиях изгиба. Для него в обозначениях [8] получим

$$k_{1,2}^2 = \alpha^2 \pm i\beta^2; \quad \alpha^2 = \lambda^2\mu; \quad \beta^2 = \lambda^2\sqrt{1 - \mu^2};$$

$$k_1^2 - k_2^2 = 2i\beta^2; \quad k_{1,2} = a \pm ib; \quad a = \lambda\sqrt{\frac{1+\mu}{2}}; \quad b = \lambda\sqrt{\frac{1-\mu}{2}}.$$

Подставляя k_i ($i = 1, 2$), найденные для случая $\mu^2 < 1$ в (3.8), получим ФР для интересующего случая в виде (также нижеприведенное ФР можно получить, если принять

$$G(x, y) = \frac{1}{16\pi D_1 \beta^2} \operatorname{Im} F(x, y),$$

где

$$\begin{aligned} F(x, y) = \frac{k_i^2 x^2 - y^2}{k_i} \ln(x^2 k_i^2 + y^2) - 4xy \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{xk_i} : \\ G(x, y) = \frac{1}{32\pi D_1 \lambda^4 \sqrt{1 - \mu^2}} \left[2a(\lambda^2 x^2 - y^2) \operatorname{arctg} \frac{x^2 \beta^2}{\alpha^2 x^2 + y^2} + \right. \\ \left. + b(\lambda^2 x^2 + y^2) \ln |B(x, y)| - 2xy\lambda^2 \ln \left| \frac{B_-(x, y)}{B_+(x, y)} \right| \right], \quad (3.9) \end{aligned}$$

где

$$B_+(x, y) = \lambda^2 x^2 + 2bxy + y^2; \quad B_-(x, y) = \lambda^2 x^2 - 2bxy + y^2;$$

$$B(x, y) = B_+(x, y) \cdot B_-(x, y).$$

Приведенное ФР также, как и в случае 1, с точностью до коэффициента (вместо 32 в [8] 16, что я также связываю с тем, что в [8] не был учтен коэффициент 1/2 в формуле (3.3)) совпало с решением, полученным в [8].

Случай 3, когда $\mu^2 = 1$.

В предельном случае, когда $k_1 = k_2 = \lambda = a$, оба ФР (3.8) и (3.9) вырождаются в ФР вида

$$G(x, y) = \frac{1}{8\pi D_1 \lambda} \left[x^2 + \left(\frac{y}{\lambda} \right)^2 \right] \ln \sqrt{x^2 + \left(\frac{y}{\lambda} \right)^2}. \quad (3.10)$$

Если ввести обозначение $\tilde{y} = y/\lambda$, то получим ФР изотропной пластины с изгибной жесткостью $D_1\lambda$, что соответствует допущению, что для ортотропного материала между модулем сдвига, модулями упругости Юнга и коэффициентами Пуассона существует связь вида (это равенство позволяет установить следующую физическую аналогию между изотропией и ортотропией материала, т.е. усредненные механические характеристики ортотропной пластины соответствуют характеристикам изотропной пластины; подобный модуль сдвига в 1914 г. предложил использовать для железобетонных плит в выражении для крутильной жесткости Губер М., но в отличие от нижеприведенного выражения он заменил ν на ν_B — коэффициент Пуассона бетона):

$$G = G_0 = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})}$$

и задача путем аффинного преобразования координат может быть сведена к задаче деформирования изотропной пластиинки. В этом случае решение будет зависеть только от отношения модулей

$$\delta_2 = \frac{D_2}{D_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1}.$$

Такое решение может давать неплохие результаты, если сдвиговая деформация материала мало влияет на другие искомые характеристики.

