


УДК 539.3

EDN: BRYIVN DOI: 10.31429/vestnik-22-4-14-23

## Решение основных краевых задач теории упругости для анизотропного цилиндра с участием массовых сил

Д. А. Иванычев , Д. И. Балыкин, Д. В. Ездакова, Ю. А. Бордюгова

Липецкий государственный технический университет, ул. Интернациональная, 5, Липецк, 398600, Россия

✉ Иванычев Дмитрий Алексеевич; ORCID 0000-0002-7736-9311; SPIN 5839-4063; e-mail: [Lsivdml@mail.ru](mailto:Lsivdml@mail.ru)

**Аннотация.** В работе предложена математическая модель по определению напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропных тел вращения, находящихся в условиях краевой задачи теории упругости с одновременным действием массовых сил. Суммарное состояние является не суммой двух состояний от действия каждого фактора, а результат совокупного механического воздействия на внешность и область тела. Для определения упругого поля применен метод граничных состояний. Разработаны методики формирования базисов внутренних и граничных состояний, сопряженных изоморфизмом, сформулированы определяющие соотношения. Решены первая и вторая основные задачи теории упругости для кругового цилиндра из горной породы. Проведен анализ сходимости решений. Результаты представлены в аналитическом и графическом виде.

**Ключевые слова:** массовые силы, метод граничных состояний, краевые задачи, осесимметричные задачи.

**Финансирование.** Исследование не имело спонсорской поддержки.


**Цитирование:** Иванычев Д. А., Балыкин Д. И., Ездакова Д. В., Бордюгова Ю. А. Решение основных краевых задач теории упругости для анизотропного цилиндра с участием массовых сил // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 4. С. 14–23. EDN: BRYIVN. DOI: 10.31429/vestnik-22-4-14-23

Поступила 5 сентября 2025 г. После доработки 14 ноября 2025 г. Принято 18 ноября 2025 г. Публикация 2 декабря 2025 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2025. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## Solution of the Main Boundary Value Problems of Elasticity Theory for an Anisotropic Cylinder with the Participation of Mass Forces

D. A. Ivanychev , D. I. Balykin, D. V. Yezdakova, Yu. A. Bordyugova

Lipetsk State Technical University, Internationalnaya st., 5, Lipetsk, 398600, Russia

✉ Dmitry A. Ivanychev; ORCID 0000-0002-7736-9311; e-mail: [Lsivdml@mail.ru](mailto:Lsivdml@mail.ru)

**Abstract.** The paper proposes a mathematical model for determining the stress-strain state of transversely isotropic bodies of revolution under the conditions of a boundary value problem of elasticity theory with the simultaneous action of mass forces. The total state is not the sum of two states from the action of each factor, but the result of the combined mechanical action on the exterior and region of the body. The boundary state method is used to determine the elastic field. Methods for forming bases of internal and boundary states associated with isomorphism are developed, and defining relations are formulated. The first and second main problems of elasticity theory for a circular cylinder made of rock are solved. An analysis of the convergence of solutions is carried out. The results are presented in analytical and graphical form.

**Keywords:** mass forces, boundary state method, boundary value problems, axisymmetric problems.

**Funding.** The study did not have sponsorship.

**Cite as:** Ivanychev, D. A., Balykin, D. I., Yezdakova, D. V., Bordyugova, Yu. A., Solution of the main boundary value problems of elasticity theory for an anisotropic cylinder with the participation of mass forces. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 4, pp. 14–23. DOI: 10.31429/vestnik-22-4-14-23

Received 5 September 2025. Revised 14 November 2025. Accepted 18 November 2025. Published 2 December 2025.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2025. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

## **Введение**

В условиях современного машиностроения, строительства и авиации материалы с анизотропными упругими свойствами становятся все более популярными, поскольку они обеспечивают улучшенные характеристики прочности и устойчивости при значительной экономии веса. Однако анизотропия материалов создает множество сложностей при расчетах и анализе деталей, так как их поведение под нагрузкой может значительно отличаться в зависимости от направления приложения сил.

При анализе деталей из анизотропных материалов важно учитывать как внутренние, так и внешние воздействия. Внутренние силы, такие как силы инерции, возникают в результате движения деталей, особенно в динамических системах. Эти силы могут значительно влиять на распределение напряжений и деформаций внутри материала. Внешние силы, такие как нагрузки от эксплуатации или воздействия окружающей среды, также играют ключевую роль в формировании напряженно-деформированного состояния.

