

УДК 539.3, 563.24

EDN: HVZNRK DOI: 10.31429/vestnik-22-3-13-23

Некоторые задачи идентификации физико-механических характеристик неоднородных тел при тепловом нагружении

С. А. Нестеров  

Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, ул. Ватутина, 53, Владикавказ, 362025, Россия

✉ Нестеров Сергей Анатольевич; ORCID 0000-0003-3780-5104; SPIN 4902-4083; e-mail: 1079@list.ru

Аннотация. Рассмотрен новый класс коэффициентных обратных задач, в которых реконструкция переменных физико-механических характеристик тел, находящихся под действием тепловой стационарной нагрузки, осуществляется по информации о полях температуры и смещений, измеренных на части границы, свободной от нагружения. В качестве примеров исследованы задачи идентификации одномерных функций: 1) коэффициента теплопроводности стержня; 2) коэффициента податливости термоупругого стержня; 3) коэффициента теплопроводности вытянутого прямоугольника. Решение первой задачи строится путем аппроксимации производной от температуры на отрезке съема дополнительной информации с использованием проекционного метода Галеркина и доопределением производной квадратичным образом в остальной части стержня. Решения второй и третьей задач основаны на алгебраизации физических полей и сужении класса поиска до полиномиальных функций, коэффициенты которых находятся из решения линейных алгебраических систем. Представлены итоги вычислительных экспериментов по реконструкции переменных физико-механических характеристик стержня и вытянутого прямоугольника. Выяснено, что сужение области поиска в классах степенных функций является эффективным подходом при восстановлении функций из того же класса.

Ключевые слова: стержень, прямоугольник, функционально-градиентные материалы, коэффициент теплопроводности, модуль Юнга, коэффициент податливости, коэффициентная обратная задача, идентификация, метод Галеркина, слабая постановка.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Нестеров С. А. Некоторые задачи идентификации физико-механических характеристик неоднородных тел при тепловом нагружении // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 3. С. 13–23. EDN: HVZNRK. DOI: 10.31429/vestnik-22-3-13-23

Поступила 14 июля 2025 г. После доработки 5 сентября 2025 г. Принято 8 сентября 2025 г. Публикация 22 сентября 2025 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2025. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Some Problems of Identification of Physical and Mechanical Characteristics of Inhomogeneous Bodies Under Thermal Loading

S. A. Nesterov  

Southern Mathematical Institute, a branch of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vatulina St., 53, Vladikavkaz, 362025, Russia

✉ Sergey A. Nesterov; ORCID 0000-0003-3780-5104; e-mail: 1079@list.ru

Abstract. Research in the field of inverse problems of identification of variable physical and mechanical characteristics is very relevant due to the widespread use of functionally graded materials in engineering. However, the technological process of their manufacture, due to its multi-stage nature, does not allow to accurately predicting the properties of the finished product. A class of coefficient inverse problems is considered in which the reconstruction of variable physical and mechanical characteristics of bodies under the action of thermal stationary loads is carried out using information on the temperature and displacement fields measured on the part of the boundary free from loading. As examples, the problems of identification of one-dimensional characteristics are studied: 1) the thermal conductivity coefficient of a rod; 2) the compliance coefficient of a thermoelastic rod; 3) the thermal conductivity coefficient of an elongated rectangle. The solution to the first problem is constructed by approximating the derivative of the temperature on the segment of additional information removal using the Galerkin projection method

and extending the definition of the derivative quadratically in the remaining part of the rod. The solutions of the second and third problems are based on the algebraization of physical fields and narrowing the search class to polynomial functions whose coefficients are found from the solution of linear algebraic systems. The results of computational experiments on the reconstruction of variable physical and mechanical characteristics of a rod and an elongated rectangle are presented. It is found that narrowing the search area significantly increases the efficiency of the proposed approaches in restoring functions from the same class.

Keywords: rod, rectangle, functionally graded materials, thermal conductivity coefficient, Young's modulus, compliance coefficient, coefficient inverse problem, identification, Galerkin method, weak statement.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Nesterov, S. A., Some problems of identification of physical and mechanical characteristics of inhomogeneous bodies under thermal loading. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 3, pp. 13–23. DOI: 10.31429/vestnik-22-3-13-23

Received 14 July 2025. Revised 5 September 2025. Accepted 8 September 2025. Published 22 September 2025.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2025. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\) license](#).

Введение

Исследования в области реконструкции переменных физико-механических характеристик весьма актуальны вследствие широкого использования в технике функционально-градиентных материалов (ФГМ) [1], представляющих собой композиты с непрерывным изменением свойств по пространственным координатам вследствие изменения процентного соотношения объемных фракций всех составляющих [2]. В настоящее время при изготовлении ФГМ широко используются аддитивные технологии [3–7], также известные как 3D-печать, что позволяет создавать локальные участки с градиентной микроструктурой материала путём формирования слоев порошкового материала, их поочередного расплавления с помощью лазерного излучения и соединения с предыдущим слоем. Однако аддитивное производство ФГМ ещё сталкивается с некоторыми проблемами, например, нестабильностью соединения материалов из-за разных физических и химических свойств. Также важно контролировать качество печати, так как характеристики ФГМ чувствительны к структурным изменениям.

В силу многоэтапности технологического процесса изготовления ФГМ часто невозможно точно предсказать свойства готового изделия. В случае неоднородных материалов их характеристики можно определить только, используя технологии неразрушающего контроля и решая коэффициентные обратные задачи (КОЗ) [8–10] по некоторой дополнительной информации. В качестве такой информации служат измеренные внутри тела (1-я постановка КОЗ) [11–13] или на его границе под нагрузкой (2-я постановка КОЗ) [14, 15] компоненты физических полей.