В частном случае обычной изотропной пластины с изгибной жесткостью D из (3.10) получаем, что $k_1 = k_2 = \lambda = a = 1$ и ФР принимает хорошо известный в научной литературе вид [1–26]:

$$G(x, y) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.11)$$

Напоминаю, что вместо выбранной функции арктангенса не менее эффективно для определения ФР в (3.8) и (3.9) может быть использована и функция арккотангенса. Для этого достаточно всего лишь вспомнить связывающую их формулу ($\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$), сделать замены в (3.8) и (3.9), а также воспользоваться свойством, что ФР не единственны, они определяются с точностью до слагаемого (решения), являющегося произвольным решением однородного дифференциального уравнения (т.е. можно исключить из рассмотрения в (3.8) и (3.9) элементы, содержащие $\pi/2$).

4. Нахождение ФР с помощью метода функционального анализа для предварительно найденного ассоциированного дифференциального оператора

Пусть дана линейная неоднородная система дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$L_0 u = F, \quad (4.1)$$

где для нижеприведенных задач в большинстве случаев L_0 — линейный дифференциальный оператор плосконапряженного состояния изо- и ортотропных пластин и др.; $u = [u, v]^T$ — вектор тангенциальных перемещений; $F = -[P_x, P_y]^T$ — вектор тангенциальных сил.

Решение системы (4.1) представимо в виде свертки

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}_0^{-1} \mathbf{F} = \mathbf{G} * \mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{G}(t, \zeta) \mathbf{F}(\zeta) d\Omega, \quad \zeta(\xi, \eta) \in \Omega, \quad (4.2)$$

где \mathbf{L}_0^{-1} — интегральный оператор, ядром которого является матрица фундаментального решения $\mathbf{G}(t, \zeta)$ системы дифференциальных уравнений. Матрица фундаментального решения $\mathbf{G}(t, \zeta)$ определяется из решения систем уравнений вида

$$\mathbf{L}_0 \mathbf{G}(t, \zeta) = \delta(t - \zeta) \mathbf{I}, \quad (4.3)$$

где $\delta(t - \zeta)$ — обобщенная делта-функция Дирака; \mathbf{I} — единичная матрица.

Согласно идее Хермандера Л. [6, 7], искомая матрица $\mathbf{G}(t, \zeta)$ определяется скалярной функцией $\vartheta(t, \zeta)$, к которой применяется ассоциированный к L_0 дифференциальный оператор L_0^* , компонентами которого являются алгебраические дополнения оператора L_0^T :

$$\mathbf{G}(t, \zeta) = \mathbf{L}_0^* \vartheta(t, \zeta), \quad (4.4)$$

где $\mathbf{L}_0^* = \det(\mathbf{L}_0) \mathbf{L}_0^{-1}$.

В результате из (4.3) получим следующее дифференциальное уравнение относительно скалярной функции $\vartheta(t, \zeta)$:

$$\det(\mathbf{L}_0) \vartheta(t, \zeta) = \delta(t - \zeta), \quad (4.5)$$

где $\det(\mathbf{L}_0)$ — определитель дифференциального оператора L_0 .

Таким образом, задача свелась к нахождению из (4.5) скалярной функции $\vartheta(t, \zeta)$ из одного лишь дифференциального уравнения в частных производных.

Интересно отметить, что дифференциальное уравнение (4.5) можно трактовать, например, как решение плоской задачи теории упругости для изо- или ортотропного тела в напряжениях, а, значит, искомая скалярная функция $\vartheta(t, \zeta)$ есть ни что иное, как функция усилий.

По найденной скалярной функции $\vartheta(t, \zeta)$ компоненты матрицы фундаментального решения могут быть найдены простым дифференцированием в соответствии с (4.4).