К тому же, границы деталей часто накладываются различными кинематическими условиями, что добавляет еще один уровень сложности в расчет. Например, жесткие соединения, подвижные опоры или фиксированные замыкания могут существенно изменить поведение конструкции под действием внешних и внутренних сил. Все это создает необходимость в разработке или усовершенствовании методов расчета, чтобы учитывать особенности поведения анизотропных материалов и их реакцию на различные виды нагрузок.

Массовые или объемные силы в задачах механики твердых тел рассматривались в работах различного направления. В работе [1] редуцируется обратный метод определения напряженно-деформированного состояния изотропных упругих тел от действия непрерывных непотенциальных объемных сил.

Метод граничных состояний с участием объемных сил для изотропной среды применен в работе [2]. В работе [3] продемонстрирован прием включения в круг расчетных вопросов метода граничных состояний объемных сил упругой среды, составляющих линейную комбинацию «эталонных» воздействий на односвязное ограниченное тело. В работе [4] разработана методика получения полнопараметрических решений для анизотропных тел, где возникновение фиктивных массовых сил являлось следствием применения метода Пуанкаре.

В работе [5] метод граничных состояний применен для решения краевой задачи теории упругости для трансверсально-изотропного цилиндра с заземленным торцом. В работе [6] решены контактные осесимметричные задачи без трения для трансверсально-изотропных цилиндров при наличии массовых сил. По схожей теории в работе [7] построено решение второй основной задачи для этого же цилиндра.

В рамках настоящей работы предлагается развитие энергетического метода граничных состояний на класс задач теории упругости с комбинированными граничными условиями при наличии массовых сил для трансверсально-изотропных тел вращения. Особенность решения состоит в том, что искомое упругое поле удовлетворяет одновременно заданным условиям на границе тела и условиям внутри области (массовые силы), а не представляет собой сумму решений частных задач.

## **1. Постановка задачи**

Рассматривается равновесие трансверсально-изотропного тела вращения. На границе тела могут быть заданы в условиях первой основной задачи усилия  $R$ ,  $Z$  (рис. 1) и в условиях второй основной задачи перемещения  $u$ ,  $w$ ; одновременно на тело действуют массовые силы  $X$ . Все внешние условия, включая массовые силы, носят осесимметричный характер относительно оси вращения  $z$ . Деформации не превышают упругой зоны.

Целью работы является определение напряженно-деформированного состояния, возникающего в теле под одновременным воздействием всех этих факторов.

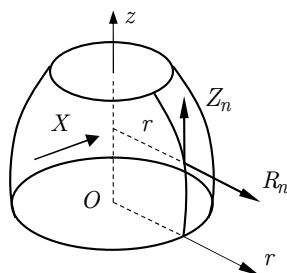


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения

Fig. 1. Transversally isotropic body of rotation

## 2. Метод решения

Для решения поставленных задач используется метод граничных состояний (МГС) [8]. МГС является энергетическим методом решения задач уравнений математической физики.

Фундамент метода составляют пространства внутренних  $\Xi$  и граничных  $\Gamma$  состояний:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}; \quad \Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots\}.$$

Внутреннее состояние определяется наборами компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений:

$$\xi_k = \{u_i^k, \varepsilon_{ij}^k, \sigma_{ij}^k\}.$$

Воспользуемся при построении решения основных задач механики принципом возможных перемещений при упругом равновесии тела [9]:

$$\int_V \mathbf{X} \mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{P}_v \mathbf{u}_v dS - \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = 0. \quad (2.1)$$

Придавая перемещениям возможные вариации  $\delta \mathbf{u}$ , из последнего уравнения вытекает в вариационное уравнение Лагранжа [9].

**Первая основная задача.** Заданы массовые силы  $\mathbf{X} \in \{R, Z\}$  внутри области и усилия на границе  $\mathbf{P}_v \in \{p_r, p_z\}$ .

