

УДК 51.37

EDN: FWFVSE DOI: 10.31429/vestnik-22-4-31-36

## Вариационные процедуры определения параметров модели переноса по данным измерений

**В. С. Кочергин**  , **С. В. Кочергин**  

Морской гидрофизический институт РАН, ул. Капитанская 2, Севастополь, 299011, Россия

✉ Кочергин Владимир Сергеевич; ORCID 0000-0002-6767-1218; SPIN 9479-0245; e-mail: [vskocher@gmail.com](mailto:vskocher@gmail.com)

**Аннотация.** В работе для модели переноса пассивной примеси рассматривается построение вариационных алгоритмов для идентификации входных параметров численного моделирования полей концентрации. Аналогичный подход успешно применялся при реализации процедур ассимиляции данных измерений и идентификации различных параметров модели переноса пассивной примеси. В данной работе построены все возможные градиенты функционала в пространстве параметров для рассматриваемой модели. Результаты могут быть использованы для решения различных задач экологической направленности при изучении воздействия источников загрязнения антропогенного характера в акваториях Азовского и Черного морей.

**Ключевые слова:** модель переноса, пассивная примесь, идентификация, сопряженная задача, минимизация.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № FNNN-2024-0016 «Исследование пространственно-временной изменчивости океанологических процессов в береговой, прибрежной и шельфовых зонах Черного моря под воздействием природных и антропогенных факторов на основе контактных измерений и математического моделирования» (шифр «Прибрежные исследования»).

**Цитирование:** Кочергин В. С., Кочергин С. В. Вариационные процедуры определения параметров модели переноса по данным измерений // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 4. С. 31–36. EDN: FWFVSE. DOI: 10.31429/vestnik-22-4-31-36

Поступила 8 сентября 2025 г. После доработки 21 октября 2025 г. Принято 24 октября 2025 г. Публикация 2 декабря 2025 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2025. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## Variational Procedures for Determining the Parameters of the Transfer Model Based on Measurement Data

**V. S. Kochergin**  , **S. V. Kochergin**  

Marine Hydrophysical Institute, Kapitanskaya str., 2, Sevastopol, 299011, Russia

✉ Vladimir S. Kochergin; ORCID 0000-0002-6767-1218; e-mail: [vskocher@gmail.com](mailto:vskocher@gmail.com)

**Abstract.** Due to the intensive development of technical capabilities for obtaining satellite information on the state of the ocean and seas, the creation of methods and algorithms for processing such information, the development of methods for mathematical modeling of water dynamics and concentrations of impurities of various nature, it is necessary to create and use reliable procedures for assimilating such information in numerical models. There are different approaches to solving this problem. These are dynamic stochastic methods for correcting the obtained solution and variational algorithms for assimilating measurement data by determining model parameters. Such parameters make it possible to determine model estimates of concentration fields consistent not only with the measurement data, but also with the model itself. This alignment occurs by minimizing the corresponding forecast quality functionality and integrating the model itself. When implementing the dynamic-stochastic approach, there are difficulties in correctly determining the error covariance matrix, and in the case of using the second one, with nonlinear constraints imposed by the model, it is necessary to perform linearization on the assimilation interval used. When solving the problem of identifying the input parameters of the passive impurity transfer model, there is no problem of finding a global minimum. This is due to the convexity of the quality functional itself and the linearity of constraints that do not change the convexity of the overall functional. Such identification procedures are based on solving related problems and implementing iterative algorithms for finding optimal

parameters based on measurement data. The uniqueness of the solution of the adjoint problem, the linearity of the constraints, and hence the convexity of the overall functional, allows us to determine the necessary parameters. Such parameters in the problem of passive impurity transfer can be the initial data, the fluxes of matter on the bottom and surface, the power of point sources, the sedimentation rate of the impurity, the coefficients of turbulent diffusion and velocity fields. The paper describes a technique for variational identification of input parameters for a passive impurity transfer model when assimilating measurement data for a finite time. Similar procedures are being built for the case of time-distributed measurement data. *Keywords:* model of transport, passive admixture, identification, adjoint task, minimization.

*Funding.* The work was carried out within the framework of the state assignment on topic No. FNNN-2024-0016 “Study of the spatio-temporal variability of oceanographic processes in the coastal, coastal and shelf zones of the Black Sea under the influence of natural and anthropogenic factors based on contact measurements and mathematical modeling” (code “Coastal research”).