Таким образом, рассмотрев линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях для плосконапряженного состояния изо- и ортотропных пластин, вида [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tilde{G}h}{B_1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\nu_2 + \frac{\tilde{G}h}{B_1} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{P_x}{B_1} = 0; \\ \left(\nu_2 + \frac{\tilde{G}h}{B_1} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\tilde{G}h}{B_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + q^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{P_y}{B_1} = 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где для ортотропного материала имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1; \quad B_i = \frac{E_i h}{(1 - \nu_1 \nu_2)}, \\ D_i = \frac{B_i h^2}{12} \quad (i = 1, 2), \quad D_{12} = \frac{\tilde{G}h^3}{12}, \quad \frac{E_2}{E_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{D_2}{D_1} = q^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где (u, v) , (P_x, P_y) — проекции вектора перемещения точки срединной поверхности пластины и проекции внешней распределенной нагрузки на координатные оси x , y соответственно.

Введем следующие обозначения:

$$\frac{\tilde{G}h}{B_1} = \alpha; \quad \nu_2 + \frac{\tilde{G}h}{B_1} = \beta.$$

Отметим, что для изотропной пластины коэффициенты α и β соответственно равны

$$\alpha = \frac{1 - \nu}{2}; \quad \beta = \frac{1 + \nu}{2}.$$

В результате линейный дифференциальный оператор L_0 и ассоциированный к нему оператор L_0^* соответственно примут вид

$$L_0 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = B_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + q^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

$$L_0^* \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = B_1 \begin{pmatrix} \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + q^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -\beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ -\beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Таким образом, получим следующее дифференциальное уравнение относительно скалярной функции $\vartheta(t, \zeta)$:

$$\det(L_0) \vartheta(t, \zeta) = \delta(t - \zeta), \quad (4.10)$$

где $\det(L_0)$ — определитель дифференциального оператора L_0 , который после преобразований примет вид:

$$\det(L_0) = \alpha B_1 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\delta_1^p \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right), \quad (4.11)$$

где

$$\delta_1^p = \frac{E_2}{2\tilde{G}} - \nu_2, \quad \delta_2 = q^2 = \frac{D_2}{D_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1}.$$

Таким образом, для ортотропной пластины задача свелась к нахождению скалярной функции $\vartheta(t, \zeta)$ из дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^4 \vartheta}{\partial x^4} + 2\delta_1^p \frac{\partial^4 \vartheta}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_2 \frac{\partial^4 \vartheta}{\partial y^4} = \frac{\delta(t, \zeta)}{D_1^p}, \quad (4.12)$$

где $D_1^p = -\tilde{G}h$.

А для изотропной пластины задача свелась к нахождению скалярной функции $\vartheta(t, \zeta)$ из дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^4 \vartheta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \vartheta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \vartheta}{\partial y^4} = \frac{\delta(t, \zeta)}{D}, \quad (4.13)$$

где $D = -Gh$.

Теперь можно сравнить два последних дифференциальных уравнения соответственно с дифференциальными уравнениями для поиска фундаментальных решений задач изгиба изотропных пластин:

$$\frac{\partial^4 G}{\partial x^4} + 2\delta_1 \frac{\partial^4 G}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_2 \frac{\partial^4 G}{\partial y^4} = \frac{\delta(t, \zeta)}{D_1}, \quad (4.14)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \nu_2 + \frac{2\tilde{G}(1 - \nu_1\nu_2)}{E_1}; \quad \delta_2 = \frac{D_2}{D_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1}; \quad D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1\nu_2)}; \\ \frac{\partial^4 G}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 G}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 G}{\partial y^4} &= \frac{\delta(t, \zeta)}{\tilde{D}}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где

