

УДК 539.3

EDN: IQLBSN DOI: 10.31429/vestnik-22-3-24-35

## Эффективность применения энергетического метода для численно-аналитического решения смешанной задачи теории упругости

В. Б. Пеньков , Л. В. Левина  , А. И. Крупнов, М. А. Черкивский

Липецкий государственный технический университет, ул. Московская, 30, Липецк, 398055, Россия

✉ Любовь Владимировна; ORCID 0000-0002-7441-835X; SPIN 6294-4940;

e-mail: [satalkina\\_lyubov@mail.ru](mailto:satalkina_lyubov@mail.ru)

**Аннотация.** Рассмотрен процесс построения численно-аналитического решения основной смешанной краевой задачи статической теории упругости (ТУ). Определяющим соотношениям линейной однородной изотропной упругой среды эквивалентна система трех разрешающих уравнений Ламе, каждое — линейное второго порядка относительно частных производных. Средствами энергетического метода граничных состояний (МГС) с помощью разложения искомого состояния в ряд Фурье по элементам сепарабельного базиса гильбертова пространства состояний краевая задача математической физики приводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Построение базиса опирается на вариант общего решения системы уравнений эллиптического типа. Каждое базисное состояние создается посредством использования гармонических многочленов. Ортогонализация проводится алгоритмом Грама–Шмидта. Граничные условия (ГУ) основной смешанной задачи предполагают разбиение границы тела на два класса. На одной части границы заданы перемещения точек, на оставшейся — поверхностные усилия. СЛАУ содержит информацию как о содержимом базиса (матрица коэффициентов), так и о значениях характеристик ГУ (вектор правых частей). Точность решения оценивается двумя факторами: 1) неравенство Бесселя; 2) интегральная квадратичная невязка восстановленного граничного состояния с ГУ. Использование обоих факторов приводит к эффекту самодостаточности МГС: нет необходимости в сопоставлении пробных решений с эталонными, построенными иными методами. Выполнены конкретные расчеты для двух классов смешанных задач: 1) ограниченное двуполостное тело (шар с двумя симметрично расположеннымами сферическими полостями. Задано жесткое встречное смещение поверхностей полостей, внешняя граница тела свободна от нагрузки; 2) упругий круговой цилиндр закреплен с жестким штоком по части одного основания. Боковая поверхность нагружена касательными усилиями, направленными вдоль оси цилиндра. Во второй задаче испытывается сингулярный скачок характеристик граничного состояния по линии раздела ГУ, принадлежащей границе тела. Построены численно-аналитические решения обеих задач, проиллюстрированы поля характеристик НДС тела, выполнены комментарии состояний и сделаны выводы.

**Ключевые слова:** теория упругости, основная смешанная задача, энергетические методы, метод граничных состояний, пространства состояний, изоморфизм гильбертовых пространств.

**Финансирование.** Исследование не имело спонсорской поддержки.

**Цитирование:** Пеньков В. Б., Левина Л. В., Крупнов А. И., Черкивский М. А. Эффективность применения энергетического метода для численно-аналитического решения смешанной задачи теории упругости // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 3. С. 24–35. EDN: IQLBSN. DOI: 10.31429/vestnik-22-3-24-35

Поступила 4 июня 2025 г. После доработки 12 июля 2025 г. Принято 22 августа 2025 г. Публикация 22 сентября 2025 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2025. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY).

## The Effectiveness of the Energy Method for the Numerical-Analytical Solution of a Mixed Problem of Elasticity Theory

V. B. Penkov, L. V. Levina , A. I. Krupnov, M. A. Cherkivsky

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Moskovskaya St., 30, 398055, Russia

✉ Lubov V. Levina; ORCID 0000-0002-7441-835X; e-mail: [satalkina\\_lyubov@mail.ru](mailto:satalkina_lyubov@mail.ru)

*Abstract.* The process of constructing a numerical-analytical solution to the basic mixed boundary value problem of the static theory of elasticity (TE) is considered. The defining relations of a linear homogeneous isotropic elastic medium are equivalent to a system of three resolving Lame equations, each linear of the second order with respect to partial derivatives. By means of the energetic method of boundary states (MBS), by decomposing the desired state into a Fourier series according to the elements of the separable basis of the Hilbert space of states, the boundary value problem of mathematical physics is reduced to a system of linear algebraic equations (SLAE). The construction of the basis is based on a variant of the general solution of a system of elliptic type equations. Each basic state is created by using harmonic polynomials. Orthogonalization is performed by the Gram-Schmidt algorithm. The main mixed task involves dividing the body boundary into two classes. Point movements are set on one part of the border, and surface movements are set on the remaining part. The accuracy of the solution is assessed by two factors: 1) Bessel's inequality; 2) integral quadratic residual of the restored boundary state with BC. The use of both factors leads to the effect of self-sufficiency of the MBS: there is no need to compare trial solutions with reference ones based on other methods. Specific calculations have been performed for two classes of mixed tasks: 1) a bounded bicavous body (a ball with two symmetrically arranged spherical cavities. A rigid counter-displacement of the surfaces of the cavities is set, the outer boundary of the body is free from load; 2) an elastic circular cylinder is fixed with a rigid rod along part of one base. The side surface is loaded with tangential forces directed along the axis of the cylinder. In the second problem, a singular jump in the characteristics of the boundary state along the interface line belonging to the boundary of the body is tested. Numerical-analytical solutions to both problems are constructed, the fields of characteristics of stress-strain states are illustrated, comments on states are made, and conclusions are done.

