УДК 539.39 EDN: BFCGRG DOI: 10.31429/vestnik-22-4-6-13

Математическая модель движения шлюпки усилиями гребца. Часть II

П. Г. Великанов[1✉], **Ю. П. Артюхин**[2]

[1] Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111, Россия
[2] Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Россия
✉ Великанов Петр Геннадьевич; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Аннотация. В статье дается описание математической модели движения шлюпки усилиями гребца при помощи отталкивания двух весел от воды с учетом дискретной периодичной их работы на всем интервале времени движения. В качестве движущей силы шлюпки предлагается использовать кусочно-непрерывную (разрывную) функцию угла забрасывания весла (лопасти) при непрерывном времени, которая позволяет успешно интегрировать дифференциальное уравнение движения. В этом случае движущая сила весел является переменной величиной, зависящей от скорости движения шлюпки, и заранее неизвестна. Управляющим параметром является постоянная угловая скорость вращения весел. В статье активно используется аппарат теории обобщенных функций, успешно применяемый в сочетании с привлечением пакета символьной математики для численного решения основного уравнения динамики (нелинейное неоднородное дифференциальное уравнение с начальными условиями). Для выбранных параметров определены путь и скорость движения шлюпки усилиями гребца.

Ключевые слова: движение шлюпки, весла, усилия гребцов, обобщенные функции.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Великанов П. Г., Артюхин Ю. П. Математическая модель движения шлюпки усилиями гребца. Часть II // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 4. С. 6–13. EDN: BFCGRG. DOI: 10.31429/vestnik-22-4-6-13

Поступила 12 августа 2025 г. После доработки 21 октября 2025 г. Принято 27 октября 2025 г. Публикация 2 декабря 2025 г.

Вклад каждого соавтора в процесс написания статьи на разных этапах ее создания: идея работы (Артюхин Ю.П.), вычисления и расчеты (Артюхин Ю.П., Великанов П.Г.), написание статьи, внесение правок и утверждение окончательного варианта (Артюхин Ю.П., Великанов П.Г.). Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Mathematical Model of Boat Movement by the Efforts of the Oarsman. Part II

P. G. Velikanov[1✉], **Yu. P. Artyukhin**[2]

[1] Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, 10, K. Marx st., Kazan, 420111, Russia
[2] Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya st., Kazan, 420008, Russia
✉ Peter G. Velikanov; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Abstract. The article describes a mathematical model of the motion of a dinghy by the efforts of a rower by pushing two oars away from the water, taking into account their discrete periodic operation over the entire time interval of movement. As the driving force of the dinghy, it is proposed to use a piecewise continuous (discontinuous) function of the angle of casting of the paddle (blade) at continuous time, which makes it possible to successfully integrate the differential equation of motion. In this case, the driving force of the oars is a variable value, depending on the speed of the boat, and is unknown in advance. The control parameter is the constant angular velocity of the oars. The article actively uses the apparatus of the theory of generalized functions, which is successfully applied in combination with the use of a package of symbolic mathematics for the numerical solution of the basic equation of dynamics (a nonlinear inhomogeneous differential equation with initial conditions) describing the process of forced oscillations taking into account viscous friction. For the selected parameters, the path and speed of the boat movement are determined by the efforts of the oarsman.

Keywords: movement of the boat, oars, efforts of the rowers, generalized functions.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Velikanov, P. G., Artyukhin, Yu. P., Mathematical model of boat movement by the efforts of the oarsman. Part II. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 4, pp. 6–13. DOI: 10.31429/vestnik-22-4-6-13

Received 12 August 2025. Revised 21 October 2025. Accepted 27 October 2025. Published 2 December 2025.

The contribution of each co-author to the process of writing an article at different stages of its creation: the idea of the work (Y.P. Artyukhin), calculations (Y.P. Artyukhin, P.G. Velikanov), writing the article, making edits and approving the final version (Y.P. Artyukhin, P.G. Velikanov). The authors declare no competing interests.

Введение

В данной статье (часть II), являющейся логическим продолжением ранее опубликованной статьи (часть I) [1], вместо математической модели движения колесного судна исследуется математическая модель движения шлюпки усилиями гребца (гребная шлюпка).