$$\tilde{D} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

Сопоставив дифференциальные уравнения для ортотропной пластины (4.12) и (4.14), замечаем, что они отличаются лишь в коэффициентах при смешанной производной δ_1^p , δ_1 и жесткостях D_1^p , D_1 (для изотропной пластины (4.13) и (4.15) лишь в жесткостях D , \tilde{D}), а также в смысле искомой функции $\vartheta(t, \zeta)$, $w(t, \zeta)$: в дифференциальных уравнениях (4.12) и (4.13) ищется скалярная функция $\vartheta(t, \zeta)$ — фактически функция усилий под действием сосредоточенной нагрузки, а в (4.14) и (4.15) — фактически прогиб под действием сосредоточенной нагрузки $G(t, \zeta)$, т.е. $\vartheta(t, \zeta)$ и $G(t, \zeta)$ — оба являются фундаментальными решениями. Только $\vartheta(t, \zeta)$ — предварительным фундаментальным решением для плосконапряженного состояния пластины (т.к., получив его, для нахождения матрицы фундаментального решения необходимо продифференцировать $\vartheta(t, \zeta)$ в соответствии с ассоциированным дифференциальным оператором по формуле (4.4)), а $G(t, \zeta)$ — окончательным ФР для задачи изгиба пластины.

Таким образом, заключаем, что для поиска скалярной функции $\vartheta(t, \zeta)$ достаточно воспользоваться вышеуказанными методиками нахождения ФР для задач изгиба изо- и ортотропной пластин или методиками, описанными, например, в ранее опубликованной статье (часть I) [5].

Стоит также отметить, что необходимо учитывать зависимость конкретного ФР и матрицы ФР задачи изгиба ортотропных пластин от величины $\mu^2 - 1$, которая для вышеуказанных задач в силу различных коэффициентов в дифференциальных уравнениях будет своя. Все это существенным образом оказывается на выборе конкретного представления для ФР и матрицы ФР для реально существующих ортотропных материалов.

Представляется, что предложенный алгоритм нахождения матриц ФР является наименее трудоемким по сравнению с любым классическим методом нахождения матриц ФР.

В результате использования вышеуказанной процедуры для трех случаев получим следующие матрицы ФР для задачи о просконапряженном состоянии ортотропной пластины

$$D = \left(\frac{E_2}{2\tilde{G}} - \nu_2 \right)^2 - q^2.$$

Случай 1, когда $D = 0$, причем $\frac{E_2}{2\tilde{G}} - \nu_2 > 0$.

Обозначим

$$\begin{aligned} \frac{E_2}{2\tilde{G}} - \nu_2 &= \gamma^2, \\ G_{11} &= -\frac{1}{4\pi B_1 \alpha \gamma} \left\{ \left(\alpha + \frac{q^2}{\gamma^2} \right) \ln \sqrt{y^2 + x^2 \gamma^2} + \left(\alpha - \frac{q^2}{\gamma^2} \right) \frac{x^2 \gamma^2}{(y^2 + x^2 \gamma^2)} \right\}; \\ G_{12} = G_{21} &= \frac{\beta xy}{4\pi B_1 \alpha \gamma (y^2 + x^2 \gamma^2)}; \\ G_{22} &= -\frac{1}{4\pi B_1 \alpha \gamma} \left\{ \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma^2} \right) \ln \sqrt{y^2 + x^2 \gamma^2} + \left(-1 + \frac{\alpha}{\gamma^2} \right) \frac{y^2}{(y^2 + x^2 \gamma^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Из (4.16) легко можно получить матрицу ФР задачи о плоском напряженном состоянии изотропной пластины (матрица Кельвина) [7]:

$$\begin{aligned} G_{ij} &= C_1 \left\{ C_2 \delta_{ij} \ln r - \frac{y_i y_j}{r^2} \right\} \quad (i, j = 1, 2); \quad \delta_{ij} — \text{символ Кронекера}; \\ C_1 &= -\frac{(1+\nu)^2}{4\pi Eh}; \quad C_2 = \frac{(3-\nu)}{(1+\nu)}; \\ y_1 &= x - \xi; \quad y_2 = y - \eta; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где (ξ, η) — координаты точки приложения единичной силы.