*Cite as:* Kochergin, V. S., Kochergin, S. V., Variational procedures for determining the parameters of the transfer model based on measurement data. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 4, pp. 31–36. DOI: 10.31429/vestnik-22-4-31-36

Received 8 September 2025. Revised 21 October 2025. Accepted 24 October 2025. Published 2 December 2025.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2025. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\) license](#).

В связи с интенсивным развитием технических возможностей получения спутниковой информации о состоянии поверхности океана и морей, созданием методов и алгоритмов обработки такой информации [1], развитием методов математического моделирования динамики вод и концентрации примесей различной природы требуется создание и использование надежных процедур усвоения такой информации в численных моделях. Существуют разные подходы к решению такой задачи — это динамико-стохастические методы [2] корректировки полученного решения и вариационные алгоритмы [3–9] усвоения данных измерений за счет определения модельных параметров. Такие параметры дают возможность определять модельные оценки полей концентрации, согласованные не только с данными измерений, но и самой моделью. Такое согласование происходит за счет минимизации соответствующего функционала качества прогноза и интегрирования самой модели. При реализации динамико-стохастического подхода существуют трудности корректного определения ковариационной матрицы ошибок, а в случае использования второго — при нелинейных ограничениях, накладываемых моделью, требуется производить линеаризацию на используемом интервале ассимиляции. При решении задачи идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси проблема поиска глобального минимума отсутствует. Это связано с выпуклостью самого функционала качества и линейностью ограничений, которые не изменяют выпуклости общего функционала. Такие процедуры идентификации основаны на решении сопряженных задач и реализации итерационных алгоритмов поиска оптимальных параметров по данным измерений. Единственность решения сопряженной задачи [10], линейность ограничений, а значит, и выпуклость общего функционала, позволяет определять необходимые параметры. Такими параметрами в задаче переноса пассивной примеси могут быть начальные данные, потоки вещества на дне и поверхности, мощность точечных источников, скорость седиментации примеси, коэффициенты турбулентной диффузии и поля скорости. В работе [11] предложен и реализован вариационный алгоритм для идентификации начального поля концентрации взвешенного вещества по серии снимков поверхности Азовского моря. В случае, когда параметр модели, подлежащий определению, константа, возможно упрощение процедуры на основе метода линеаризации [12].

## 1. Модель переноса

Рассмотрим следующую трехмерную модель переноса-диффузии пассивной примеси в области  $M$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} + \frac{\partial VC}{\partial y} + \frac{\partial (W - W_s)C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial C}{\partial z}, \quad (1.1)$$

со следующими граничными

$$\partial M : \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (1.2)$$

и краевыми условиями на поверхности и на дне

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad \frac{\partial C}{\partial z} &= Q(t), \quad Q(t) = Q_S(t) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0); \\ z = H : \quad \frac{\partial C}{\partial z} &= Q_B(x, y), \end{aligned} \quad (1.3)$$

а также начальными данными

$$C(x, y, z, 0) = C_0(x, y, z), \quad (1.4)$$

где  $t$  — время;  $x_0, y_0$  — координаты точечного источника;  $C$  — концентрация примеси;  $Q(t)$  — точечный источник переменной по времени мощности;  $W_S$  — скорость седиментации примеси;  $Q(t)$  — точечный источник переменной по времени мощности;  $Q_B$  — мощность источника на дне;  $U, V, W$  — компоненты поля скорости;  $A_H$  и  $K$  — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии соответственно;  $H$  — глубина,  $\mathbf{n}$  — нормаль к боковой границе. Будем считать, что точечный источник расположен на поверхности моря. Аналогично выводятся соответствующие формулы при задании источника на дне и на боковой границе

## 2. Алгоритм идентификации

Пусть данные измерений концентрации примеси имеются на конечный момент времени, тогда задача ассимиляции данных измерений  $C_{\text{изм}}$  состоит в поиске экстремума следующего квадратичного функционала

$$I_0 = \frac{1}{2} [P(RC - C_{\text{изм}}), P(RC - C_{\text{изм}})]_M, \quad (2.1)$$