Скалярное произведение в пространстве  $\Xi$  внутренних состояний выражается через внутреннюю энергию упругого деформирования (отсюда и принадлежность метода к классу энергетических). Например, для 1-го и 2-го внутреннего состояния тела, занимающего область  $V$

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dv, \quad (2.2)$$

причем в силу коммутативности состояний среды

$$(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2, \xi_1) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV = \int_V \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1 dV.$$

Граничное состояние  $\gamma_k$ , в зависимости от традиционного  $\gamma_k = \{u_{vi}^k, p_i^k\}$ , определяемого в [8], будем формировать наборами компонент вектора перемещения точек границы  $u_{vi}$ , поверхностными усилиями  $p_i$  и массовыми силами  $X_i$  (последнее условно в силу того, что массовые силы не относятся к элементу поверхности тела):

$$\gamma_k = \{u_{vi}^k, p_i^k, X_i^k\}, \quad p_i^k = \sigma_{ij}^k n_j,$$

где  $n_j$  — компонента нормали к границе.

В пространстве граничных состояний  $\Gamma$  согласно (2.1) скалярное произведение выражает работу внешних сил по поверхности тела  $dS$  и работу массовых сил на перемещениях внутренних точек тела  $u_i$ , например, для 1-го и 2-го состояния:

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_S p_i^1 u_{vi}^2 dS + \int_V X_i^1 u_i^2 dV, \quad (2.3)$$

причем в силу принципа возможных перемещений

$$(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_2, \gamma_1) = \int_S p_i^1 u_{vi}^2 dS + \int_V X_i^1 u_i^2 dV = \int_S p_i^2 u_{vi}^1 dS + \int_V X_i^2 u_i^1 dV.$$

В случае гладкой границы и в силу (2.2) оба пространства состояний являются гильбертовыми и сопряжены изоморфизмом. По определению, каждому элементу  $\xi_k \in \Xi$  соответствует единственный элемент  $\gamma_k \in \Gamma$ , причем это соответствие взаимно-однозначное:  $\xi_k \leftrightarrow \gamma_k$ . Это позволяет отыскание внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния. Последнее существенно зависит от краевых условий.

Базисы пространств необходимо проортонормировать. Ортонормирование базиса пространства  $\Xi$  осуществляется по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [10], где в качестве перекрестных скалярных произведений принимается (2.2).

Проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье разложения искомого внутреннего  $\xi$  и граничного  $\gamma$  состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k; \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k$$

или в развернутом виде

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_i^k; \quad u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^k; \quad (2.4)$$

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^k; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^k; \quad X_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_i^k.$$

Коэффициенты Фурье имеют вид

$$c_k = \int_V \mathbf{X} \mathbf{u}^k dV + \int_S \mathbf{p}_v \mathbf{u}_v^k dS,$$

где  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{u}_v^k$  — вектор перемещения в  $k$ -ом базисном элементе базисов внутренних (2.1) и граничных (2.4) состояниях.

**Вторая основная задача.** Заданы массовые силы  $\mathbf{X} \in \{R, Z\}$  и перемещения точек границы  $\mathbf{u}_v \in \{u, w\}$ .

Во второй основной задаче в процессе ортогонализации используются скалярные произведения (2.2) и (2.3) соответственно в базисе внутренних и граничных состояний. Ортонормированность базиса граничных состояний позволяет для его элементов записать

$$\int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS + \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + \int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS = 2\delta_{ij}. \quad (2.5)$$

Заменяя в (2.5) базисные механические элементы  $\mathbf{X}^j$ ,  $\mathbf{u}_v^j$  заданными  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{u}_v$  и осуществляя перебор по индексу  $j$ , образуем матрицы коэффициентов

$$\beta_{ij} = \int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS; \quad \alpha_j = \int_V \mathbf{X} \mathbf{u}^j dV + \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v dS;$$

$$A = [\alpha_j]_N; \quad B = [\beta_{ij}]_{N \times N}.$$

Коэффициенты Фурье  $c = \{c_k\}_N$  в случае второй основной задачи рассчитываются так

$$c = \{c_k\}_N = B^{-1}A, \quad (2.6)$$

где  $N$  — число используемых элементов базиса. Окончательно решение имеет вид (2.4).

Во всех задачах тестирование коэффициентов Фурье осуществляется подстановкой одного из базисных элементов с соответствующими граничными условиями (ГУ) в качестве заданного, при этом должны выполняться условия  $c_n = 1$ ,  $n$  — номер тестируемого элемента, остальные коэффициенты Фурье должны равняться нулю.

### 3. Общее решение

В работе [11] на основе метода интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженным и деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного тела и определенными вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которого зависят от двух координат  $z$  и  $y$  (переменных).