Случай 2, когда $D > 0$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \frac{E_2}{2\tilde{G}} - \nu_2 &= \gamma^2; \quad \gamma^4 - q^2 = p^2. \\ G_{11} &= \frac{1}{4\pi B_1 \alpha p} \left\{ \left(q\sqrt{\gamma^2 - p} - \alpha\sqrt{\gamma^2 + p} \right) \ln \sqrt{y^2 + x^2(\gamma^2 + p)} + \right. \\ &\quad \left. \left(\alpha\sqrt{\gamma^2 - p} - q\sqrt{\gamma^2 + p} \right) \ln \sqrt{y^2 + x^2(\gamma^2 - p)} \right\}; \\ G_{12} = G_{21} &= \frac{\beta}{4\pi B_1 \alpha p} \arctg \frac{xy(\sqrt{\gamma^2 + p} - \sqrt{\gamma^2 - p})}{y^2 + x^2 q}; \\ G_{22} &= \frac{1}{4\pi B_1 \alpha p} \left\{ \left(\frac{\alpha}{q}\sqrt{\gamma^2 - p} - \sqrt{\gamma^2 + p} \right) \ln \sqrt{y^2 + x^2(\gamma^2 + p)} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sqrt{\gamma^2 - p} - \frac{\alpha}{q}\sqrt{\gamma^2 + p} \right) \ln \sqrt{y^2 + x^2(\gamma^2 - p)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Случай 3, когда $D < 0$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \frac{E_2}{2\tilde{G}} - \nu_2 &= \gamma^2; \quad q^2 - \gamma^4 = s^2; \quad \sqrt{\frac{q - \gamma^2}{2}} = \delta; \quad \sqrt{\frac{q + \gamma^2}{2}} = \lambda. \\ G_{11} &= \frac{1}{8\pi B_1 \alpha \delta \lambda} \left\{ \lambda(q - \alpha) \arctg \frac{2x^2 \lambda \delta}{x^2 \gamma^2 + y^2} - \right. \\ &\quad \left. - \delta(q + \alpha) \ln \sqrt{((x\delta + y)^2 + (x\lambda)^2)((x\delta - y)^2 + (x\lambda)^2)} \right\}; \\ G_{12} = G_{21} &= \frac{\beta}{16\pi B_1 \alpha \delta \lambda} \ln \frac{x^2 q + y^2 + 2xy\delta}{x^2 q + y^2 - 2xy\delta}; \\ G_{22} &= \frac{1}{8\pi B_1 \alpha \delta \lambda q} \left\{ \lambda(\alpha - q) \arctg \frac{2x^2 \lambda \delta}{x^2 \gamma^2 + y^2} - \right. \\ &\quad \left. - \delta(\alpha + q) \ln \sqrt{((x\delta + y)^2 + (x\lambda)^2)((x\delta - y)^2 + (x\lambda)^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Заключение

В статье успешно реализована попытка с помощью альтернативных методов (метод разложения на плоские волны (метод Радона) и метод функционального анализа для предварительно найденного ассоциированного дифференциального оператора) максимально упростить методику вычисления ФР линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами без необходимости предварительного глубокого изучения математической теории обобщенных функций, алгоритмов операционного исчисления и др. Вышеназванные альтернативные методы позволили значительно упростить, а порой и исключить из рассмотрения, трудные для понимания исследователями вышеперечисленные теории и алгоритмы, акцентировав внимание на минимизации погрешностей аппроксимации, дискретизации и счета. В статье показано, как с помощью вышеприведенных альтернативных методов можно значительно быстрее и с меньшими усилиями получить ФР задач изгиба и плоскона-пряженного состояния изо- и ортотропных пластин для всех возможных и продиктованных свойствами материалов случаев.