*Keywords:* elasticity theory, basic mixed problem, energy methods, method of boundary states, state of spaces, isomorphism of Hilbert spaces.

*Funding.* The study did not have sponsorship.

*Cite as:* Penkov, V. B., Levina, L. V., Krupnov, A. I., Cherkivsky, M. A., The effectiveness of the energy method for the numerical-analytical solution of a mixed problem of elasticity theory. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 3, pp. 24–35. DOI: 10.31429/vestnik-22-3-24-35

Received 4 June 2025. Revised 12 July 2025. Accepted 22 August 2025. Published 22 September 2025.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2025. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) license.

## Введение

Целью работы является демонстрирование эффективности применения энергетического метода граничных состояний на примерах решения смешанных задач теории упругости для ограниченных односвязных и многополостных областей.

Важность использования энергетических методов для анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) тела отмечается в классических руководствах по механике деформируемого твердого тела (МДТТ) [1, 2]. Яркими примерами применения методов Треффца и Бубнова–Галеркина [3] является их численная реализация в конечно-элементной форме. В настоящее время на передний план выходят подходы, ориентированные на аналитическую форму представления решений. Одним из таких подходов является метод граничных состояний, реализующийся в вычислительных средах, поддерживающих компьютерные алгебры.

Серьезные обзоры по зарождению, развитию и совершенствованию МГС содержатся в серии диссертационных работ [4–11].

В работе [4] описаны структуры изоморфных гильбертовых пространств внутренних и граничных состояний упругих тел. Предложен аппарат решения задач на основе разложения искомых состояний по элементам ортонормированных базисов. Процедура составления отрезка сепарабельного базиса опирается на легко генерируемый набор однородных гармонических многочленов.

В работе [5] аппарат применен также к иным задачам математической физики (стационарная гидродинамика, электростатика). В исследованиях [6] МГС распространен на решение задач для неоднородных упругих сред и задач термоупругости. Далее выполнено обобщение аппарата на классы анизотропных сред [7], на анализ установившихся колебаний тел [8].

Весьма эффективные результаты получены в диссертации [9], посвященной решению плоских задач теории упругости, причем с учетом сингулярностей любого вида в 2D-пространстве.

Важным шагом развития МГС явилось строгое обоснование средств анализа НДС многополостных тел [10]. Описаны процедуры формирования счетных базисов пространств состояний для ограниченных или неограниченных полостных тел и продемонстрированы результаты решений конкретных задач.

Использование компьютерных алгебр позволило разработать универсальные подходы к построению полнопараметрических аналитических решений упругих задач для тел произвольной геометрической конфигурации [11].

Для достижения поставленной в работе цели ниже кратко описаны основные этапы решения, присущие МГС: конкретизированы понятия о пространствах внутренних и граничных состояний тел, их гильбертов изоморфизм, приведены определяющие соотношения среды и разрешающие уравнения, общие решения Аржаных–Слободянского системы дифференциальных уравнений Ламе, алгоритмы формирования сепарабельных базисов, ортогонализация базисов, формирование систем линейных алгебраических уравнений относительных коэффициентов Фурье, оценка точности решения средствами неравенства Бесселя и оценка невязки построенного решения с задаваемыми граничными условиями, предъявлены схемы решения основных и смешанных задач.

В качестве убедительных примеров эффективного использования МГС приведены решения основной смешанной задачи для двухполостного шара при регулярных граничных условиях и для односвязного ограниченного тела при возможных сингулярных дефектах в граничном состоянии.

## 1. Определяющие соотношения и разрешающие уравнения эластостатики

Состояние эластостатической среды описывается набором соотношений, связывающих между собой компоненты вектора перемещений  $u_i$ , тензоров деформации  $\varepsilon_{ij}$  и напряжений  $\sigma_{ij}$ . В линейном варианте тензор деформаций определяется через перемещения формулами Коши (тензорно-индексная форма записи)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.1)$$

Обобщенный закон Гука в форме Ламе определяет поля напряжений

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1.2)$$

где  $\lambda, \mu$  — упругие константы среды,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Уравнения равновесия при наличии объемных сил  $X_i$  имеют вид

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0. \quad (1.3)$$

Ниже рассматриваем вариант отсутствия объемных сил. При  $X_i = 0$  последовательность соотношений (1.1), (1.2), (1.3) приводит к разрешающим уравнениям Ламе [1, 2]

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} = 0, \quad (1.4)$$

образующим систему трех дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа.

Общее решение уравнений (1.4) для тела произвольной геометрической конфигурации, но при ограничении, что коэффициент Пуассона  $\nu \neq 1/4$ , было построено Папковичем и Нейбером [12]. Более эффективным для применения в расчетах оказались решения Аржаных–Слободянского [13, 14], полученные для односвязной ограниченной области

$$u_i = 4(1 - \nu)b_i + x_j b_{i,j} - x_i b_{j,i} \quad (1.5)$$

и внешности односвязной ограниченной полости

$$u_i = 4(1 - \nu)b_i - (x_j b_j)_{,i}. \quad (1.6)$$

В обоих вариантах вектор  $\mathbf{b} = \{b_i\}$  является гармоническим. Линейно-независимые варианты гармонических векторов можно создать для каждой гармонической функции  $\varphi$  ее помещением в различные позиции:  $\mathbf{b} \in \{\{\varphi, 0, 0\}, \{0, \varphi, 0\}, \{0, 0, \varphi\}\}$ . Следовательно, любая гармоническая в области функция порождает в этой области три варианта упругого состояния тела.