В качестве плоских вспомогательных состояний используется плоская деформация, возникающая в цилиндрах, имеющих в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости  $zy$  (направление  $\eta$ ) [11]:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{pl} &= -\operatorname{Re}[\gamma_1^2 \varphi_1'(\varsigma_1) + \gamma_2^2 \varphi_2'(\varsigma_2)]; \\ \sigma_y^{pl} &= \operatorname{Re}[\varphi_1'(\varsigma_1) + \varphi_2'(\varsigma_2)]; \quad \sigma_{zy}^{pl} = -\operatorname{Re}[\gamma_1 \varphi_1'(\varsigma_1) + \gamma_2 \varphi_2'(\varsigma_2)]; \\ \sigma_\eta^{pl} &= \nu_r \sigma_y^{pl} + \nu_z \frac{E_r}{E_z} \sigma_z^{pl}; \quad \tau_{z\theta} = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0; \\ u_z^{pl} &= \operatorname{Re}[p_1 \varphi_1(\varsigma_1) + p_2 \varphi_2(\varsigma_2)]; \\ u_y^{pl} &= \operatorname{Re}[iq_1 \varphi_1(\varsigma_1) + iq_2 \varphi_2(\varsigma_2)], \end{aligned} \quad (3.1)$$

где константы  $q_1$  и  $p_1$  определены упругими параметрами материала;  $\varsigma_j = z/\gamma_j + iy$ ,  $\gamma_j$  — комплексные корни характеристического уравнения

$$\left(1 - \nu_z^2 \frac{E_r}{E_z}\right) \gamma_j^4 - \left[\frac{E_z}{G_z} - 2\nu_z(1 + \nu_r)\right] \gamma_j^2 + (1 - \nu_r^2) \frac{E_z}{G_r} = 0,$$

функции  $\varphi_j(\varsigma_j)$  — аналитические по своим переменным.

Используя соотношения (3.1), осуществляется переход к осесимметричному пространственному состоянию в цилиндрических координатах [11]:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_z^{pl}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_{zr} = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_{zy}^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_{z\theta} = \sigma_{r\theta}; \\ \sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} - \sigma_\eta^{pl})(2y^2 - r^2)}{r^2 \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_r + \sigma_\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} + \sigma_\eta^{pl})}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \\ u &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_y^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad w = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_z^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad v = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Выражения (3.2) определяют осесимметричное напряженно-деформированное состояние в любой точке однородного сплошного тела.

#### 4. Состояние от массовых сил и формирование базиса

Основной сложностью формирования решения в МГС является конструирование базиса внутренних состояний, который опирается на общее или фундаментальное решение для среды, также возможно использование каких-либо частных или специальных решений.

Для построения поля перемещений от массовых сил для плоских вспомогательных состояний применяется фундаментальная ортонормированная система многочленов  $y^\alpha z^\beta$ , которую можно поместить в любую позицию вектора перемещения  $\mathbf{u}^{pl}(y, z)$ , образуя некоторое допустимое упругое плоское вспомогательное состояние

$$\mathbf{u}^{pl} = \{\{y^\alpha z^\beta, 0\}, \{0, y^\alpha z^\beta\}\}.$$

Перебор всевозможных вариантов в пределах  $\alpha + \beta \leq n$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) позволяет получить множество состояний. Далее согласно (2.1) определяются компоненты вектора перемещения пространственного осесимметричного состояния и по цепочке (2.1)–(2.3) определяются соответствующие тензоры деформаций, напряжений и массовые силы, образуя конечномерный базис в задаче от массовых сил

$$\Xi^X = \{\xi_1^X, \xi_2^X, \xi_3^X, \dots, \xi_k^X, \dots\}.$$

Базисные наборы в задаче эластостатики можно конструировать, генерируя возможные варианты для двух аналитических функций  $\varphi_1(s_1)$  и  $\varphi_2(s_2)$  плоского вспомогательного состояния (3.1).

Базисные внутренние состояния в этом случае генерируются согласно наборам

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(s_1) \\ \varphi_2(s_2) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} s_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ s_2^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i s_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i s_2^n \end{pmatrix}, \dots \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Определяются все механические характеристики плоского вспомогательного состояния, далее следует переход к трехмерному состоянию по зависимостям (3.2), образуя конечномерный базис в задаче эластостатики

$$\Xi^S = \{\xi_1^S, \xi_2^S, \xi_3^S, \dots, \xi_k^S, \dots\}.$$

В первой основной задаче используется базис (3.1), построенный только на элементах состояний от действия массовых сил.