Литература [References]

- Гельфанд, И.М., Шилов, Г.Е., *Обобщенные функции и действия над ними*. Москва, Добросвет, 2000. [Gelfand I.M., Shilov G.E. *Obobshchennye funktsii i deystviya nad nimi = Generalized Functions and Actions on Them*. Moscow, Dobrosvet, 2000. (in Russian)]
- Шилов, Г.Е., *Математический анализ. Второй специальный курс*. Москва, Изд-во МГУ, 1984. [Shilov, G.E., *Matematicheskiy analiz. Vtoroy spetsial'nyy kurs = Mathematical Analysis. The Second Special Course*. Moscow, Publishing House of Moscow State University, 1984. (in Russian)]
- Владимиров, В.С., Жаринов, В.В., *Уравнения математической физики*. Москва, Физико-математическая литература, 2000. [Vladimirov, V.S., Zharinov, V.V., *Uravneniya matematicheskoy fiziki = Equations of Mathematical Physics*. Moscow, Physical and mathematical literature, 2000. (in Russian)]
- Шевченко, В.П., *Интегральные преобразования в теории пластин и оболочек*. Донецк, Донецкий государственный университет, 1977. [Shevchenko, V.P., *Integral'nye preobrazovaniya v teorii plastin i obolochek = Integral Transformations in the Theory of Plates and Shells*. Donetsk, Donetsk State University, 1977. (in Russian)]
- Великанов П.Г. Альтернативные методы получения фундаментальных решений дифференциальных уравнений с частными производными для изотропных материалов. Часть I. Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2024, т. 21, № 4, с. 6–22. [Velikanov, P.G., Alternative methods for obtaining fundamental solutions of partial differential equations for isotropic materials. Part I. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 4, pp. 6–22. (in Russian)] EDN: DMWKQC DOI: [10.31429/vestnik-21-4-6-22](https://doi.org/10.31429/vestnik-21-4-6-22)
- Хермандер, Л., *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье*. Москва, Мир, 1986. [Hermander, L., *Analiz lineynikh differentials'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 1. Teoriya raspredeleniy i analiz Fur'e = Analysis of linear partial differential operators. Vol. 1. Theory of distributions and Fourier analysis*. Moscow, Mir, 1986. (in Russian)]
- Shanz, M., Antes, H., A boundary integral formulation for the dynamic behavior of a Timoshenko beam. *Electronic Journal of Boundary Elements*, 2002, vol. BETEQ 2001, no. 3, pp. 348–359.
- Арtyухин, Ю.П., Грибов, А.П., Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов. Казань, Фэн, 2002. [Artyukhin, Yu.P., Gribov, A.P., *Reshenie zadach nelineynogo deformirovaniya plastin i pologikh obolochek metodom granichnykh elementov = Solving problems of nonlinear deformation of plates and flat shells by the method of boundary elements*. Kazan, Fen, 2002. (in Russian)]
- Грибов, А.П., Великанов, П.Г., Применение преобразования Фурье для получения фундаментального решения задачи изгиба ортотропной пластины. В *Труды Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи»*, 2004, ч. 3, с. 67–71. [Gribov, A.P., Velikanov, P.G., Application of the Fourier transform to obtain a fundamental solution to the problem of orthotropic plate bending. In *Trudy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii “Matematicheskoe modelirovanie i kraevye*