## 2. Общий анализ состояний эластостатического тела

Множество всех возможных внутренних состояний тел обозначим через  $\Xi$ , причем под каждым внутренним состоянием понимаем набор согласованных соотношениями (1.1)–(1.3) характеристик НДС тел:

$$\xi = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}, \quad x_i \in V.$$

На границе  $\partial V$  тел состоянию  $\xi$  соответствуют значения перемещений и поверхностных усилий  $p_i = \sigma_{ij}n_j$ , где  $\{n_j\}$  — единичный вектор внешней нормали к границе тела. Множество граничных состояний  $\Gamma$  образовано элементами  $\gamma = \{u_i, p_i\}, \{x_i \in \partial V\}$ .

Известно [1, 2], что любой заданный набор согласованных характеристик состояния  $\gamma$  на границе тела позволяет однозначно восстановить перемещение в любой точке области  $V$ . Следовательно, пространства внутренних и граничных состояний изоморфны:  $\Xi \longleftrightarrow \Gamma$ . В силу линейности соотношений (1.1)–(1.3) и определения скалярных произведений в каждом из бесконечномерных полных и всюду плотных пространств  $\Xi, \Gamma$  через объемные и поверхностные интегралы

$$(\xi^{(k)}, \xi^{(m)})_{\Xi} = \int_V \sigma_{ij}^{(k)} \varepsilon_{ij}^{(m)} dV, \quad (\gamma^{(k)}, \gamma^{(m)})_{\Gamma} = \int_{\partial V} p_i^{(k)} u_i^{(m)} dS \quad (2.1)$$

оба пространства оказываются гильбертовыми [15].

Поскольку работа поверхностных сил одного состояния на перемещениях любого второго состояния равна внутренней энергии упругого деформирования соответствующих внутренних состояний (следствие принципа возможных перемещений), то скалярные произведения изоморфных пар элементов из обоих пространств равны между собой:

$$(\xi^{(k)}, \xi^{(m)})_{\Xi} = (\gamma^{(k)}, \gamma^{(m)})_{\Gamma}, \quad \xi^{(j)} \leftrightarrow \gamma^{(j)}. \quad (2.2)$$

Скалярные произведения (2.1) позволяют провести ортогонализацию исходных базисов пространств внутренних и граничных состояний, используя алгоритм Грама–Шмидта либо иным существующим способом (методы Холецкого, сингулярного разложения) [16].

Исходный базис пространств  $\Xi$  для внутренности ограниченной односвязной области генерируется, исходя из классического набора однорядных гармонических многочленов

$$\varphi \in \{x, y, z, xy, xz, yz, x^2 - z^2, y^2 - z^2, xyz, \dots\}$$

на основе общего решения Аржаных–Слободянского (1.5), но должен быть освобожден от линейно-зависимых элементов, зарождающихся по причине операций дифференцирования, присутствующих в (1.1), (1.3). По изоморфизму ему соответствует исходный базис пространства  $\Gamma$ .

Доказано [17], что каждому однородному гармоническому в  $V$  многочлену  $\varphi(x, y, z)$  порядка  $n = \text{ord } \varphi$  отвечает инверсия, гармоническая вне области  $V$ :

$$\psi = \frac{\varphi}{r^{2n+1}}, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \quad \{x, y, z\} \in R^3 \setminus V,$$

где  $(x_0, y_0, z_0) \in V$  — любая зафиксированная точка внутри  $V$ . Этот факт позволяет создать базисы инверсий для внешностей любых ограниченных полостей:

$$\psi \in \left\{ \frac{1}{r}, \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}, \frac{xy}{r^5}, \frac{xz}{r^5}, \frac{x^2 - z^2}{r^5}, \frac{y^2 - z^2}{r^5}, \frac{xyz}{r^7}, \dots \right\}.$$

Для каждого элемента  $\psi$  формируются три элемента пространства  $\Xi$  на основе решений (1.6), причем линейно-зависимые элементы не зарождаются из-за наличия знаменателей.

В общем случае структура исследуемой области, содержащей упругое тело, позволяет сформировать базис пространства  $\Xi$  для этого тела, объединив базисы для областей, образующих эту структуру. В случае нескольких полостей следует выбрать центр инверсии  $(x_0, y_0, z_0)$  внутри каждой полости и создать базисы для внешностей полостей. Эти базисы между собой линейно-независимые. Следовательно, базисы пространства  $\Xi$  на границе тела порождают сепарабельный базис пространства  $\Gamma$ .

После проведения ортогонализации базисов пространств  $\Xi, \Gamma$  выполняются свойства

$$(\xi^{(m)}, \xi^{(k)})_{\Xi} = (\gamma^{(m)}, \gamma^{(k)})_{\Gamma} = \delta_{mk},$$

что позволяет эффективно выписывать решения краевых задач теории упругости.