Для решения КОЗ обычно используется метод минимизации функционала невязки либо с помощью градиентных методов [16–21], либо нейронных сетей [22, 23]. Однако градиентные методы накладывают специальные условия на целевую функцию, а нейронные сети часто находят локальный минимум вместо глобального. В работах [14, 24–26] рассматривалась 2-я постановка КОЗ термоупругости в случае нестационарных нагрузок. Функции-поправки физико-механических характеристик находились из решения операторных уравнений 1-го рода в ходе итерационного процесса. Этот подход позволял восстанавливать значения функций неоднородности в точках сетки продольной координаты. Однако недостатком данного подхода являются большие затраты машинного времени, связанные с обращением трансформант и аппроксимацией операторных уравнений. Для преодоления этого недостатка в работах [27, 28] этот подход был модифицирован с помощью проекционного метода: физико-механические характеристики поэтапно уточнялись в классах полиномиальных функций в ходе итерационного процесса. Сужение множества поиска позволяло свести обратную задачу к конечномерной алгебраической проблеме, а решение прямой задачи было значительно быстрее из-за применения метода конечных элементов (МКЭ).

Следует заметить, что съём дополнительной информации в области действия нестационарной нагрузки (2-я постановка КОЗ) труднореализуемая задача. Для практической реализации

более подходящей является постановка КОЗ, где области съема дополнительной информации и нагрузки не совпадают, а нагрузка является стационарной.

В данной работе рассмотрен тип КОЗ, в которых реконструкция переменных физико-механических характеристик осуществляется по информации о полях температуры (смещений), измеренных в области, где стационарная нагрузка отсутствует. Исследованы обратные задачи об идентификации переменных физико-механических характеристик жестко заземленного термоупругого стержня и вытянутого прямоугольника. Предложены подходы к решению поставленных КОЗ, позволяющие с помощью алгебраизации прямых задач свести их к обратным задачам в 1-й постановке и сузить множество поиска до полиномиальных функций.

1. Первый подход к решению обратной задачи для стержня

Исследуем КОЗ по идентификации физико-механических характеристик термоупругого стержня при его тепловом стационарном нагружении и съеме дополнительной информации в точках стержня, где нагрузка отсутствует.

Рассмотрим равновесие неоднородного стержня, жестко заземленного на торце $x = 0$, на котором поддерживается нулевая температура. На другом торце $x = l$, свободном от механической нагрузки, действует тепловой поток q_0 .

Математическая постановка задачи статической термоупругости для стержня имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dT}{dx} \right) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.1)$$

$$\frac{d}{dx} \left(E(x) \frac{du}{dx} \right) = \gamma \frac{\partial T}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.2)$$

$$T(0) = 0, \quad -k(l) \frac{\partial T}{\partial x}(l) = q_0, \quad (1.3)$$

$$u(0) = 0, \quad E(l) \frac{du}{dx}(l) = \gamma T(l). \quad (1.4)$$

Здесь T — температура, u — смещение, k — коэффициент теплопроводности, E — модуль Юнга, γ — коэффициент температурных напряжений.

Обезразмерим задачу (1.1)–(1.4) по формулам $z = x/l$, $U = u/l$, $\vartheta = k_0 T / (q_0 l)$, $\delta_0 = \gamma q_0 l / k_0$, $\bar{k} = k/k_0$, $\bar{E} = E/E_0$, k_0 , E_0 — некоторые характерные значения коэффициента теплопроводности и модуля Юнга соответственно.

Постановка обезразмеренной прямой задачи теплопроводности имеет вид

$$\frac{d}{dz} \left(\bar{k}(z) \frac{d\vartheta}{dz} \right) = 0, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad (1.5)$$

$$\vartheta(0) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{d\vartheta}{dz}(1) = 1. \quad (1.6)$$

Суть *обратной задачи 1* состоит в нахождении функции $\bar{k}(z)$ из (1.5), (1.6) по дополнительной информации о температуре, измеренной на отрезке $[0; z_0]$, $z_0 < 1$:

$$\vartheta = f(z), \quad z \in [0; z_0]. \quad (1.7)$$

Зная распределение температуры, постановка прямой задачи термоупругости сводится к задаче теории упругости с фиктивными массовыми $\delta_0 d\vartheta/dz$ и поверхностными $\delta_0 \vartheta(1)$ силами:

$$\frac{d}{dz} \left(\bar{E}(z) \frac{dU}{dz} \right) = \delta_0 \frac{d\vartheta}{dz}, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad (1.8)$$

$$U(0) = 0, \quad \bar{E}(1) \frac{dU}{dz}(1) = \delta_0 \vartheta(1). \quad (1.9)$$

В обратной задаче 2 требуется восстановить функцию $\bar{E}(z)$ из (1.8), (1.9) по дополнительной информации о смещении, измеренном на отрезке $[0; z_0]$, $z_0 < 1$:

$$U = g(z), \quad z \in [0; z_0]. \quad (1.10)$$

Подробно рассмотрим подход к решению обратной задачи 1.