- zadachi” = Proc. of the All-Russian Scientific Conference “Mathematical modeling and boundary value problems”, 2004, pt. 3, pp. 67–71. (in Russian)]*
10. Великанов, П.Г., Исследование термомеханического изгиба длинной пологой цилиндрической панели методом граничных интегральных уравнений. В *Труды 3-го Международного форума «Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки»*. Ч. 3. Самара, Изд-во СамГТУ, 2007, с. 15–19. [Velikanov, P.G., Investigation of thermomechanical bending of a long flat cylindrical panel by the method of boundary integral equations. In *Trudy 3-go Mezhdunarodnogo foruma “Aktual’nye problemy sovremennoy nauki. Estestvennye nauki”*. Ch. 3 = Proc. of the 3rd International Forum “Actual problems of modern Science. Natural Sciences”. Pt. 3. Samara, Publishing House of SamSTU, 2007, pp. 15–19. (in Russian)]
11. Великанов, П.Г., Метод граничных интегральных уравнений для решения задач изгиба изотропных пластин, лежащих на сложном двухпараметрическом упругом основании. *Известия Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2008, т. 8, вып. 1, с. 36–42. [Velikanov, P.G., The method of boundary integral equations for solving bending problems of isotropic plates lying on a complex two-parameter elastic base. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika* = Proc. of the Saratov University. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2008, vol. 8, iss. 1, pp. 36–42. (in Russian)]
12. Великанов, П.Г., Куканов, Н.И., Халитова, Д.М., Нелинейное деформирование цилиндрической панели ступенчато-переменной жесткости на упругом основании методом граничных элементов. В *Всероссийская научная конференция с международным участием «Актуальные проблемы механики сплошной среды – 2020»*, 2020, с. 111–115. [Velikanov, P.G., Kukanov, N.I., Khalitova, D.M., Nonlinear deformation of a cylindrical panel of step-variable stiffness on an elastic base by the method of boundary elements. In *Vserossiyskaya nauchnaya konferentsiya s mezhdunarodnym uchastiem “Aktual’nye problemy mehaniki sploshnoy sredy – 2020”* = All-Russian scientific conference with international participation “Actual problems of continuum mechanics – 2020”, 2020, pp. 111–115. (in Russian)]
13. Великанов, П.Г., Арtyukhin, Ю.П., Куканов, Н.И., Изгиб анизотропной пластины методом граничных элементов. *Актуальные проблемы механики сплошных сред*, 2020, с. 105–111. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Kukanov, N.I., Anisotropic plate bending by the boundary elements method. *Aktual’nye problemy mehaniki sploshnykh sred* = Actual Problems of Continuum Mechanics, 2020, pp. 105–111. (in Russian)]
14. Великанов, П.Г., Куканов, Н.И., Халитова, Д.М., Использование непрямого метода граничных элементов для расчета изотропных пластин на упругом основании Винклера и Пастернака-Власова. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2021, т. 27, № 2, с. 33–47. [Velikanov, P.G., Kukanov, N.I., Khalitova, D.M., The use of the indirect boundary element method for the calculation of isotropic plates on an elastic base of Winkler and Pasternak-Vlasov. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* = Bull. of Samara University. Natural Science Series, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 33–47. (in Russian)]
15. Великанов, П.Г., Халитова, Д.М., Решение задач нелинейного деформирования анизотропных пластин и оболочек методом граничных элементов. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2021, т. 27, № 2, с. 48–61. [Velikanov, P.G., Khalitova, D.M., Solving problems of nonlinear deformation of anisotropic plates and shells by the boundary element method. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* = Bulletin of Samara University. Natural Science Series, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 48–61. (in Russian)]
16. Великанов, П.Г., Арtyukhin, Ю.П., Общая теория ортотропных оболочек. Часть I. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2022, т. 28, № 1–2, с. 46–54. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., General theory of orthotropic shells. Part I. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* = Bulletin of Samara University. Natural Science series, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 46–54. (in Russian)]
17. Великанов, П.Г., Арtyukhin, Ю.П., Общая теория ортотропных оболочек. Часть II. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2022, т. 28, № 3–4, с. 40–52. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., General theory of orthotropic shells. Part II. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* = Bulletin of Samara University. Natural Science series, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 40–52. (in Russian)]
18. Великанов, П.Г., Арtyukhin, Ю.П., Математические аналогии для решения задач прочности, устойчивости и колебаний ортотропных пластин и оболочек. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 3, с. 47–54. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Mathematical analogies for solving problems of strength, stability and