**Первая основная задача** теории упругости по классификации Мусхелишвили [18] состоит в построении упругого поля, когда на границе тела заданы поверхностные усилия  $p_i^*$ . Решение ищется в виде ряда Фурье

$$\xi = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \xi^{(j)} \quad (2.3)$$

разложения искомого состояния по ортонормированному базису и оказывается тривиальным:

$$c_j = \int_{\partial V} p_i^* u_i^{(j)} \, ds \quad (2.4)$$

**Вторая основная задача** состоит в восстановлении поля по информации о перемещениях  $u_i$  на  $\partial V$  и также решается тривиально:

$$c_j = \int_{\partial V} u_i^* p_i^{(j)} \, ds. \quad (2.5)$$

**Основная смешанная задача (ОСЗ).** Граница тела разбита на два непересекающихся подмножества

$$\partial V = S_p \cup S_u, \quad S_p \cap S_u = \emptyset.$$

На части  $S_p$  заданы поверхностные усилия  $p_i^*$ , на части  $S_u$  — перемещения  $u_i^*$ .

Разложение решения по ортонормированному базису приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b},$$

$$A = [a_{km}], \quad \mathbf{c} = \{c_m\}, \quad \mathbf{b} = \{b_k\}, \quad (2.6)$$

$$a_{km} = 2\delta_{km} - \int_{S_p} u_i^m p_i^k \, dS - \int_{S_u} p_i^m u_i^k \, dS, \quad b_k = \int_{S_u} u_i^* p_i^k \, dS + \int_{S_p} p_i^* u_i^k \, dS.$$

Конкретные решения проводятся для отрезка элементов усеченного числом  $N$  базиса и имеют приближенную численно-аналитическую форму.

Точность решения следует обеспечивать с использованием двух факторов. Во-первых, при любом  $N$  должно выполняться неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^N c_k^2 \leq (\xi, \xi)_{\Xi}.$$

Поскольку физический смысл правой части неравенства представляет собой заведомо ограниченную величину — внутреннюю энергию деформирования, то график зависимости суммы

Бесселя от номера  $N$  должен иметь ярко выраженный характер насыщения. Во-вторых, приближенное построение граничного состояния

$$\bar{\gamma} = \sum_{k=1}^N c_k \gamma^{(k)}$$

позволяет оценить интегральную невязку решения с заданными граничными условиями

$$\delta = \|\bar{\gamma} - \gamma^*\|,$$

где под  $\gamma^*$  понимаем набор граничных условий. Уровень невязки  $\delta$  позволяет сделать вывод о достаточности либо недостаточности числа  $N$ , отвечающего за точность приближения.

### 3. Основная смешанная задача для полостного тела

Факт ограниченности области  $V$ , занятой полостным телом, вносит дополнительные трудности при построении решения краевых задач, поскольку базис пространства состояний должен пополняться элементами, отвечающими за внутренность внешней границы тела. С другой стороны, в постановке ОСЗ возможны варианты регулярных ГУ, когда по всей границе полости тип условий не меняется, либо это поверхностные усилия, либо перемещения. Это позволяет искать решения, отвечающие базису, не содержащему сингулярные элементы.

Рассмотрим ОСЗ на примере шара радиуса  $R_p$ , содержащего симметрию расположения полости одинакового радиуса  $R_u$  (рис. 1). Полости наполнены жестким материалом, сцепленным с телом. Поэтому границы полостей имеют жесткие смещения величиной  $u_0$ , которые направлены вертикально ( $\pm u_0$ ) вдоль оси  $z$ . Центры полостей расположены в точках  $\mathbf{r}|_{1,2} = \{0, 0, \pm h\}$ ; радиус-вектор отсчитывается от центра шара  $O$ .

Полагая внешнюю границу шара свободной от нагрузки, имеем ГУ:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= 0, \quad \{x, y, z\} \in S_1, \\ \mathbf{u} &= \{0, 0, -u_0\}, \quad \{x, y, z\} \in S_2, \\ \mathbf{u} &= \{0, 0, u_0\}, \quad \{x, y, z\} \in S_3, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\partial V = S_1 \cup S_2 \cup S_3.$$

Безразмерные значения упругих постоянных таковы:  $\mu = 1$ ,  $\nu = 1,4$ .

Базис пространства внутренних состояний составлен из трех структурно различных наборов элементов: 1) элементы для внутренности шара; 2) элементы для внешности полости  $S_1$  с центром инверсии  $\{0, 0, h\}$ , элементы для внешности полости  $S_2$  с центром инверсии  $\{0, 0, -h\}$ . При расчетах удержано количество элементов размерами  $N_0 = 67$ ,  $N_1 = N_2 = 70$ . Выполнена ортогонализация базисов. Ошибка ортогонализации составила величину порядка  $10^{-10}$  ед.