Как известно, гребная шлюпка — это небольшое беспалубное судно, которое приводится в движение с помощью вёсел. Оно используется как для транспортировки людей и грузов, так и для спасательных операций на воде.

Различают шлюпки по типу движителя — гребные, моторные, гребно-парусные, гребно-парусно-моторные; по назначению — служебные (рабочие, разъездные, командирские), спасательные и спортивные; по числу вёсел — двухвёсельные, четырёхвёсельные, шестивёсельные, десятивёсельные и т.д.

Гребные шлюпки разных типов имеют свои ярко выраженные преимущества и недостатки, поэтому у каждой из них есть свои ниши, где их стоит максимально безопасно и экономически эффективно использовать.

В статье активно используется аппарат теории обобщенных функций [2–4], успешно применяемый для реализации различных разновидностей метода граничных элементов [5–25], с привлечением пакета символьной математики Wolfram Mathematica [26, 27].

1. Постановка и решение задач

Основная трудность построения математической модели движения шлюпки усилиями гребца заключается в создании функции движущей силы шлюпки на всем интервале времени движения с учетом дискретности работы весел. В качестве такой функции предлагается использовать кусочно-непрерывную (разрывную) функцию угла забрасывания весла (лопасти) при непрерывном времени, которая позволяет успешно интегрировать дифференциальное уравнение движения. На рис. 1 изображена шлюпка массы M, движение которой определяется в неподвижной системе координат (X, Y) расстоянием $S(t)$. Если в момент времени t шлюпка приобретет скорость $v(t)$ с помощью движущих сил $Q(v(t), \omega)$, то шлюпка будет испытывать сопротивление $R(v(t))$. Здесь ω — постоянная угловая скорость весла.

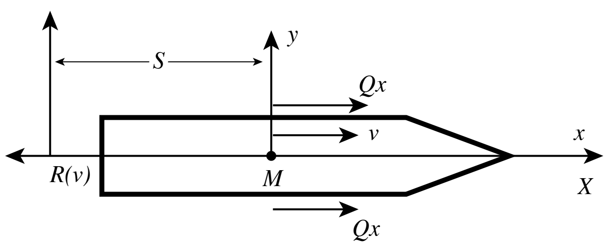

Рис. 1. Математическая модель шлюпки

Fig. 1. Mathematical model of a boat

Дифференциальное уравнение движения шлюпки имеет вид

$$M\frac{\mathrm{d}^2S(t)}{\mathrm{d}t^2} = -R(v(t)) + 2Q(v(t),\omega). \tag{1.1}$$

2. Моделирование работы движения шлюпки усилиями гребца

На рис. 2 показана шлюпка шириной $2l$ и веслами длиной $l+r+b$, причем b — длина лопасти, r — длина весла от воды до уключины, l — длина весла от уключины до рук гребца, h — осадка. Предполагается, что угол наклона весел к воде мал и поэтому проекция весла на горизонт воды практически не отличается от реальных размеров весла.

На рис. 3 показана шлюпка в плоскости воды. Гребец вначале забрасывает весла на угол $\varphi(0) = -\varphi_b$, затем с помощью усилия на рычаге l отбрасывает лопастью весла воду назад до угла $\varphi(T) = \varphi_b$. Шлюпка получает движущую силу $2Q_x = 2Q\cos\varphi(t)$, зависящую от скорости шлюпки $v(t)$.

Входящие в правую часть формулы (1.1) элементы (движущая сила и сопротивление) представимы в виде

$$R(v(t)) = k_p \operatorname{sign}(v)v^2 = k_p \operatorname{sign}(\dot{S})\dot{S}^2, \tag{2.1}$$

где $k_p = c_x A_h \rho/2$; $A_h = 2lh$; $h = M/(2lH\rho)$; k_p — величина, пропорциональная динамической вязкости; sign — функция знака; A_h — поперечная площадь подводной части шлюпки; $\rho = 10^3$ кг/м^3 — плотность воды.