где  $M$  — область интегрирования модели на интервале времени  $[0, T]$ ,  $P$  — оператор дополнения нулями поля невязок прогноза в случае отсутствия данных измерений,  $R$  — оператор проектирования в точки наблюдений, а скалярное произведение определяется стандартным способом. Поиск экстремума (2.1) со связями (1.1)–(1.3) сводится к минимизации следующего функционала

$$\begin{aligned} I = I_0 + & \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} + \frac{\partial VC}{\partial y} + \frac{\partial (W - W_S)C}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial C}{\partial z}, C^* \right]_{M_t} + \\ & + \left( \frac{\partial C}{\partial n}, C^* \right)_{\partial M_t} + (C - C_0, C^*)_M + \\ & + \left( \frac{\partial C}{\partial z} - Q_S(t) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), C^* \right)_{S_t^0} + \left( \frac{\partial C}{\partial z} - Q_B, C^* \right)_{S_t^H}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $M_t = M \times [0, T]$ ,  $S_t^0 = S^0 \times [0, T]$ ,  $S_t^H = S^H \times [0, T]$ ,  $S^H$  — дно, а  $S^0$  — поверхность моря.

Записывая вариацию функционала (2.2) и интегрируя полученное выражение по частям, с учетом краевых условий и уравнения неразрывности получим

$$\begin{aligned} \delta I = & (\delta Q_S(t) \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0), C^*)_{S_t^0} + (C - C_0, C^*)_M + \\ & + \left( \frac{\partial C}{\partial z} - Q_B, C^* \right)_{S_t^{-1}} + \left( \delta W_S, \frac{\partial C}{\partial z} C^* \right)_{M_t}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $C^*$  — множители Лагранжа, которые выбираются из решения следующей сопряженной задачи:

$$-\frac{\partial C^*}{\partial t} - \frac{\partial UC^*}{\partial x} - \frac{\partial VC^*}{\partial y} - \frac{\partial (W - W_S) C^*}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C^*}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial C^*}{\partial z} = 0, \quad (2.4)$$

$$\partial M : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \quad z = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial z} = 0, \quad \sigma = H : \frac{\partial C^*}{\partial z} = 0, \quad (2.5)$$

$$t = T : C^* = -P(RC - C_{\text{изм}}). \quad (2.6)$$

Из определения градиента и стационарности функционала можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \nabla_{Q_S(t)} I &= C^*(x_0, y_0, 0, t); \\ \nabla_{C_0} I &= C^*(x, y, z, 0). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для определения переменной по пространству  $Q_B$  имеем

$$\nabla_{Q_B} I = \int_0^T C^*(x, y, H, t) dt, \quad (2.8)$$

а при  $Q_B = \text{const}$  градиент функционала вычисляется по формуле

$$\nabla_{Q_B} I = \int_0^T \iint_{S^H} C^*(x, y, H, t) dx dy dt. \quad (2.9)$$

Аналогично для определения коэффициентов турбулентной диффузии  $A_H$  и  $K$  имеем

$$\nabla_{A_H} I = \int_0^T \iiint_M \left( \frac{\partial C^*}{\partial x} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C^*}{\partial y} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \right) dx dy dz dt, \quad (2.10)$$

$$\nabla_K I = \int_0^T \iiint_M \left( \frac{\partial C^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx dy dz dt. \quad (2.11)$$

Формулы (2.10), (2.11) выписаны для случая постоянных величин  $A_H$  и  $K$ .

Для отыскания скорости седиментации примеси имеем

$$\nabla_{W_S} I = \int_{M_t} \frac{\partial C}{\partial z} C^* dM_t. \quad (2.12)$$

В дальнейшем значение мощности, например, переменного по времени точечного источника ищется итерационно по формуле

$$Q_S^{n+1}(t) = Q_S^n(t) + \tau \nabla_{Q_S(t)} I, \quad (2.13)$$

где  $\tau$  — итерационный параметр, который может выбираться одним из известных способов, например,

$$\tau = \frac{(P(RC - C_{\text{изм}}), PR\delta C)_M}{(PR\delta C, PR\delta C)_M}, \quad (2.14)$$