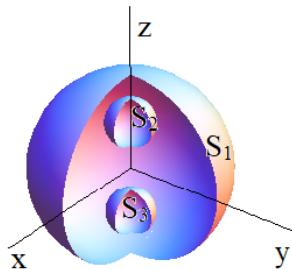


Рис. 1. Двуполостный шар

Fig. 1. Double-sided sphere

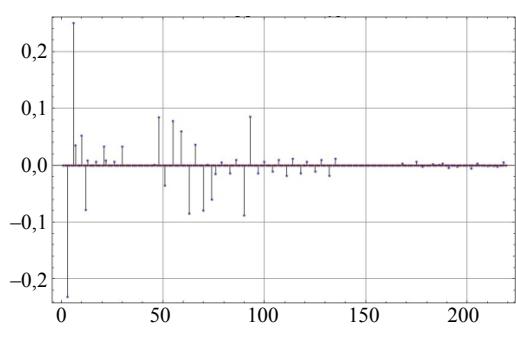


Рис. 2. Коэффициенты Фурье

*Fig. 2. Fourier coefficients*

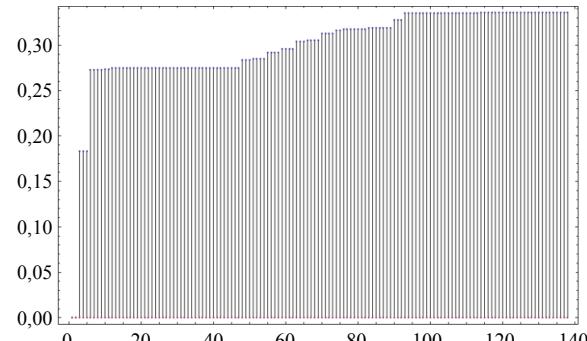


Рис. 3. Насыщение суммы Бесселя

*Fig. 3. Saturation of the Bessel sum*

Сформированы матрица коэффициентов  $A = [a_{km}]_{N \times N}$  при безразмерных значениях  $R_0 = 2$ ,  $R_1 = 1/2$ ,  $h = 1$  и столбец правых частей  $\mathbf{b} = \{b_k\}_N$  системы (2.6). Решение систем дало значения коэффициентов Фурье (рис. 2) и показало характер насыщения суммы Бесселя (рис. 3).

Интегральная невязка характеристик граничного состояния с заданным ГУ составила незначительную величину 0,087. НДС полостного шара изображено на рис. 4, отражающем распределение характеристик внутреннего состояния в осевом сечении  $y = 0$ .

Анализ полей характеристик внутреннего состояния двухполостного шара позволяет сделать ряд выводов.

1. Радиальные перемещения  $\sigma_{xx}|_{y=0}$  в центре шара и вблизи поверхности у экватора являются незначительными. Вблизи полюсов  $z = \pm 0,5$  радиальные волокна сжимаются. Вблизи поверхностей полостей картина их распределения более сложная: идет чередование растяжения и сжатия.

2. Окружные напряжения  $\sigma_{yy}|_{y=0}$  — сжимающие вблизи полюсов и растягивающие вблизи экваториального сечения. Вблизи поверхностей жестких включений их характер противоположный в зависимости от близости к полюсам включений: на удаленном от центра шара полюсе окружные напряжения растягивающие, на приближенном — сжимающие.

3. Осевые напряжения  $\sigma_{zz}|_{y=0}$  слабо выражены на удалении от промежуточного слоя между включениями (полостями) и имеют весьма серьезный сжимающий характер именно в этом слое.

4. Сдвиговые напряжения  $\sigma_{xz}|_{y=0}$  слабо выражены на удалении от включения и имеют существенные значения вблизи экваториальных границ включений.

5. Характер осевых перемещений точек тела полностью согласуется с традиционным представлением о движении точек тела вблизи перемещающихся жестких включений.

#### 4. Основная смешанная задача для односвязного тела

В случае односвязного тела  $V$  постановка смешанной задачи возможна, если линия, разграничитывающая типы ГУ, принадлежит поверхности  $\partial V$ . Регулярный базис пространства внутренних состояний формируется на основе общего решения Аржаных–Слободянского (1.5) и набора однородных гармонических многочленов. Структура базиса является более простой в сравнении с таковой для плоского тела. Особенность и трудность решения заключаются в том, что в точках смены граничных условий возможно сингулярное поведение характеристик внутреннего состояния.

Рассматривается (в безразмерной форме) цилиндр радиуса  $R_0$  и высотой  $H$ , спаянный с жестким штоком по плоскости круга радиуса  $R$  (рис. 5).

Боковая поверхность цилиндра нагружена касательными усилиями интенсивности  $\tau$ . Требуется оценить НДС тела. Практические расчеты проведенные при  $\mu = 1$ ,  $\nu = 1/4$ ,  $H = R_0 = 2$ ,  $R = 1$ . Поле напряжений оценено в масштабе  $\tau$ .