Теперь необходимо определить, с какой силой весло отталкивается от воды. Очевидно, с такой же силой, с какой весло испытывает сопротивление при движении в воде. Сила

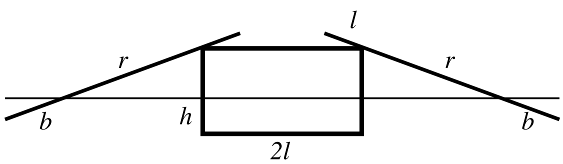

Рис. 2. Модель шлюпки с веслами

Fig. 2. Model of a rowboat with oars

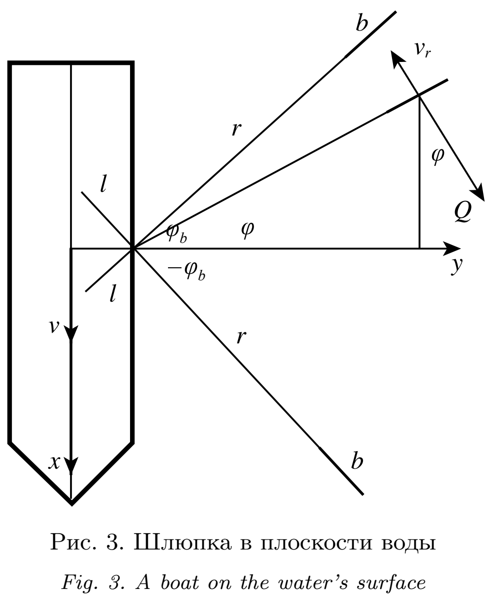

Рис. 3. Шлюпка в плоскости воды

Fig. 3. A boat on the water's surface

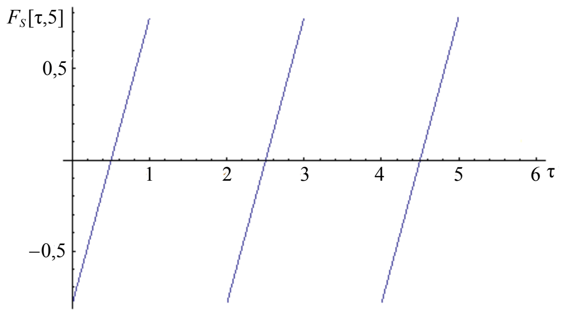

Рис. 4. Закон изменения угла поворота весла в результате 3-х гребков

Fig. 4. The law of change in the angle of rotation of the oar as a result of 3 strokes

сопротивления тонкой пластинки потоку жидкости вычисляется по следующей формуле [28–30]:

$$2Q = c_x A\rho u^2, \tag{2.2}$$

где $u = \omega(r + b/2) - v(t)\cos(\varphi(t))$, c_x — коэффициент сопротивления тонкой пластинки (лопасти весла), $A = ab$ — площадь лопасти весла в воде, a — высота лопасти, u — скорость потока жидкости, перпендикулярная лопасти весла в воде, ω — угловая скорость весла, действующая против часовой стрелки.

Осадка шлюпки вычисляется согласно закону Архимеда из условия равенства сил тяжести шлюпки и гребца Mg выталкивающей силы. Согласно [28] коэффициент гидродинамического сопротивления равен

$$c_x = 0{,}1 \text{ при } H/(2l) = 3; \quad c_x = 0{,}06 \text{ при } H/(2l) = 5.$$

Дальнейшие исследования проведем для следующих данных:

$$\text{M} = 160 \text{ кг}, \quad l = 0{,}45 \text{ м}, \quad r = 2{,}1 \text{ м}, \quad b = 0{,}4 \text{ м},$$

$$\varphi_b = \frac{\pi}{4}, \quad a = 0{,}1 \text{ м}, \quad H = 4 \text{ м}.$$

Для принятых данных осадка шлюпки будет $h = 0{,}044$ м при $H/(2l) = 4{,}444$. На основании вычисленных данных, осуществив интерполирование, находим $c_x = 0{,}07$; $k_p = 1{,}386$ кг/м.