Во второй основной задаче используется объединенный базис

$$\Xi = \{\xi_1^S, \xi_2^X, \xi_3^S, \xi_4^X, \xi_{k-1}^S, \xi_k^X, \dots\},$$

в противном случае будет наблюдаться расходимость решения.

#### 5. Решение задач

Исследуем упругое состояние трансверсально-изотропного кругового цилиндра из горной породы алевролита крупного темно-серого [9]. После процедуры обезразмеривания параметров задачи (аналогия которой приведена в работе [12]) цилиндр занимает область  $V = \{(z, r) \mid 0 \leq r \leq 1, -2 \leq z \leq 2\}$  и упругие характеристики материала:  $E_z = 6,21$ ;  $E_r = 5,68$ ;  $G_r = 2,29$ ;  $G_z = 2,55$ ;  $\nu_z = 0,22$ ;  $\nu_r = 0,24$ .

**Первая основная задача.** Рассмотрим для цилиндра первую основную задачу механики с внешними усилиями, имитирующими однородное растяжение вдоль оси  $z$  и неоднородное — вдоль оси  $r$ :

$$p_r = 0; p_z = -1, S_1 \mid z = -2, 0 \leq r \leq 1;$$

$$p_r = 0; p_z = 1, S_2 \mid z = 2, 0 \leq r \leq 1;$$

Таблица 1. Компоненты вектора перемещения в первой основной задаче

Table 1. The components of the displacement vector in the first main problem

$n$	$u$	$w$
$\xi_1$	0	$0,263 z$
$\xi_2$	$0,18528 r$	$-0,10429 z$
$\xi_3$	0	$0,11427 z^2$
$\xi_4$	$0,15544 r z$	$-0,04374 z^2$
$\xi_5$	$-0,3983 r z$	$0,32323 r^2 + 0,01121 z^2$

$$p_r = 4 - z^2; p_z = 0, S_3 | r = 1, -2 \leq z \leq 2$$

и массовыми силами  $\mathbf{X} = \{r^2, z\}$ .

После построения базиса внутренних состояний, процедуры его ортонормирования и исключения линейно зависимых элементов, базисный набор для компонент вектора перемещения представлен в табл. 1 (показано 5 элементов).

При решении использовался базис из 52 элементов. Базис в 52 элемента брался из расчета необходимого для достижения высокой точности количества элементов, достаточного для того, чтобы считать решение практически строгим. Приближенное решение имеет аналитический вид (приведем выражения для перемещений и массовых сил):

$$u = [479558 r - 1273,25 r^3 - 791,76 r^5 + 156,23 r^7 - 12190,3 r z^2 + 665 r^3 z^2 - 393,48 r^5 z^2 + 1,54 r^7 z^2 - 281,27 r z^4 + 40,083 r^3 z^4 + 141,88 r^5 z^4 + 124,87 r z^6 - 78,874 r^3 z^6 + 3,105 r z^5] \cdot 10^{-5};$$

$$w = [10005,1 z + 11670,4 r^2 z + 135,833 r^4 z - 88,783 r^6 z + 8,0848 r^8 z + 100 z^3 - 936,646 r^2 z^3 + 853,594 r^4 z^3 - 6,3186 r^6 z^3 + 153,371 z^5 - 191,719 r^2 z^5 - 139 r^4 z^5 - 24,56 z^7 + 41,8 r^2 z^7] \cdot 10^{-5}.$$

Полученные компоненты напряженно-деформированного состояния удовлетворяют всем соотношениям теории упругости [13].

Следует отметить, что сходимость в направлении поверхностных сил наблюдается быстрее, чем в направлении массовых сил. Поверхностные силы восстанавливаются с достаточной точностью уже при использовании 20 элементов базиса. Для достижения удовлетворительной точности в отношении массовых сил такого количества используемых элементов недостаточно.

При практической реализации приема решения первой основной задачи для цилиндра и его тестирования при различных видах функций заданных массовых сил наблюдалась следующая особенность: если область интегрирования  $V$  симметрична относительно плоскости  $z = 0$ , то сходимостью решения в части восстановления массовых сил обладают задачи с кососимметричной относительно этой плоскости компонентой массовых сил  $Z$ , например  $Z = z^n$ ,  $n = 1, 3, 5, \dots$ . Это связано с видом базисных функций и, естественно, ограничивает круг рассматриваемых задач.