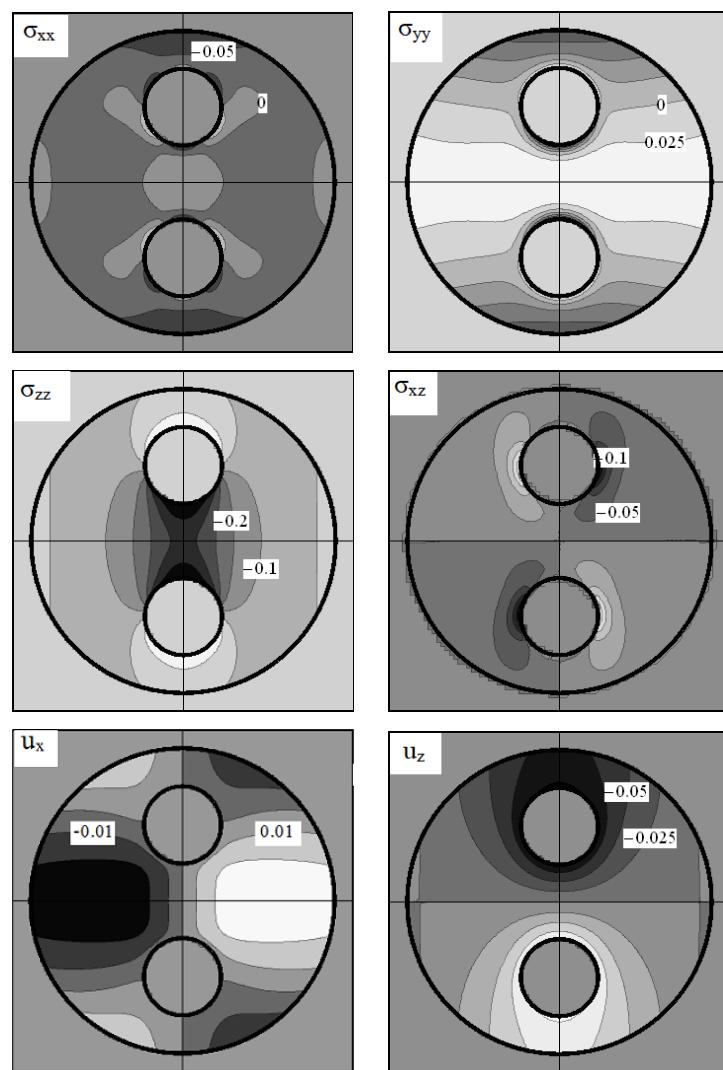


Рис. 4. Поля напряжений и перемещений в осевом сечении шара

*Fig. 4. Stress and displacement fields in the axial section of a sphere*

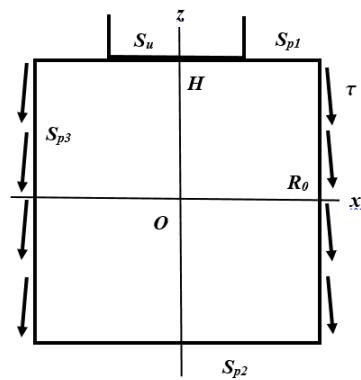


Рис. 5. Цилиндр, спаянный с жестким штоком

*Fig. 5. Cylinder welded to a rigid rod*

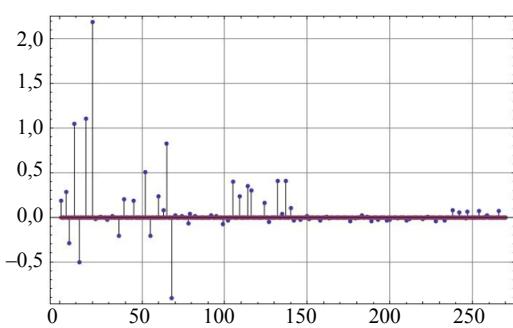


Рис. 6. Коэффициенты Фурье

*Fig. 6. Fourier coefficients*

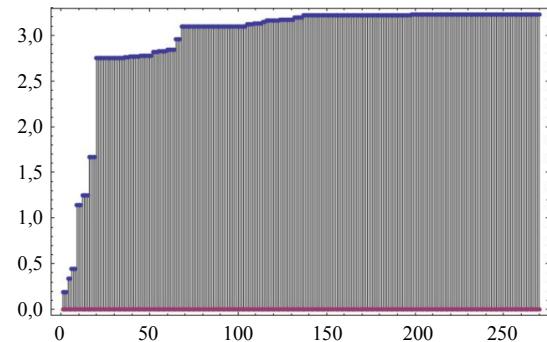


Рис. 7. Насыщение суммы Бесселя

*Fig. 7. Saturation of the Bessel sum*

Ортогонализация базиса выполнена для его довольно существенного размера  $N = 270$ . Погрешность ортогонализации составила  $2,8 \times 10^{-7}$  ед.

Для описания граничных условий поверхность цилиндра разбита на два « пятна »:  $\partial V = S_p \cup S_u$ .  $S_u$  представляет собой круг единичного радиуса на верхнем основании цилиндра (при  $z = H/2$ ).  $S_{p1}$ , есть оставшаяся часть верхнего основания,  $S_{p2}$  — нижнее основание,  $S_{p3}$  — боковая поверхность. ГУ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \{0,0,-\tau\}, \quad \{x,y,z\} \in S_{p3}, \\ \mathbf{p} &= \{0,0,0\}, \quad \{x,y,z\} \in S_{p1} \cup S_{p2}, \\ \mathbf{u} &= \{0,0,0\}, \quad \{x,y,z\} \in S_u. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Построение матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора  $\mathbf{b}$  позволило оценить значения коэффициентов Фурье (рис. 6) и проиллюстрировать насыщение суммы Бесселя (рис. 7).

Невязка построенного граничного состояния с ГУ составила 4,28 ед. Уровни распределения характеристик внутреннего состояния отражены на рис. 8.

Анализ полей НДС цилиндра позволяет сделать ряд выводов.

1. Радиальные напряжения поблизости от  $S_u$  — растягивающие. На противоположном торце цилиндра — сжимающие. Такой же вывод имеет силу относительно окружных напряжений.

2. Вблизи спайки со штоком осевые волокна удлиняются, на противоположной стороне сжимаются. Искажения вблизи боковой поверхности незначительные.

3. Наибольшие сдвиговые эффекты проходят более заметно по мере удаления от оси цилиндра, особенно сильно — в нижней части цилиндра на уровне  $2/3R_0$  от оси и  $1/2H$  от срединной плоскости.

4. Поля перемещений свидетельствуют о довольно значительном смещении вниз внешних кромок цилиндра и, что интересно, поднятию вверх центра нижнего основания.