Допустим, что угол $\varphi_b = \pi/4$ и гребец совершает работу, отталкиваясь о воду, давая приращение углу $\Delta\varphi = 2\varphi_b = \pi/2$ за время T. В последующем за то же время весла снова возвращаются в исходное положение, но движущая сила отсутствует. Таким образом, закон изменения поворота весла можно выразить формулой (получается кусочно-непрерывная функция с разрывами при целых значениях $\tau = t/T$, которую можно записать с помощью обобщенных функций Хевисайда), делая аналитическое продолжение до $N_p + 1$ периодов и пользуясь методом индукции, для интервала $0 \leqslant \tau \leqslant N_p + 1$ вида

$$F_s(\tau, N_p) = F(\tau, N_p)\left(1 + \sum_{k=1}^{N_p+1} \{e[\tau - 2k] - e[\tau - 2k + 1]\}\right), \tag{2.3}$$

где $e(\tau - 1) = \begin{cases} 1, & \tau > 1; \\ 0, & \tau < 1 \end{cases}$ — функция Хевисайда [2–4].

Например, на рис. 4 показан закон изменения угла поворота весла в результате 3-х гребков

Задаваясь безразмерным протяжением времени $N_p = 350$ и учитывая нулевые промежутки движущей силы на относительную скорость потока

$$U_0 = U\left\{1 + \sum_{k=1}^{N_p+1} (e[\tau - 2k] - e[\tau - 2k + 1])\right\}, \tag{2.4}$$

Таблица 1. Зависимость периода работы весел T от угловой скорости ω

Table 1. Dependence of the period of operation of the oars T on the angular velocity ω

ω, 1/c	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$
T, c	2	1	2/3	1/2	2/5

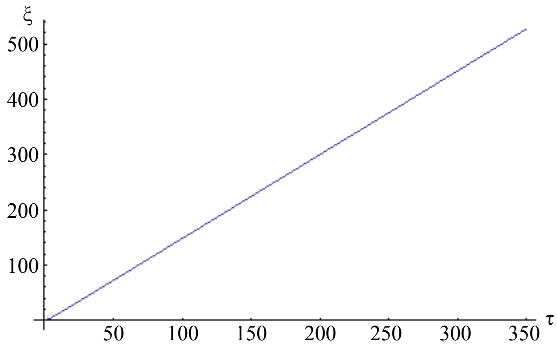

Рис. 5. Функция $\xi = \xi(\tau)$ безразмерного пути

Fig. 5. The dimensionless path function $\xi = \xi(\tau)$

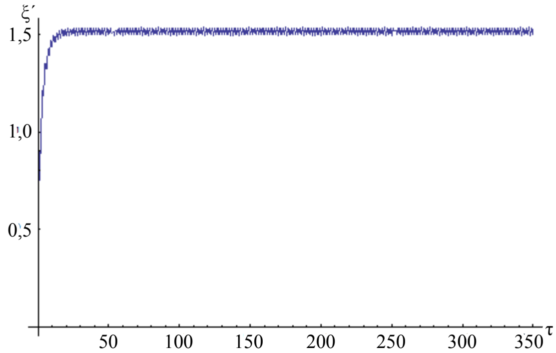

Рис. 6. График предельной скорости $\xi' = \xi'(\tau)$

Fig. 6. Graph of the maximum speed $\xi' = \xi'(\tau)$

где $U = 2\varphi_b(1 + \xi_1/2) - \xi'(\tau)\cos(F_s[\tau, N_p])$, приходим к численному решению дифференциального уравнения вида

$$\xi''(\tau) + 0{,}0181913\,\xi'(\tau)^2\,\mathrm{sign}(\xi'(\tau)) = 0{,}58275\,U_0^2\,\mathrm{sign}(U_0)\cos(F_s[\tau, N_p]) \tag{2.5}$$

при нулевых начальных условиях.

Зависимость периода работы весел T от угловой скорости ω показана в табл. 1.

Численное интегрирование дает следующие результаты, представленные в виде графиков функций (рис. 5–6).

Так как $\xi(350) = 516{,}2$, то реальное расстояние при $\omega = \pi/2$ с$^{-1}$ равно $S = 1084$ м за 5,8 мин. Среднее значение безразмерной скорости при установившемся движении $\xi'_{sr}(350) = 1{,}4848$. В результате получаем скорость движения шлюпки, равную $\nu = 11{,}225$ км/ч.