**Вторая основная задача.** Пусть теперь этот же цилиндр находится под действием массовых сил  $\mathbf{X} = \{r, z^3\}$  при условии того, что теперь его граница закреплена  $\mathbf{u}_v = 0$ .

После процедуры ортонормирования и исключения линейно-зависимых элементов базисный набор для компонент вектора перемещения представлен в табл. 2 (показано 8 элементов).

Проверка результата и оценка точности решения осуществляется сопоставлением заданных ГУ с восстановленными в результате решения (рис. 2), а также сопоставлением полученного поля массовых сил с заданным полем. Здесь заданные (||||) и восстановленные (—) ГУ

Таблица 2. Компоненты вектора перемещения во второй основной задаче

Table 2. Components of the displacement vector in the second main problem

$n$	$u$	$w$
$\xi_1$	0	$0,26389z$
$\xi_2$	$0,18528r$	$-0,10429z$
$\xi_3$	0	$0,11427z^2$
$\xi_4$	$0,14435rz$	$0,06455r^2 - 0,04062z^2$
$\xi_5$	$0,07007rz$	$-0,31671r^2 - 0,01972z^2$
$\xi_6$	$-0,09r - 0,02311r^3 + 0,08488rz^2$	$0,18204z + 0,08488r^2z - 0,05612z^3$
$\xi_7$	$-0,0585r - 0,01502r^3 + 0,0551rz^2$	$-0,2335z + 0,0551r^2z + 0,05149z^3$
$\xi_8$	$0,19119r - 0,03733r^3 - 0,11539rz^2$	$-0,2256z + 0,278r^2z + 0,02165z^3$

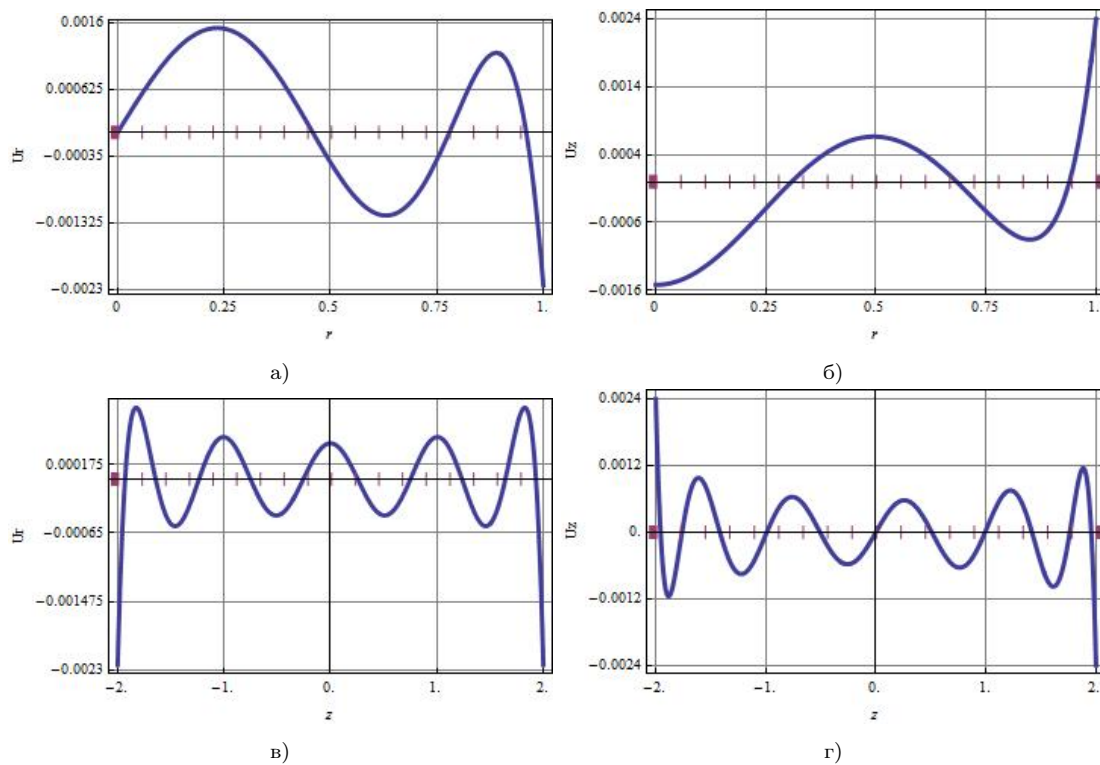


Рис. 2. Верификация граничных условий: а) компонента  $u$  на границе  $S_1$ , б) компонента  $w$  на границе  $S_1$ , в) компонента  $u$  на границе  $S_3$ , г) компонента  $w$  на границе  $S_3$