- vibrations of orthotropic plates and shells. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudничества = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 47–54. (in Russian)] EDN: [JYGZJI](#) DOI: [10.31429/vestnik-19-3-47-54](#)
19. Великанова, Н.П., Великанов, П.Г., Проверка утверждения академика Новожилова Г.В. о влиянии погрешности в определении напряжений на величину погрешности в определении ресурса на примере основных деталей двигателя. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 4, с. 48–56. [Velikanova, N.P., Velikanov, P.G., Verification of the statement of academician Novozhilov G.V. on the influence of the error in determining stresses on the magnitude of the error in determining the resource on the example of the main engine parts. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudничества = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4. pp. 48–56. (in Russian)] EDN: [JZYKZX](#) DOI: [10.31429/vestnik-19-4-48-56](#)
20. Velikanov, P., Solution of contact problems of anisotropic plates bending on an elastic base using the compensating loads method. *E3S Web of Conferences*, 2023, vol. 402 (International Scientific Siberian Transport Forum – TransSiberia 2023), art. 11010. DOI: [10.1051/e3sconf/202340211010](#)
21. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследования по динамике рамных конструкций. *Геосистемы переходных зон*, 2023, т. 7, № 2, с. 180–195. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Research on the dynamics of frame structures. *Geosistemy perekhodnykh zon = Geosystems of transition zones*, 2023, vol. 7, no. 2, pp. 180–195. (in Russian)]
22. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследование по динамике многоэтажных зданий. *Геосистемы переходных зон*, 2023, т. 7, № 3, с. 304–315. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Research on the dynamics of multi-storey buildings. *Geosistemy perekhodnykh zon = Geosystems of transition zones*, 2023, vol. 7, no. 3, pp. 304–315. (in Russian)]
23. Великанов, П.Г., Математические аналоги и аналогии для решения задач методом граничных элементов. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 1, с. 6–20. [Velikanov, P.G., Mathematical analogies and analogies for solving problems by the boundary element method. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudничества = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 1, pp. 6–20. (in Russian)] EDN: [WRVRQN](#) DOI: [10.31429/vestnik-21-1-6-20](#)
24. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследование композитов в виде слоистых ортотропных оболочек. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 2, с. 23–34. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Investigation of composites in the form of layered orthotropic shells. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudничества = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 23–34. (in Russian)] EDN: [YPNJFT](#) DOI: [10.31429/vestnik-21-2-23-34](#)
25. Великанов П.Г., Артюхин Ю.П., Исследование композитов с помощью уравнений общей теории ортотропных оболочек в комплексной форме. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 3, с. 6–15. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Investigation of composites using the equations of the general theory of orthotropic shells in a complex form. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudничества = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 3, pp. 6–15. (in Russian)] EDN: [ERCRUG](#) DOI: [10.31429/vestnik-21-3-6-15](#)
26. Артюхин, Ю.П., Гурьянов, Н.Г., Котляр, Л.М., *Система Математика 4.0 и ее приложения в механике*. Казань, Казанская математическая общество, Изд-во КамПИ, 2002. [Artyukhin, Yu.P., Guryanov, N.G., Kotlyar, L.M. *Sistema Matematika 4.0 i ee prilozheniya v mehanike = The Mathematics 4.0 System and Its Applications in Mechanics*. Kazan, Kazan Mathematical Society, Publishing House of CamPI, 2002. (in Russian)]
27. Костин, В.А., Снегуренко, А.П., Идентификация поля цилиндрических жесткостей изотропных и ортотропных пластин. *Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева*, 2001, № 2, с. 3–9. [Kostin, V.A., Snegurenko, A.P., Identification of the field of cylindrical stiffness of isotropic and orthotropic plates. *Vestnik KGTU im. A.N. Tupoleva = Bulletin of KSTU named after A.N. Tupolev*, 2001, no. 2, pp. 3–9. (in Russian)]
28. Великанов, П.Г., *Основы работы в системе Mathematica*. Казань, Изд-во Казанского гос. техн. ун-та, 2010. [Velikanov, P.G., *Osnovy raboty v sisteme Mathematisa = Fundamentals of work in the Mathematics system*. Kazan, Publishing House of Kazan State Technical University, 2010. (in Russian)]