Вначале строим решения прямой задачи (1.5)–(1.6) в виде линейной комбинации координатных функций $\varphi_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, N$:

$$\vartheta(z) = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(z). \quad (1.11)$$

Для нахождения коэффициентов a_i в (1.11), согласно (1.7), имеем систему функциональных уравнений

$$\sum_{i=1}^N a_i \varphi_i = f, \quad 0 \leq z \leq z_0. \quad (1.12)$$

В случае, когда в (1.12) функция f непрерывна на отрезке $0 \leq z \leq z_0$, коэффициенты a_i можно найти с помощью проекционного метода Галеркина из решения СЛАУ:

$$\sum_{i=1}^N A_{ij} a_i = b_j, \quad (1.13)$$

где

$$A_{ij} = \int_0^{z_0} \varphi_i(z) \varphi_j(z) dz, \quad b_j = \int_0^{z_0} \varphi_j(z) f(z) dz, \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Пусть $\varphi_i = z^{1+i}$, $i = 1, 2, \dots, N$, тогда выражение для элементов матрицы системы имеет вид $A_{ij} = \frac{z_0^{3+i+j}}{3+i+j}$. Разрешив систему (1.13), найдем a_i , и, следовательно, температуру по всей длине стержня.

Проинтегрировав уравнение (1.5) с учетом граничных условий (1.6), находим, что тепловой поток равен $Q = 1$ по всему стержню. Тепловой поток в свою очередь является произведением $Q = -\bar{k}(z) \vartheta'$. Следовательно, выполняя алгебраизацию температуры методом Галеркина и находя ее первую производную, определим коэффициент теплопроводности по формуле

$$\bar{k}(z) = -(\vartheta')^{-1}. \quad (1.14)$$

Выполняя аналогичные действия при решении обратной задачи 2, при известном поле температур $\vartheta(z)$ и коэффициенте связанности δ_0 , определим модуль Юнга по формуле

$$\bar{E}(z) = \delta_0 \vartheta(z) (U'(z))^{-1}. \quad (1.15)$$

Проведены вычислительные эксперименты по восстановлению физико-механических характеристик стержня на основе предложенного подхода в пакете Maple. В расчетах полагались $z_0 = 0,7$, $N = 6$. Кроме того, при решении обратной задачи 2 полагалось $\bar{k}(z) = 1$, $\delta_0 = 0,1$.

Входная информация измерялась в наборе равноотстоящих точек на отрезке $[0; z_0]$ путем аналитического решения прямых задач при точных законах изменения физико-механических характеристик. Затем по информации (1.7) для 1-й задачи и (1.10) для 2-й задачи строился интерполяционный многочлен и по методу Галеркина восстанавливались физические поля на всем отрезке $[0; 1]$. Далее находились производные от физических полей и по формулам (1.14), (1.15) вычислялись неизвестные функции-характеристики.

Выяснено, что предложенный подход на отрезке $[0; z_0]$ позволяет восстанавливать функции, которые практически не отличаются от точных функций. В тоже время, на отрезке $[z_0; 1]$

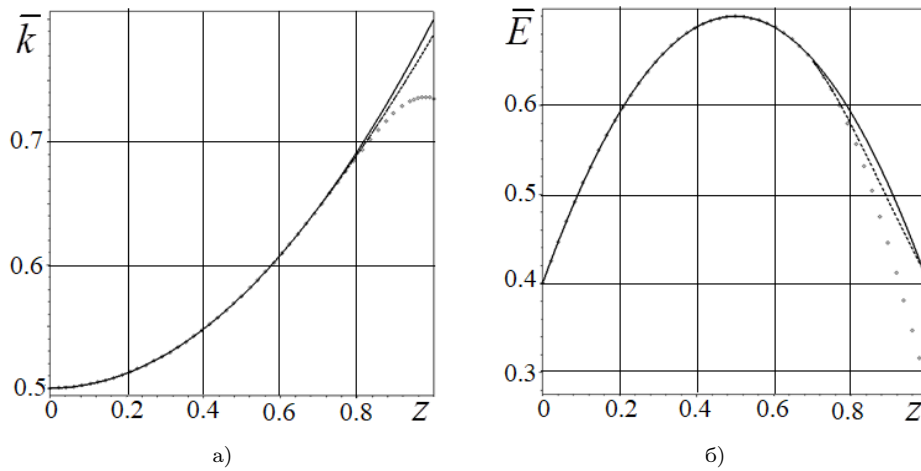


Рис. 1. Восстановление физико-механических характеристик стержня на основе первого подхода:
а) $\bar{k}(z) = 0,5 + 0,3z^2$; б) $\bar{E}(z) = -1,2z^2 + 1,2z + 0,4$

Fig. 1. Reconstruction of the physical and mechanical characteristics of the rod based on the first approach:
а) $\bar{k}(z) = 0,5 + 0,3z^2$; б) $\bar{E}(z) = -1,2z^2 + 1,2z + 0,4$

погрешность восстановления характеристик значительно увеличивается по мере удаления от точки z_0 . Для улучшения реконструкции на этом отрезке в работе по функциям $\vartheta(z)$ (для 1-й задачи) и $U(z)$ (для 2-й задачи), заданным на отрезке $[0; z_0]$, вычислялись производные ϑ' , U' , которые затем экстраполировались на отрезок $[z_0; 1]$, используя разложения в ряд Тейлора функций $\vartheta'(z)$, $U'(z)$ в окрестности точки z_0 квадратичным образом.

В случае, когда точка z_0 близка к 1, нет необходимости доопределять функции ϑ' , U' на отрезок $[z_0, 1]$. Например, аппроксимация $\sum_{i=1}^N a_i \varphi'_i(z)$ с высокой точностью описывает функцию ϑ' на отрезке $[0, z_0 + \Delta z]$ при малом Δz .