## Выходы

1. Напряженно-деформированное состояния однородного изотропного линейно-упругого тела описывается определяющими соотношениями среды. Совокупность всех возможных вариантов НДС составляет гильбертово пространство внутренних состояний и ему изоморфное пространство граничных состояний, причем скалярные произведения изоморфных пар элементов этих пространств равны между собой. Общие решения разрешающей системы уравнений Ламе в двух формах Аржаных-Слободянского позволили эффективно сконструировать сепарабельные базисы пространств.

2. После ортогонализации базисов использование граничных условий позволяет оформить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье разложения искомого решения по базисам. Конкретные приближенные решения усеченных

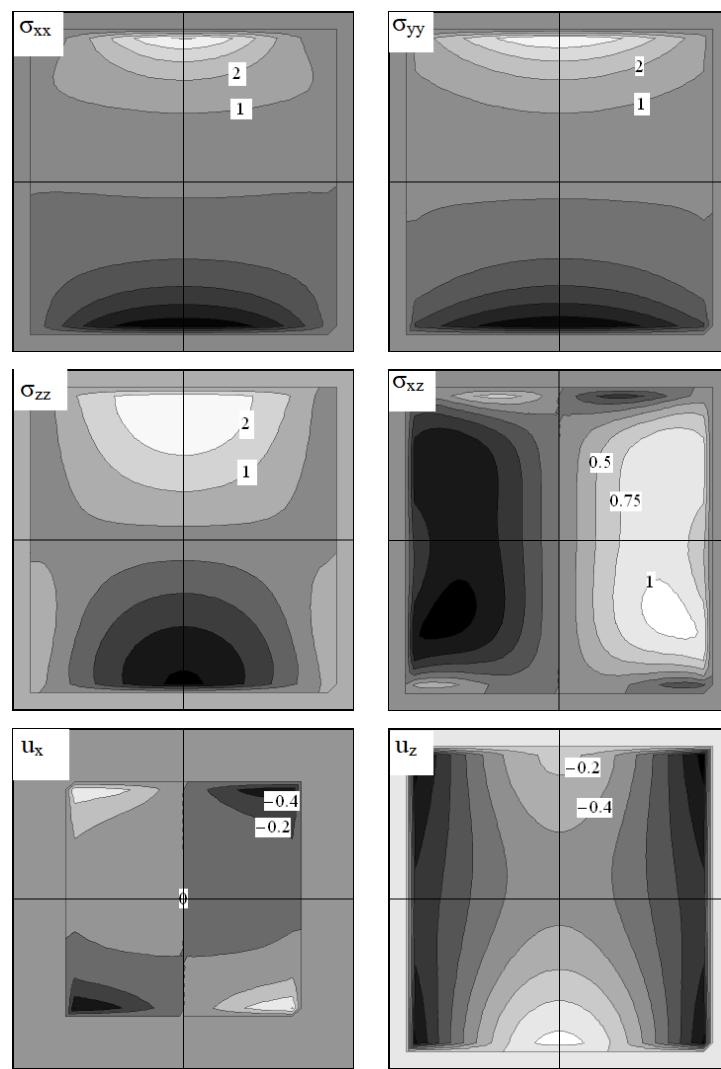


Рис. 8. Поля напряжений и перемещений в осевом сечении цилиндра

*Fig. 8. Stress and displacement fields in the axial section of a cylinder*

систем уравнений строятся на основе использования неравенства Бесселя и оценки уровня невязки найденного граничного состояния с граничными условиями. Такой подход является объективным фактором оценки корректности и точности решения.

3. Выполнено конкретное решение задачи о НДС шара, содержащего две сближающиеся полости. Построено численно-аналитическое решение. Поля напряжения и перемещений проиллюстрированы в осевых сечениях. Сделаны выводы.

4. Выполнено конкретное решение задачи о НДС кругового цилиндра, закрепленного по плоской поверхности жесткого индентора по части верхнего основания и нагруженного по боковой поверхности касательными осевыми усилиями. Построены численно-аналитические решения. Поля напряжения и перемещений проиллюстрированы в осевых сечениях. Сделаны выводы. Отмечена особенность, усложняющая процесс проведения решения: наличие разрыва в характере граничных условий на поверхности тела требует существенного увеличения размерности удерживаемого отрезка базиса и даже запрашивает проведение специальных исследований, «схватывающих» особенности различных типов на линиях разрыва ГУ.