Fig. 2. Verification of boundary conditions: а) component  $u$  at the boundary  $S_1$ , б) component  $w$  at boundary  $S_1$ , в) component  $u$  at boundary  $S_3$ , г) component  $w$  at boundary  $S_3$

изображены на рис. 2 в масштабе. Например, истинное значение на графике рис. 2а равно значению на графике, умноженному на коэффициент  $\kappa$ . Аналогично и для выражений.

Полученные массовые силы имеют вид ( $\kappa = 10^{-5}$ ):

$$R = 97140,3r + 11750,7r^3 - 9911,8r^5 + 394,636rz^2 - 786,119r^3z^2 + 35,973rz;$$

$$Z = -294,709z + 570,086r^2z - 412,157r^4 + 100228z^3 - 14,666r^2z^3 - 56,777z^5.$$

При практической реализации приема решения второй основной задачи для цилиндра и его тестирования при различных видах функций заданных массовых сил, наблюдалась следующая особенность. Если область интегрирования  $V$  симметрична относительно плоскости  $z = 0$ , то

задачи с несимметричной и не кососимметричной относительно этой плоскости компонентой  $Z$ , например  $Z = z + 1$ , сходимостью решения в области восстановления массовых сил не обладают. Для получения корректного решения в этом случае необходимо задать несимметричную относительно плоскости  $z = 0$  область цилиндра  $V$ , например с координатой  $0 \leq z \leq 4$ .

## Заключение

Метод граничных состояний действительно обладает значительными преимуществами, особенно в области решения задач, связанных с деформируемыми телами. Одним из ключевых его достоинств является то, что ортонормированный базис формируется единожды и может быть многократно использован для решения различных задач, относящихся к одному и тому же типу. Это существенно экономит время и ресурсы в процессе численного моделирования, поскольку уже созданный базис не требует повторной переработки для новых расчетов.

В процессе применения метода граничных состояний и работы с базисными элементами, удовлетворяющими уравнениям теории упругости, необходимо понимать, что это создает основу для получения решений с высокой степенью точности и надежности. Когда мы говорим о линейных комбинациях базисных элементов, это означает, что мы можем создавать сложные формы деформаций и напряжений, комбинируя эти базисные функции, не беспокоясь о нарушении физики задачи.

Такой подход позволяет проводить анализ даже в наиболее сложных геометрических конфигурациях, где традиционные методы могут исчерпывать свои возможности. Например, задачи, связанные с анализом напряжений в конструкциях с резкими изгибами, острыми углами или неравномерными распределениями нагрузок, требуют особого внимания. Использование заранее подобранных базисных функций позволяет моделировать такие сложные ситуации с высокой точностью, что обеспечивает более глубокое понимание поведения материалов под воздействием различных факторов.

## Литература [References]

1. Кузьменко, Н.В., Левина, Л.В., Обратный метод эффективного анализа состояния упругого тела от массовых сил из класса непрерывных. *Сборник докладов XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики*. Казань, 2015, с. 2276–2278. [Kuzmenko, N.V., Levina, L.V., Inverse method of effective analysis of the state of an elastic body from mass forces from the class of continuous ones. *Sbornik dokladov KhI Vserossiyskogo s"ezda po fundamental'nyim problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki*. Kazan' = *Proc. of XI All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics*. Kazan, 2015, pp. 2276–2278 (in Russian)]
2. Пеньков, В.Б., Левина, Л.В., Кузьменко, Н.В., Анализ напряженно-деформированного состояния массива, ослабленного взаимодействующими подземными хранилищами газа. *Успехи современного естествознания*, 2017, № 9, с. 95–101. [Penkov, V.B., Levina, L.V., Kuzmenko, N.V., Analysis of the stress-strain state of a massif weakened by interacting underground gas storage facilities. *Uspekhi sovremennogo estestvoznaniya = Advances in Modern Natural Science*, 2017, no. 9, pp. 95–101 (in Russian)]
3. Kuzmenko, V.I., Kuzmenko, N.V., Levina, L.V., A way to solve the problems of isotropic elasticity theory with voluminous forces in a polynomyal view. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2019, vol. 83, no. 1, pp. 84–94, DOI: [10.3103/S0025654419050108](https://doi.org/10.3103/S0025654419050108)
4. Penkov, V.B., Ivanychev, D.A., Novikova, O.S., Levina L.V., An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*, 2018, vol. 973, no. 012015. DOI: [10.1088/17426596/973/1/012015](https://doi.org/10.1088/17426596/973/1/012015)
5. Иванычев, Д.А., Метод граничных состояний при решении смешанной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*, 2021, № 71, с. 63–77. [Ivanychev, D.A., Method of boundary states in solving a mixed problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo*