На рис. 1 изображены результаты реконструкции квадратичных зависимостей: а) коэффициента теплопроводности $\bar{k}(z) = 0,5 + 0,3z^2$; б) модуля Юнга $\bar{E}(z) = -1,2z^2 + 1,2z + 0,4$. При этом точные функции обозначены сплошной линией; найденные по формулам (1.14), (1.15) — точками; найденные по формулам (1.14), (1.15) с учетом доопределения производных — пунктиром.

2. Второй подход к решению обратной задачи для стержня

Второй подход к решению КОЗ подробно рассмотрим на примере обратной задачи 2, в которой вместо нахождения модуля Юнга будем восстанавливать функцию податливости $Y(z) = \bar{E}^{-1}(z)$.

Сузим пространство поиска решения, аппроксимировав переменный коэффициент податливости степенной функцией $Y_M(z) = \sum_{i=0}^M \chi_i z^i$. Пусть дополнительная информация задана в наборе точек

$$U(z_j) = g_j, \quad 0 \leq z_j \leq z_0. \quad (2.1)$$

Используя (1.15), найдем выражение для производной функции смещения U' , интегрируя которое с учетом граничного условия $U(0) = 0$, получим явный вид функции смещения, зависящей от коэффициентов χ_i , $i = 0, 1, \dots, M$:

$$U(z) = \delta_0 \int_0^z \vartheta(\eta) Y_n(\eta) d\eta = \sum_{i=0}^M \chi_i \xi_i(z), \quad (2.2)$$

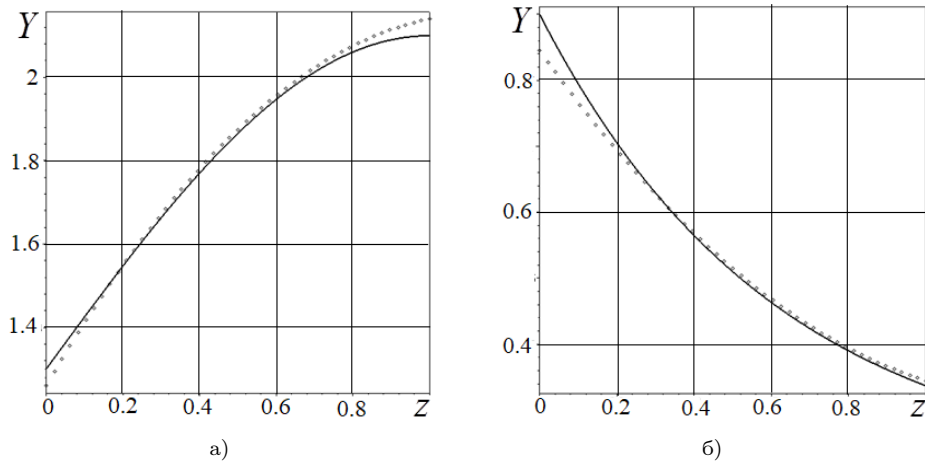


Рис. 2. Итоги восстановления функции податливости стержня на основе второго подхода:

а) $Y(z) = 1,3 + 0,8 \sin(\pi/2 z)$; б) $Y(z) = 0,2 + 0,7e^{-1,63z}$

Fig. 2. Results of reconstruction of the rod compliance function based on the second approach:

а) $Y(z) = 1,3 + 0,8 \sin(\pi/2 z)$; б) $Y(z) = 0,2 + 0,7e^{-1,63z}$.

где

$$\xi_i(z) = \delta_0 \int_0^z \vartheta(\eta) \eta^i d\eta, \quad i = 0, 1, \dots, M.$$

Выполняя в точках $0 \leq z_j \leq z_0$ $M + 1$ условия (2.1), получим СЛАУ относительно коэффициентов χ_i , $i = 0, 1, \dots, M$:

$$\sum_{i=0}^M B_{ij} \chi_i = g_j, \quad j = 0, 1, \dots, M. \quad (2.3)$$

Здесь

$$B_{ij} = \xi_i(z_j) = \delta_0 \int_0^{z_j} \vartheta(\eta) \eta^i d\eta, \quad i, j = 0, 1, \dots, M.$$

В ходе вычислительных экспериментов по восстановлению переменного коэффициента податливости в качестве дополнительной информации использовались значения смещения в $M + 1$ точке внутри отрезка $[0; z_0]$, полученные аналитически из решения прямой задачи (1.8), (1.9) для точных законов $E(z) = Y^{-1}(z)$ при $z_0 = 0,7$, $\bar{k}(z) = 1$, $\delta_0 = 0,04$.

Пусть точная функция имеет вид $Y(z) = 1,3 + 5,5z + 6,2z^2$. Осуществим поиск решения обратной задачи в классе квадратичных функций ($M = 2$), снимая дополнительную информацию в точках $z_1 = 0,1$, $z_2 = 0,4$, $z_3 = z_0$. Результатом реконструкции является функция $Y_2(z) = 1,3 + 5,499998z + 6,200183z^2$, практически не отличающаяся от точной. Вообще, погрешность реконструкции квадратичных зависимостей не превышала 0,1 %. Если функция податливости имеет вид экспоненциальных и тригонометрических зависимостей, то максимальная погрешность реконструкции возрастает до 7 %.

На рис. 2 представлены итоги реконструкции функции податливости стержня: а) $Y(z) = 1,3 + 0,8 \sin(\pi/2 z)$; б) $Y(z) = 0,2 + 0,7e^{-1,63z}$. На этом рисунке точные функции обозначены сплошной линией, а восстановленные характеристики — точками при $z_0 = 0,7$, $\delta_0 = 0,04$ и $\bar{k}(z) = 1$. Результатом решения КОЗ в классе квадратичных полиномов являются следующие функции: а) $Y_2 = 1,26 + 1,58z - 0,7z^2$; б) $Y_2 = 0,85 - 0,82z + 0,32z^2$.