где  $\delta C$  — решение соответствующей задачи в вариациях

$$\frac{\partial \delta C}{\partial t} + \frac{\partial U \delta C}{\partial x} + \frac{\partial V \delta C}{\partial y} + \frac{\partial (W - W_S) \delta C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial \delta C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial \delta C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial \delta C}{\partial z} \quad (2.15)$$

с краевыми условиями на боковых границах

$$\partial M : \frac{\partial \delta C}{\partial n} = 0, \quad (2.16)$$

условиями на поверхности и на дне

$$\begin{aligned} z = 0 : \frac{\partial \delta C}{\partial z} &= C^*(x_0, y_0, 0, t) \\ z = H : \frac{\partial \delta C}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

и начальными данными

$$\delta C(x, y, z, 0) = 0. \quad (2.18)$$

В целом процедура идентификации состоит в следующем:

- интегрируется прямая задача (1.1)–(1.4) с некоторым начальным значением  $Q(t)$ ;
- определяется функционал (2.1);
- решается сопряженная задача (2.4)–(2.6);
- находится градиент (2.7) функционала (2.2);
- решается задача в вариациях (2.15)–(2.18);
- вычисляется итерационный параметр по формуле (2.14);
- итерационно по формуле (2.13) находится мощность источника  $Q(t)$ .

Аналогично строятся процедуры, позволяющие идентифицировать и другие входные параметры модели. Вид задачи в вариациях зависит от идентифицируемого параметра.

Отметим некоторые важные особенности рассматриваемого алгоритма. Квадратичный функционал (2.1), подлежащий минимизации, выпуклый. Связи, накладываемые моделью (1.1)–(1.4), линейны и не меняют его выпуклости. Следовательно, минимум функционала (2.2) единственен. Учитывая единственность решения основной, сопряженной задачи и задачи в вариациях на каждом этапе итерационного процесса реализуется надежный поиск этого минимума. Построенная процедура естественным образом зависит от сходимости итерационного процесса, который контролируется в процессе итераций в зависимости от необходимой точности определения искомого параметра.

В работе описана методика вариационной идентификации входных параметров для модели переноса пассивной примеси при усвоении данных измерений для конечного момента времени. Аналогичные процедуры строятся и для случая распределенных по времени данных измерений. При численной реализации алгоритма усвоение производится за счет минимизации квадратичного функционала качества прогноза, а решение сопряженной задачи используется для построения градиентов функционала в пространстве параметров. Представлены формулы для вычисления таких градиентов в случае идентификации начальных полей концентрации, коэффициентов турбулентной диффузии, скорости седиментации, и мощности источников загрязнения. Показано, что рассматриваемый функционал имеет единственный минимум, что позволяет решать поставленную задачу.

## Литература [References]

1. Кременчуцкий, Д.А., Кубряков, А.А., Завьялов, П.О., Коновалов, Б.В., Станичный, С.В., Алескерова, А.А., Определение концентрации взвешенного вещества в Черном море по данным спутника MODIS. *Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа*, 2014, № 29, с. 1–9. [Kremenchutsky, D.A., Kubryakov, A.A., Zavyalov, P.O., Kononov, B.V., Stanichny, S.V., Aleskerova, A.A., Determination of suspended matter concentration in the Black Sea based on MODIS satellite data. *Ekologicheskaya bezopasnost' pribrezhnoy i shel'fovoy zon i kompleksnoe ispol'zovanie resursov shel'fa* = *Environmental safety of coastal and shelf zones and integrated use of shelf resources*, 2014, no. 29, pp. 1–9. (in Russian)]
2. Тимченко, И.Е., *Динамико-стохастические модели состояния океана*. Киев, Наук. думка, 1981. [Timchenko, I.E., *Dinamiko-stokhasticheskie modeli sostoyaniya okeana* = *Dynamic-stochastic models of the ocean state*. Kyiv, Naukova Dumka, 1981. (in Russian)]