- universiteta. *Matematika i mekhanika* = Bull. of Tomsk State University. Mathematics and mechanics, 2021, no. 71, pp. 63–137 (in Russian)] DOI: [10.17223/19988621/71/6](https://doi.org/10.17223/19988621/71/6)
6. Иванычев, Д.А., Решение контактной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения с массовыми силами. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2019, № 2, с. 49–62. [Ivanychev, D.A., The contact problem Solution of the elasticity theory for anisotropic rotation bodies with mass forces. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* = Bull. of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. 2019, no. 2, pp. 49–62 (in Russian)] DOI: [10.15593/perm.mech/2019.2.05](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.2.05)
7. Иванычев, Д.А., Метод граничных состояний в решении второй основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*, 2019, № 61, с. 45–60. [Ivanychev, D.A., Method of boundary states in solving the second main problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* = Bull. of Tomsk State University. Mathematics and mechanics, 2019, no. 61, pp. 45–60 (in Russian)] DOI: [10.17223/19988621/61/5](https://doi.org/10.17223/19988621/61/5)
8. Пеньков, В.Б., Пеньков, В.В., Метод граничных состояний для решения задач линейной механики. *Дальневосточный математический журнал*, 2001, т. 2, № 2, с. 115–137. [Penkov, V.B., Penkov, V.V., The boundary state method for solving linear mechanics problems. *Dal'nevostochny' jmatematicheskij zhurnal* = Far Eastern Mathematical Journal, 2001, vol. 2, no. 2, pp. 115–137 (in Russian)]
9. Лехницкий, С.Г., *Теория упругости анизотропного тела*. Москва, Наука, 1977. [Lexniczkij, S.G., *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* = Theory of elasticity of anisotropic body, Moscow, Nauka, 1977. (in Russian)]
10. Саталкина, Л.В., Наращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоёмкости вычислений. *Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета*. Липецк, ЛГТУ, 2007, с. 30–131. [Satalkina, L.V., Building up the basis of the state space with hard constraints on the energy intensity of computations. *Sbornik tezisev dokladov nauchnoj konferencii studentov i aspirant Lipeckzogo gosudarstvennogo texnicheskogo universiteta* = Coll. of abstracts from the scientific conf. of students and postgraduates of Lipetsk State Technical University. Lipeckz, LGTU, 2007, pp 130–131. (in Russian)]
11. Александров, А.Я., Соловьев, Ю.И., *Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного)*. Москва, Наука, 1978. [Aleksandrov, A.Ya., Solov'ev, Yu.I., *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primenenie metodov teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo)* = Spatial problems of the theory of elasticity (application of methods of the theory of functions of a complex variable), Moscow, Nauka, 1978. (in Russian)]
12. Левина, Л.В., Новикова, О.С., Пеньков, В.Б., Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела. *Вестник ЛГТУ*, 2016, № 2, с. 16–24. [Levina, L.V., Novikova, O.S., Penkov, V.B., Full-parameter solution of the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body. *Vestnik LGTU* = Bulletin of Lipetsk State Technical University, 2016, no. 2, pp. 16–24. (in Russian)]
13. Лурье, А.И., *Пространственные задачи теории упругости*. Москва, Госиздат технико-теоретической литературы, 1955. [Lur'ye, A.I., *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti* = Spatial problems of the theory of elasticity. Moscow, Gosizdat tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1955 (in Russian)]