3. Идентификация переменного коэффициента теплопроводности вытянутой прямоугольной области

В разделах 1 и 2 изучены обратные задачи для одномерной области. В данном разделе рассмотрим пример обратной задачи для двумерной области, которую можно свести к задаче в 1-й постановке, а переменные характеристики аппроксимировать в классе полиномиальных функций.

Рассмотрим распространение тепла в вытянутом прямоугольнике. Верхняя и нижняя грани прямоугольника $x_3 = \pm h/2$ теплоизолированы, на боковой грани $x_1 = 0$ поддерживается нулевая температура, а на грани $x_1 = L$ действует тепловой поток $q_0(x_3)$. Коэффициент теплопроводности является функцией координаты x_1 . Математическая постановка задачи теплопроводности для неоднородного прямоугольника имеет вид [27]

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(x_1) \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(k(x_1) \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) = 0, \quad (3.1)$$

$$T(0, x_3) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_3} \left(x_1, \pm \frac{h}{2} \right) = 0, \quad -k(L) \frac{\partial T}{\partial x_1}(L, x_3) = q_0(x_3). \quad (3.2)$$

Обезразмерим задачу (3.1)–(3.2) по формулам $y_1 = x_1/L$, $y_3 = x_3/L$, $\bar{k} = k/k_0$, $H = h/L$, $\vartheta = k_0 T/(q_0 L)$, $Q = q/q_0$.

После обезразмеривания постановка задачи (3.1)–(3.2) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\bar{k}(y_1) \frac{\partial \vartheta}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\bar{k}(y_1) \frac{\partial \vartheta}{\partial y_3} \right) = 0, \quad (3.3)$$

$$\vartheta(0, y_3) = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y_3} \left(y_1, \pm \frac{H}{2} \right) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{\partial \vartheta}{\partial y_1}(1, y_3) = Q(y_3). \quad (3.4)$$

Суть обратной задачи 3 состоит в нахождении функции $\bar{k}(y_1)$ из (3.3)–(3.4) по дополнительной информации о температуре, измеренной в наборе точек на всей верхней грани прямоугольника $y_3 = H/2$:

$$\vartheta^*(y_1) = \vartheta \left(y_1, \frac{H}{2} \right), \quad y_1 \in [0; 1]. \quad (3.5)$$

Исследуя решение прямой задачи (3.3)–(3.4) в конечно-элементном пакете FlexPDE для различных законов неоднородности, выяснено, что в случае равномерно распределенной нагрузки $Q = \text{const}$ и $H \ll 1$ стержневая модель $\vartheta = f(y_1)$ с высокой точностью описывает распространение тепла в вытянутом прямоугольнике.

Найдем решение задачи (3.3)–(3.4) по стержневой модели. Для этого представим функцию температуры в виде линейной комбинации координатных функций $\vartheta(y_1) = \sum_{s=1}^m C_s \psi_s(y_1)$, $\psi_s = y_1^s$. Применяя к (3.5) метод Галеркина, получим СЛАУ для нахождения коэффициентов C_s , $s = 1, 2, \dots, m$.

$$\sum_{s=1}^m G_{sj} C_s = p_j, \quad G_{sj} = \int_0^1 \psi_s \psi_j dy_1 = \frac{1^{1+s+j}}{1+s+j}, \quad p_j = \int_0^1 \psi_j \vartheta^* dy_1, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Далее рассмотрим слабую постановку задачи (3.3)–(3.4) в виде [27]:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-H/2}^{H/2} \bar{k} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y_1} \frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y_3} \frac{\partial v}{\partial y_3} \right) dy_3 dy_1 = \int_{-H/2}^{H/2} Q(y_3) v(1, y_3) dy_3, \quad (3.6)$$

где v — гладкие пробные функции, удовлетворяющие главному граничному условию $v(0) = 0$.

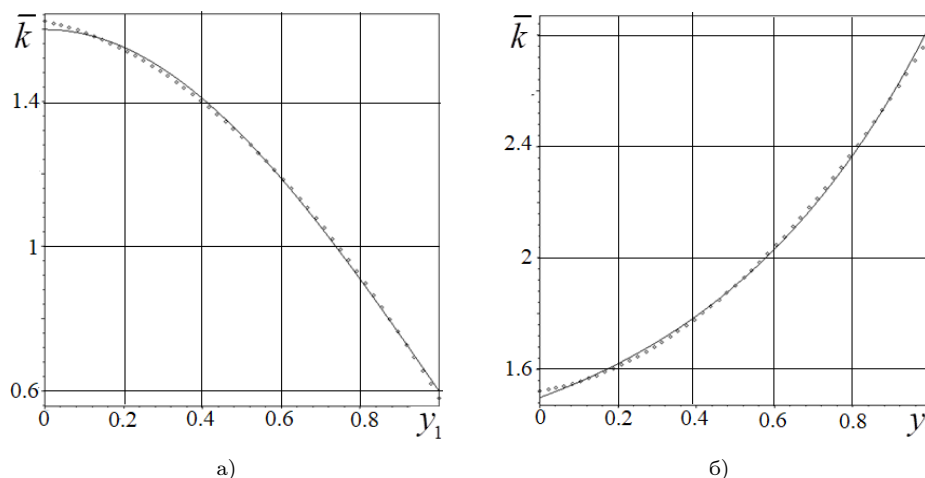


Рис. 3. Реконструкция коэффициента теплопроводности вытянутого прямоугольника:

а) $\bar{k}(y_1) = 0,6 + \cos(\pi/2 y_1)$; б) $\bar{k}(y_1) = 1,2 + 0,3e^{1,7y_1}$

Fig. 3. Reconstruction of the thermal conductivity coefficient of an elongated rectangle:

а) $\bar{k}(y_1) = 0,6 + \cos(\pi/2 y_1)$; б) $\bar{k}(y_1) = 1,2 + 0,3e^{1,7y_1}$

Коэффициент теплопроводности будем разыскивать в классе полиномов в виде

$$\bar{k}(y_1) = \sum_{r=0}^n d_r y_1^r.$$

Подставляя в (3.6) разложение для коэффициента теплопроводности и выбирая пробные функции в виде $v_s = \psi_s(y_1)$, $s = 1, 2, \dots, m$, сформируем СЛАУ относительно коэффициентов неизвестной полиномиальной функции d_r , $r = 0, \dots, n$.

Дополнительная информация (3.5) в работе находилась из решения прямой задачи (3.3)–(3.4) в пакете FlexPDE для точных законов $\bar{k}(y_1)$ при $H = 0,2$. На основе данных (3.5), используя $m = 5$ координатных функций в методе Галеркина, восстанавливается все поле температуры. Коэффициент теплопроводности аппроксимируется квадратичной функцией ($n = 2$), а в качестве пробных функций выбираются: $v_1 = \psi_1(y_1)$, $v_2 = \psi_2(y_1)$, $v_3 = \psi_3(y_1)$. В этом случае погрешность реконструкции не превосходит 0,5 % для квадратичных зависимостей и 2 % для экспоненциальных и тригонометрических функций.

Рис. 3 представляет итоги восстановления коэффициента теплопроводности вытянутого прямоугольника: а) $\bar{k}(y_1) = 0,6 + \cos(\pi/2 y_1)$; б) $\bar{k}(y_1) = 1,2 + 0,3e^{1,7y_1}$. Результатом реконструкции в классе квадратичных полиномов являются функции: а) $\bar{k}(y_1) = 1,623 - 0,232y_1 + 0,809y_1^2$; б) $\bar{k}(y_1) = 1,523 + 0,237y_1 + 1,043y_1^2$.

Проведено исследование влияния зашумления дополнительной информации (3.5) на результаты реконструкции коэффициента теплопроводности. Выяснено, что при 1%-м шуме максимальная погрешность реконструкции функции $\bar{k}(y_1) = 0,6 + \cos(\pi/2 y_1)$ возрастает до 12%.

Заключение

Исследованы задачи идентификации переменных физико-механических характеристик функционально-градиентных тел, находящихся под действием тепловых стационарных нагрузок по информации о граничных полях температуры и смещений, измеренной в области, где нагрузка отсутствует.

Предложены подходы к решению поставленных обратных задач, позволяющие свести их к задачам, в которых переменные функции-коэффициенты определяются по информации о полях, заданных во всей области. Первый этап решения связан с алгебраизацией физических

полей, например, с помощью проекционного метода Галеркина. Для нахождения коэффициента теплопроводности стержня аналитическим путем находится производная от температуры на отрезке съема дополнительной информации и доопределяется квадратичным образом в остальной части стержня. Нахождение коэффициента податливости термоупругого стержня и коэффициента теплопроводности вытянутого прямоугольника основано на сужении класса поиска до степенных функций и нахождению их коэффициентов из решения линейных алгебраических систем.

Проведены вычислительные эксперименты по реконструкции переменных физико-механических характеристик стержня и вытянутого прямоугольника. Выяснено, что степенные законы неоднородности коэффициента податливости термоупругого стержня и коэффициента теплопроводности вытянутого прямоугольника восстанавливаются с погрешностью, не превышающей 0,5 %. Погрешность реконструкции экспоненциальных и полиномиальных функций податливости термоупругого стержня значительно выше, чем степенных функций.

Практическая значимость работы определяется возможностью применения разработанных подходов к решению несвязанных обратных задач термоупругости при статическом нагружении для усовершенствования теоретической базы неразрушающего контроля неоднородных термоупругих материалов с целью идентификации их физико-механических свойств.

Ограничениями к применению предложенных подходов являются: 1) физико-механические характеристики, заданные в виде функций, имеющих точки разрыва; 2) использование тепловых и механических граничных условий 1-го рода; 3) невозможность восстановления удельной теплоемкости и плотности материала, используя только статическое нагружение.

Перспективами дальнейших исследований являются: возможность применения разработанных подходов для решения одномерных обратных задач пороупругости с пустыми порами, а также распространение подходов на решение обратных двумерных задач при статическом нагружении.

Автор выражает благодарность старшему научному сотруднику отдела дифференциальных уравнений Южного математического института Юрову В.О. за ценные рекомендации.