Заключение

В статье приведено описание математической модели движения шлюпки усилиями гребца при помощи отталкивания двумя веслами от воды с учетом дискретной периодичной их работы. С помощью пакета символьной математики численно было решено полученное нелинейное неоднородное дифференциальное уравнение с начальными условиями. Для выбранных параметров определены путь и скорость движения шлюпки усилиями гребца.

Литература [References]

1. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П. Математическая модель движения колесного судна. Часть I. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2025, т. 22, № 1, с. 18–28. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P. A mathematical model of the movement of a wheeled vessel. Part I. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 1, pp. 18–28. (in Russian)] EDN: NUBNXZ DOI: 10.31429/vestnik-22-1-18-28

2. Гельфанд, И.М., Шилов, Г.Е., *Обобщенные функции и действия над ними.* Москва, Добросвет, 2000. [Gelfand I.M., Shilov G.E., *Obobshchennye funktsii i deystviya nad nimi = Generalized functions and actions on them.* Moscow, Dobrosvet, 2000.(in Russian)]

3. Шилов, Г.Е., *Математический анализ. Второй специальный курс.* Москва, Изд-во МГУ, 1984. [Shilov, G.E., *Matematicheskiy analiz. Vtoroy spetsial'nyy kurs = Mathematical analysis. The second special course.* Moscow, Publishing House of Moscow State University, 1984. (in Russian)]

4. Владимиров, В.С., Жаринов, В.В., *Уравнения математической физики.* Москва, Физико-математическая литература, 2000. [Vladimirov, V.S., Zharinov, V.V., *Uravneniya matematicheskoy fiziki = Equations of mathematical physics.* Moscow, Physical and mathematical literature, 2000. (in Russian)]

5. Шевченко, В.П., Интегральные преобразования в теории пластин и оболочек. Донецк, Донецкий государственный университет, 1977. [Shevchenko, V.P., Integral'nye preobrazovaniya v teorii plastin i obolochek = Integral transformations in the theory of plates and shells. Donetsk, Donetsk State University, 1977. (in Russian)]

6. Артюхин, Ю.П., Грибов, А.П., *Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов.* Казань, Фэн, 2002. [Artyukhin, Yu.P., Gribov, A.P. *Reshenie zadach nelineynogo deformirovaniya plastin i pologikh obolochek metodom granichnykh elementov = Solving problems of nonlinear deformation of plates and flat shells by the method of boundary elements.* Kazan, Fen, 2002. (in Russian)]

7. Грибов, А.П., Великанов, П.Г., Применение преобразования Фурье для получения фундаментального решения задачи изгиба ортотропной пластины. В *Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Всероссийской научной конференции*, 2004, ч. 3, с. 67–71. [Gribov, A.P., Velikanov, P.G., Application of the Fourier transform to obtain a fundamental solution to the problem of orthotropic plate bending. In *Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi: Trudy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii = Mathematical modeling and boundary value problems: Proceedings of the All-Russian Scientific Conference*, 2004, pt. 3, pp. 67–71. (in Russian)]

8. Великанов, П.Г., Исследование термомеханического изгиба длинной пологой цилиндрической панели методом граничных интегральных уравнений. В *Труды 3-го Международного форума «Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки», ч. 3.* Самара: Изд-во СамГТУ, 2007, с. 15–19. [Velikanov, P.G., Investigation of thermomechanical bending of a long flat cylindrical panel by the method of boundary integral equations. In *Trudy 3-go Mezhdunarodnogo foruma «Aktual'nye problemy sovremennoy nauki. Estestvennye nauki», ch. 3 = Proc. of the 3rd International Forum "Actual problems of modern Science. Natural Sciences", pt. 3.* Samara, Publishing House of SamSTU, 2007, pp. 15–19. (in Russian)]

9. Великанов, П.Г., Метод граничных интегральных уравнений для решения задач изгиба изотропных пластин, лежащих на сложном двухпараметрическом упругом основании. *Известия Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2008, т. 8, вып. 1, с. 36–42. [Velikanov, P.G., The method of boundary integral equations for solving bending problems of isotropic plates lying on a complex two-parameter elastic base. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika = Proc. of the Saratov University. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2008, vol. 8, iss. 1, pp. 36–42. (in Russian)]