## Литература [References]

1. Работнов, Ю.Н., *Механика деформируемого твердого тела*. Москва, Наука, 1979. [Rabonov, Yu.N., *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela = Mechanics of deformable solids*. Moscow, Nauka Publ., 1979. (in Russian)]
2. Лурье, А.И., *Теория упругости*. Москва, Наука, 1970. [Lurie, A.I., *Teoriya uprugosti = Theory of elasticity*. Moscow, Nauka, 1970. (in Russian)]
3. Ректорис, К., *Вариационные методы в математической физике и технике*. Москва, Мир, 1985. [Rektoris, K., *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike i tekhnike = Variational methods in mathematical physics and engineering*. Moscow, Mir, 1985. (in Russian)]
4. Пеньков, В.В., *Метод граничных состояний в задачах линейной механики*: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Тула, 2002. [Penkov, V.V., *Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh lineynoy mehaniki = The method of boundary states in problems of linear mechanics*: diss. ... cand. phys.-math. sciences, PhD, Tula, 2002. (in Russian)]
5. Харитоненко, А.А., *Моделирование состояний гармонических сред*: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Липецк, 2006. [Kharitonenko, A.A., *Modelirovanie sostoyaniy garmonicheskikh sred = Modeling of the states of harmonic media*: diss. ... cand. phys.-math. sciences. Lipetsk, 2006. (in Russian)]
6. Саталкина, Л.В., *Метод граничных состояний в задачах теории упругости неоднородных тел и термоупругости*: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Липецк, 2010. [Satalkina, L.V., *Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh teorii uprugosti neodnorodnykh tel i termouprugosti = The method of boundary states in problems of the theory of elasticity of inhomogeneous bodies and thermoelasticity*: diss. ... cand. phys.-math. sciences. Lipetsk, 2010. (in Russian)]
7. Иванычев, Д.А., *Метод граничных состояний в задачах теории упругости для анизотропных сред*: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Тула, 2010. [Ivanychev, D.A., *Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh teorii uprugosti dlya anizotropnykh sred = The method of boundary states in problems of elasticity theory for anisotropic media*: diss. ... cand. phys.-math. sciences. Tula, 2010. (in Russian)]
8. Стебенев, И.Н., *Метод граничных состояний в задачах теории упругости об установившихся колебаниях изотропных тел*: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Липецк, 2003. [Stebenev, I.N., *Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh teorii uprugosti ob ustanovivshikhsya kolebaniyakh izotropnykh tel = The method of boundary states in problems of the theory of elasticity on steady-state vibrations of isotropic bodies*: diss. ... cand. phys.-math. sciences. Lipetsk, 2003. (in Russian)]
9. Рязантцева, Е.А., *Метод граничных состояний в задачах теории упругости с сингулярностями физического и геометрического характера*: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Липецк, 2015. [Ryazantseva, E.A., *Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh teorii uprugosti s singulyarnostyami fizicheskogo i geometricheskogo kharaktera = The method of boundary states in problems of the theory of elasticity with singularities of a physical and geometric nature*: diss. ... cand. phys.-math. sciences. 2015. (in Russian)]
10. Шульмин, А.С., *Равновесие изотропного упругого пространства, содержащего полости и включения*: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Липецк, 2014. 68 [Shulmin, A.S., *Ravnovesie izotropnogo uprugogo prostranstva, soderzhashchego polosti i vklucheniya = The equilibrium of an isotropic elastic space containing cavities and inclusions*: diss. ... cand. phys.-math. sciences. Lipetsk, 2014. (in Russian)]
11. Новикова, О.С., *Построение полнопараметрических аналитических решений задач теории упругости на основе метода граничных состояний*: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Липецк, 2019. [Novikova, O.S., *Postroenie polnoparametricheskikh analiticheskikh resheniy zadach teorii uprugosti na osnove metoda granichnykh sostoyaniy = Construction of full-parametric analytical solutions to problems of elasticity theory based on the boundary state method*: diss. ... cand. phys.-math. sciences. Lipetsk, 2019. (in Russian)]
12. Папкович, П.Ф., *Теория упругости*. Москва, Оборонгиз, 1939, [Papkovich, P.F., *Teoriya uprugosti = Theory of elasticity*. Moscow, Oborongiz, 1939. (in Russian)]
13. Аржаных, И.С., *Интегральные уравнения основных задач теории поля и теории упругости*. Ташкент, Изд-во АН УзбССР, 1954. [Arzhanykh, I.S., *Integral'nye uravneniya osnovnykh zadach teorii polya i teorii uprugosti = Integral equations of the basic problems of field theory and elasticity theory*. Tashkent, Publishing House of the Academy of Sciences of the Uzbek SSR, 1954. (in Russian)]
14. Слободянский, М.Г., Общие формы решений уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженных через гармонические функции. *Прикладная математика и механика*, 1954, т. 18, с. 55–74. [Slobodyansky, M.G., General forms of solutions of elasticity equations for simply connected and multiply connected regions expressed in terms of harmonic functions. *Prikladnaya*

- matematika i mehanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 1954, vol. 18, pp. 55–74. (in Russian)]
- 15. Колмогоров, А.Н., *Элементы теории функций и функционального анализа*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2004. [Kolmogorov, A.N., *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza = Elements of the theory of functions and functional analysis*. Moscow, FIZMATLIT, 2004. (in Russian)]
  - 16. Пеньков, В.Б., Левина, Л.В., Сравнительный анализ процедур ортогонализации базисов евклидовых и гильбертовых пространств. *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований*, 2020, № 3, с. 103–107. [Penkov, V.B., Levina, L.V., Comparative analysis of orthogonalization procedures for bases of Euclidean and Hilbert spaces. *Mezhdunarodnyy zhurnal prikladnykh i fundamental'nykh issledovaniiy = International Journal of Applied and Fundamental Research*, 2020, no. 3, pp. 103–107. (in Russian)]
  - 17. Пеньков, В.Б., Саталкина, Л.В., Шульмин, А.С., Применение метода граничных состояний для анализа упругой среды с полостями и включениями. *Прикладная математика и механика*, 2014, т. 78, вып. 4, с. 1–15. [Penkov, V.B., Satalkina, L.V., Shulmin, A.S., Application of the boundary state method for the analysis of elastic media with cavities and inclusions. *Prikladnaya matematika i mehanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, vol. 78, iss. 4, pp. 1–15. (in Russian)]
  - 18. Мусхелишвили, Н.И., *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. Москва, Наука, 1966. [Muskhelishvili, N.I., *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti = Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Moscow, Nauka, 1966. (in Russian)]