Литература [References]

1. Gupta, A., Talha, M., Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Progress in Aerospace Sciences*, 2015, vol. 79, pp. 1–14. DOI: [10.1016/j.paerosci.2015.07.001](https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2015.07.001)
2. Mohammadi, M., Rajabi, M., Ghadiri, M. Functionally graded materials (FGMs): A review of classifications, fabrication methods and their applications. *Processing and Application of Ceramics*, 2021, vol. 15, iss. 4, pp. 319–343. DOI: [10.2298/PAC2104319M](https://doi.org/10.2298/PAC2104319M)
3. Фомин, В.М., Маликов, А.Г., Голышев, А.А., Булина, Н.В., Анчаров, А.И., Витошкин, И.Е., Брусенцева, Т.А., Филиппов, А.А., Создание функционально-градиентного материала методом аддитивного лазерного сплавления. *Прикладная механика и техническая физика*, 2020, т. 61, №5(363), с. 224–234. [Fomin, V.M., Malikov, A.G., Golyshev, A.A., Bulina, N.V., Ancharov, A.I., Vitoshkin, I.E., Brusentseva, T.A., Filippov, A.A., Creation of a functionally gradient material by the elective laser melting method. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika = Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2020, vol. 61, no. 5, pp. 878–887. DOI: [10.1134/S0021894420050235](https://doi.org/10.1134/S0021894420050235) DOI: [10.15372/PMTF20200523](https://doi.org/10.15372/PMTF20200523)
4. Ghanavati, R., Naffakh–Moosavy, H., Additive Manufacturing of Functionally Graded Metallic Materials: A Review of Experimental and Numerical Studies. *Journal of Materials Research and Technology*, 2021, no. 13, pp. 1628–1664. DOI: [10.1016/j.jmrt.2021.05.022](https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2021.05.022)
5. Рудской, А.И., Попович, А.А., *Функционально-градиентные материалы и аддитивные технологии их получения*. Санкт-Петербург, Политех-пресс, 2022. [Rudskoy, A.I., Popovich, A.A., *Funktsional'no-gradiyentnyye materialy i additivnyye tekhnologii ikh polucheniya = Functionally graded materials and additive technologies for their production*, Sankt-Peterburg, Politech-press, 2022. (in Russian)]
6. Yadav, S., Liu, S., Singh, R.K., Sharma, A.K., Rawat, P., A state-of-art review on functionally graded materials (FGMs) manufactured by 3D printing techniques: Advantages, existing challenges, and future scope. *Journal of Manufacturing Processes*, 2024, vol. 131, pp. 2051–2072. DOI: [10.1016/j.jmapro.2024.10.026](https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2024.10.026)

7. Karimzadeh, M., Basvoju, D., Vakanski, A., Charit, I., Xu, F., Zhang, X., Machine learning for additive manufacturing of functionally graded materials. *Materials*, 2024, vol. 17, art. 3673. DOI: [10.3390/ma17153673](https://doi.org/10.3390/ma17153673)
8. Sinitsa A.V., Capsoni A., Design of novel inverse analysis methodology for exact estimation of elasticity parameters in thermoelastic stress model. *International Communication in Heat and Mass Transfer*, 2022, vol. 135, no. 3, art. 106096. DOI: [10.1016/j.icheatmasstransfer.2022.106096](https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2022.106096)
9. Будник, С.А., Ненарокомов, А.В., Просунцов, П.В., Титов, Д.М., Идентификация математических моделей термоупругости. 1. Анализ и постановка задачи. *Тепловые процессы в технике*. 2017, т. 9, № 3, с. 118–125. [Budnik, S.A., Nenarokomov, A.V., Prosuntsov, P.V., Titov, D.M., Identification of mathematical models of thermoelasticity. 1. Analysis and formulation of the problem. *Teplovyye protsessy v tekhnike* = *Thermal processes in engineering*, 2017, vol. 9, no. 3, pp. 118–125. (in Russian)]
10. Пашаев, А.М., Искендеров, А.Д., Мусаева, М.А., Метод обратных задач тепловой диагностики термоупругих конструкций. *Инженерно-физический журнал*, 2023, т. 96, №6, с. 1419–1428. [Pashaev, A.M., Iskenderov, A.D., Musaeva, M.A., Method of inverse problems for thermal diagnostics of thermoelastic structures. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2023, vol. 96, no. 6, 1407–1415. DOI: [10.1007/s10891-023-02808-8](https://doi.org/10.1007/s10891-023-02808-8)]
11. Chen, W.L., Chou, H.M., Yang, Y.C., An inverse problem in estimating the space – dependent thermal conductivity of a functionally graded hollow cylinder. *Composites Part B: Engineering*, 2013, vol. 50, pp. 112–119. DOI: [10.1016/j.compositesb.2013.02.010](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.02.010)
12. Ni, B., Gao, H., A deep learning approach to the inverse problem of modulus identification in elasticity. *MRS Bulletin*, 2021, vol. 46, pp. 19–25. DOI: [10.1557/s43577-020-00006-y](https://doi.org/10.1557/s43577-020-00006-y)
13. Kamali, A., Sarabian, M., Laksari, K., Elasticity imaging using physics-informed neural networks: Spatial discovery of elastic modulus and Poisson's ratio. *Acta Biomaterialia*, 2023, vol. 155, pp. 400–409. DOI: [10.1016/j.actbio.2022.11.024](https://doi.org/10.1016/j.actbio.2022.11.024)
14. Ватульян, А.О., Нестеров, С.А., Исследование обратных задач термоупругости для неоднородных материалов. *Владикавказский математический журнал*, 2022, т. 24, №2, с. 75–84. [Vatulyan, A.O., Nesterov, S.A., Study of the Inverse Problems of Thermoelasticity for Inhomogeneous Materials. *Siberian Mathematical Journal*, 2023, vol. 64, no. 3, pp. 699–706. DOI: [10.1134/s0037446623030175](https://doi.org/10.1134/s0037446623030175)] DOI: [10.46698/v3482-0047-3223-o](https://doi.org/10.46698/v3482-0047-3223-o)
15. Boumenir, A., The reconstruction of the space-dependent thermal conductivity coefficient. *Numer. Algor.*, 2024, vol. 97, pp. 801–817. DOI: [10.1007/s11075-023-01724-5](https://doi.org/10.1007/s11075-023-01724-5)
16. Lukaszewicz, S.A., Babaei, R., Qian, R.E., Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects. *Journal of Thermal Stresses*, 2003, vol. 26, no. 1, pp. 13–23. DOI: [10.1080/713855763](https://doi.org/10.1080/713855763)
17. Infante, J.A., Molina-Rodríguez, M., Ramos, Á.M., On the identification of a thermal expansion coefficient. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2015, vol. 23, no. 8, pp. 1405–1424. DOI: [10.1080/17415977.2015.1032274](https://doi.org/10.1080/17415977.2015.1032274)
18. Dulikravich, G.S., Reddy, S.R., Pasqualetto, M.A., Colaco, M.J., Orlande, H.R., Coverston, J., Inverse determination of spatially varying material coefficients in solid objects. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 2016, vol. 24, pp. 181–194. DOI: [10.1515/jiip-2015-0057](https://doi.org/10.1515/jiip-2015-0057)
19. Cao, K., Lesnic, D., Liu, J. Simultaneous reconstruction of space-dependent heat transfer coefficients and initial temperature. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2020, no. 375, art. 112800. DOI: [10.1016/j.cam.2020.112800](https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.112800)
20. Mohebbi, F., Evans, B., Rabczuk, T., Solving direct and inverse heat conduction problems in functionally graded materials using an accurate and robust numerical method. *International Journal of Thermal Sciences*, 2021, vol. 159, art. 106629. DOI: [10.1016/j.ijthermalsci.2020.106629](https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2020.106629)
21. Алифанов, О.М., Будник, С.А., Ненарокомов, А.В., Нетелев, А.В., Охалкин, А.С., Чумаков, В.А., Исследование теплофизических свойств градиентных материалов методом обратных задач. *Инженерно-физический журнал*, 2022, т. 95, № 4, с. 1031–1041. [Alifanov, O.M., Budnik, S.A., Nenarokomov, A.V., Netelev, A.V., Okhapkin, A.S., Chumakov, V.A., Investigation of thermophysical properties of gradient materials by the method of inverse problems. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2022, vol. 95, no. 4, pp. 1015–1025. DOI: [10.1007/s10891-022-02560-5](https://doi.org/10.1007/s10891-022-02560-5)] DOI: [10.46698/v3482-0047-3223-o](https://doi.org/10.46698/v3482-0047-3223-o)
22. Diligenskaya, A., Samokish, A., Parametric identification of technological thermophysics processes based on neural network approach. *J. Vibroeng.*, 2021, vol. 23, no. 6, pp. 1407–1417. DOI: [10.21595/jve.2021.22075](https://doi.org/10.21595/jve.2021.22075)