10. Великанов, П.Г., Куканов, Н.И., Халитова, Д.М., Нелинейное деформирование цилиндрической панели ступенчато-переменной жесткости на упругом основании методом граничных элементов. В *Всероссийская научная конференция с международным участием «Актуальные проблемы механики сплошной среды – 2020»*, 2020, с. 111–115. [Velikanov, P.G., Kukanov, N.I., Khalitova, D.M., Nonlinear deformation of a cylindrical panel of step-variable stiffness on an elastic base by the method of boundary elements. In *Vserossiyskaya nauchnaya konferentsiya s mezhdunarodnym uchastiem "Aktual'nye problemy mekhaniki sploshnoy sredy – 2020" = All-Russian scientific conference with international participation "Actual problems of continuum mechanics – 2020"*, 2020, pp. 111–115. (in Russian)]

11. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Куканов, Н.И., Изгиб анизотропной пластины методом граничных элементов. В *Актуальные проблемы механики сплошных сред*, 2020, с. 105–111. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Kukanov, N.I., Anisotropic plate bending by the boundary elements method. In *Aktual'nye problemy mekhaniki sploshnykh sred = Actual problems of continuum mechanics*, 2020. pp. 105–111. (in Russian)]

12. Великанов, П.Г., Куканов, Н.И., Халитова, Д.М., Использование непрямого метода граничных элементов для расчета изотропных пластин на упругом основании Винклера и Пастернака-Власова. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2021, т. 27, № 2, с. 33–47. [Velikanov, P.G., Kukanov, N.I., Khalitova, D.M., The use of the indirect boundary element method for the calculation of isotropic plates on an elastic base of Winkler and Pasternak-Vlasov. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Bulletin of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 33–47. (in Russian)]

13. Великанов, П.Г., Халитова, Д.М., Решение задач нелинейного деформирования анизотропных пластин и оболочек методом граничных элементов. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2021, т. 27, № 2, с. 48–61. [Velikanov, P.G., Khalitova, D.M., Solving problems

of nonlinear deformation of anisotropic plates and shells by the boundary element method. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Bulletin of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 48–61. (in Russian)]

14. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Общая теория ортотропных оболочек. Часть I. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2022, т. 28, № 1–2, с. 46–54. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., General theory of orthotropic shells. Part I. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Bulletin of Samara University. Natural Science series*, 2022, vol. 28, no. 1-2, pp. 46–54. (in Russian)]
15. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Общая теория ортотропных оболочек. Часть II. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2022, т. 28, № 3–4, с. 40–52. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., General theory of orthotropic shells. Part II. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Bulletin of Samara University. Natural Science series*, 2022, vol. 28, no. 3-4, pp. 40–52. (in Russian)]
16. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Математические аналогии для решения задач прочности, устойчивости и колебаний ортотропных пластин и оболочек. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 3, с. 47–54. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Mathematical analogies for solving problems of strength, stability and vibrations of orthotropic plates and shells. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 47–54. (in Russian)] EDN: WRVRQN DOI: 10.31429/vestnik-21-1-6-20
17. Великанова, Н.П., Великанов, П.Г. Проверка утверждения академика Новожилова Г.В. о влиянии погрешности в определении напряжений на величину погрешности в определении ресурса на примере основных деталей двигателя. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 4. с. 48–56. [Velikanova, N.P., Velikanov, P.G. Verification of the statement of academician Novozhilov G.V. on the influence of the error in determining stresses on the magnitude of the error in determining the resource on the example of the main engine parts. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 48–56. (in Russian)] EDN: JZYKZX DOI: 10.31429/vestnik-19-4-48-56
18. Velikanov, P., Solution of contact problems of anisotropic plates bending on an elastic base using the compensating loads method. *E3S Web of Conferences*, 2023, vol. 402 (International Scientific Siberian Transport Forum – TransSiberia 2023), art. 11010. DOI: 10.1051/e3sconf/202340211010
19. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследования по динамике рамных конструкций. *Геосистемы переходных зон*, 2023, т. 7, № 2, с. 180–195. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Research on the dynamics of frame structures. *Geosistemy perekhodnykh zon = Geosystems of transition zones*, 2023, vol. 7, no. 2, pp. 180–195. (in Russian)]
20. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследование по динамике многоэтажных зданий. *Геосистемы переходных зон*, 2023, т. 7, № 3, с. 304–315. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Research on the dynamics of multi-storey buildings. *Geosistemy perekhodnykh zon = Geosystems of transition zones*, 2023, vol. 7, no. 3, pp. 304–315. (in Russian)]
21. Великанов, П.Г., Математические аналоги и аналогии для решения задач методом граничных элементов. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 1, с. 6–20. [Velikanov, P.G., Mathematical analogies and analogies for solving problems by the boundary element method. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 1, pp. 6-20. (in Russian)] EDN: JYGZJI DOI: 10.31429/vestnik-19-3-47-54
22. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследование композитов в виде слоистых ортотропных оболочек. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 2, с. 23–34. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Investigation of composites in the form of layered orthotropic shells. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 23–34. (in Russian)] EDN: YPNJFT DOI: 10.31429/vestnik-21-2-23-34
23. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследование композитов с помощью уравнений общей теории ортотропных оболочек в комплексной форме. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 3, с. 6–15. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Investigation of composites using the equations of the general theory of orthotropic shells in a complex

form. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 3, pp. 6–15. (in Russian)] EDN: ERCRUG DOI: 10.31429/vestnik-21-3-6-15

24. Великанов, П.Г., Альтернативные методы получения фундаментальных решений дифференциальных уравнений с частными производными для изотропных материалов. Часть I. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 4, с. 6–22. [Velikanov, P.G., Alternative methods for obtaining fundamental solutions of partial differential equations for isotropic materials. Part I. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 4, pp. 6–22. (in Russian)] EDN: DMWKQC DOI: 10.31429/vestnik-21-4-6-22
25. Великанов, П.Г., Альтернативные методы получения фундаментальных решений дифференциальных уравнений и систем в частных производных для изо- и ортотропных материалов. Часть II. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2025, т. 22, № 2, с. 15–30. [Velikanov, P.G., Alternative methods for obtaining fundamental solutions of differential equations and partial differential systems for isotropic and orthotropic materials. Part II. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 2, pp. 15–30. (in Russian)] EDN: SBDBCP DOI: 10.31429/vestnik-22-2-15-30
26. Артюхин, Ю.П., Гурьянов, Н.Г., Котляр, Л.М., *Система Математика 4.0 и ее приложения в механике.* Казань, Казанское математическое общество, Изд-во КамПИ, 2002. [Artyukhin, Y.P., Guryanov, N.G., Kotlyar, L.M., *Sistema Matematika 4.0 i ee prilozheniya v mekhanike = The Mathematics 4.0 system and its applications in mechanics.* Kazan, Kazan Mathematical Society, Publishing House of CamPI, 2002. (in Russian)]
27. Великанов, П.Г., *Основы работы в системе Mathematica.* Казань: Изд-во Казанского гос. техн. ун-та, 2010. [Velikanov, P.G., *Osnovy raboty v sisteme Mathematisa = Fundamentals of work in the Mathematics system.* Kazan, Publishing House of Kazan State Technical University, 2010. (in Russian)]
28. Кошкин, Н.И., Васильчикова, Е.Н., *Элементарная физика.* Москва, АО «Столетие», 1996. [Koshkin, N.I., Vasilchikova, E.N., *Elementarnaya fizika = Elementary Physics.* Moscow, JSC "Stoletye 1996. (in Russian)]
29. Кухлинг, Х., *Справочник по физике.* Москва, Мир, 1985. [Kuhling, H., *Spravochnik po fizike = Handbook of Physics.* Moscow, Mir, 1985. (in Russian)]
30. Арнольд, В.И., *Что такое математика?* Москва, МЦНМО, 2002. [Arnold, V.I., *Chto takoe matematika? = What is mathematics?* Moscow, ICNMO, 2002. (in Russian)]