3. Marchuk, G.I., Penenko, V.V., Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment. In Marchuk, G.I. (ed.), *Proc. of the IFIP-TC7 Working conf. "Modelling and Optimization of Complex Systems"*. New York, Springer, 1978, pp. 240–252.
4. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Использование вариационных принципов и решения сопряженной задачи при идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси. *Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа*, 2010, № 22, с. 240–244. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Use of variational principles and solution of the adjoint problem in identification of input parameters of the passive pollutant transport model. *Ekologicheskaya bezopasnost' pribrezhnoy i shel'fovoy zon i kompleksnoe ispol'zovanie resursov shel'fa* = *Environmental safety of coastal and shelf zones and integrated use of shelf resources*, 2010, no. 22, pp. 240–244. (in Russian)]
5. Пененко, В.В., *Методы численного моделирования атмосферных процессов*. Ленинград, Гидрометеиздат, 1981. [Penenko, V.V., *Metody chislennoy modelirovaniya atmosferynykh protsessov* = *Methods of Numerical Modeling of Atmospheric Processes*. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1981. (in Russian)]
6. Агошков, В.И., Пармузин, Е.И., Шутяев, В.П., Ассимиляция данных наблюдений в задаче циркуляции Черного моря и анализ чувствительности её решения. *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*, 2013, т. 49, № 6, с. 643–654. [Agoshkov, V.I., Parmuzin, E.I., Shutyaev, V.P., Assimilation of observational data in the Black Sea circulation problem and sensitivity analysis of its solution. *Izvestiya RAN. Fizika atmosfery i okeana* = *Bull. of the Russian Academy of Sciences. Atmospheric and Oceanic Physics*, 2013, vol. 49, no. 6, pp. 643–654. (in Russian)]
7. Шутяев, В.П., Ле Диме, Ф., Агошков, В.И., Пармузин, Е.И., Чувствительность функционалов задач вариационного усвоения данных наблюдений. *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*, 2015, т. 51, № 3, с. 392–400. [Shutyaev, V.P., Le Dime, F., Agoshkov, V.I., Parmuzin, E.I., Sensitivity of functionals in the problem of variational assimilation of observational data. *Izvestiya RAN. Fizika atmosfery i okeana* = *Bull. of the Russian Academy of Sciences. Atmospheric and Oceanic Physics*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 392–400. (in Russian)]
8. Shutyaev, V. P., Le Dimet, F.-X., Parmuzin, E., Sensitivity analysis with respect to observations in variational data assimilation for parameter estimation. *Nonlinear processes in Geophysics*, 2018, vol. 25, iss. 2, pp. 429–439.
9. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Идентификация мощности источника загрязнения в Казантипском заливе на основе применения вариационного алгоритма. *Морской гидрофизический журнал*, 2015, № 2, с. 79–88. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Identification of the pollution source power in the Kazantip Bay based on the application of a variational algorithm. *Morskoy gidrofizicheskiy zhurnal* = *Marine Hydrophysical Journal*, 2015, no. 2, pp. 79–88. (in Russian)] EDN: [VDVDER](https://www.edn.ru/VDVDER) DOI: [10.22449/0233-7584-2015-2-79-88](https://doi.org/10.22449/0233-7584-2015-2-79-88)
10. Марчук, Г.И., *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды*. Москва, Наука, 1982. [Marchuk, G.I., *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayushchey sredy* = *Mathematical Modeling in Environmental Problems*. Moscow, Nauka, 1982. (in Russian)]
11. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Станичный, С.В., Вариационная ассимиляция спутниковых данных поверхностной концентрации взвешенного вещества в Азовском море. *Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса*, 2020, т. 17, № 2, с. 40–48. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Stanichny, S.V., Variational assimilation of satellite data on the surface concentration of suspended matter in the Sea of Azov. *Sovremennyye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa* = *Modern Problems of Remote Sensing of the Earth from Space*, 2020, vol. 17, no. 2, pp. 40–48. (in Russian)]
12. Кочергин, С.В., Фомин В.В., Вариационная идентификация входных параметров модели распространения загрязняющих веществ от подводного источника. *Морской гидрофизический журнал*, 2019, т. 35, № 6, с. 621–632. [Kochergin, S.V., Fomin V.V., Variational identification of input parameters of the model of pollutant spread from an underwater source. *Morskoy gidrofizicheskiy zhurnal* = *Marine Hydrophysical Journal*, 2019, v. 35, no. 6, pp. 621–632. (in Russian)] EDN: [PIQZAL](https://www.edn.ru/PIQZAL) DOI: [10.22449/0233-7584-2019-6-621-63](https://doi.org/10.22449/0233-7584-2019-6-621-63)