23. Xu, W., Fu, Z., Xi, Q., Thermal conductivity identification in functionally graded materials via a machine learning strategy based on singular boundary method. *Mathematics*, 2022, vol. 10, art. 458. DOI: [10.3390/math10030458](https://doi.org/10.3390/math10030458)
24. Ватульян, А.О., Нестеров, С.А., Решение обратной задачи об идентификации двух термомеханических характеристик функционально-градиентного стержня. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*, 2022, т. 22, № 2, с. 180–195. [Vatulyan, A.O., Nesterov, S.A., Solution of the inverse problem of identification of two thermomechanical characteristics of a functionally graded rod. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika = Bulletin of the Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Computer science*, 2022, vol. 22, no. 2, pp. 180–195. (in Russian) DOI: [10.18500/1816-9791-2022-22-2-180-195](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-180-195) DOI: [10.18500/1816-9791-2022-22-2-180-195](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-180-195)
25. Ватульян, А.О., Нестеров, С.А., Об особенностях идентификации переменных термомеханических характеристик функционально-градиентного прямоугольника. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2023, т. 16, № 4, с. 504–516. [Vatulyan, A.O., Nesterov, S.A., On the features of identification of variable thermomechanical characteristics of a functionally graded rectangle. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred = Computational Continuum Mechanics*, 2023, vol. 16, no. 4, pp. 504–516. (in Russian)] DOI: [10.7242/1999-6691/2023.16.4.42](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.4.42)
26. Нестеров, С.А., О различных подходах к решению коэффициентной обратной задачи теплопроводности для неоднородного стержня. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 3, с. 32–44 [Nesterov, S.A., On various approaches to solving the coefficient inverse problem of heat conductivity for a inhomogeneous rod. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 3, pp. 32–44. (in Russian)] DOI: [10.31429/vestnik-21-3-32-44](https://doi.org/10.31429/vestnik-21-3-32-44)
27. Нестеров, С.А., Реконструкция переменных теплофизических свойств прямоугольной области. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 4, с. 45–54. [Nesterov, S.A., Reconstruction of variable thermophysical properties of a rectangular region. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 4, pp. 45–54. (in Russian)] DOI: [10.31429/vestnik-21-4-45-54](https://doi.org/10.31429/vestnik-21-4-45-54)
28. Нестеров, С.А., Реконструкция переменного коэффициента теплопроводности функционально-градиентного цилиндра. *Инженерный вестник Дона*, 2024, т. 11(119), с. 706–713. [Nesterov, S.A., Reconstruction of the variable thermal conductivity coefficient of a functionally graded cylinder. *Inzhenernyy vestnik Dona = Engineering Bulletin of the Don*, 2024, vol. 11(119), pp. 706–713. (in Russian)]