

УДК 539.3

EDN: NAXSYQ DOI: 10.31429/vestnik-22-3-36-42

К моделированию гармонических колебаний анизотропного основания, содержащего ансамбль плоских дефектов

И. С. Телятников^{1,2}, А. В. Павлова¹

¹ Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, пр-кт Чехова, 41, Ростов-на-Дону, 344006, Россия

² Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

Аннотация. В работе рассмотрен численно-аналитический подход к решению смешанных краевых задач для гармонических колебаний слоистых анизотропных структур, который может быть использован при моделировании геофизических сред, содержащих упорядоченные ансамбли внутренних неоднородностей. Представленный метод, основу которого составляют метод блочного элемента и положения теории «вирусов» вибропрочности, позволит изучать свойства, в том числе локализационные, физических полей, генерируемых поверхностными источниками и интерфейсными дефектами в анизотропных слоистых структурах. Приведены численные примеры для четырехслойного пакета анизотропных материалов.

Ключевые слова: анизотропная слоистая среда, гармонические нагрузки, плоские трещины.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ и КНФ в рамках проекта № 24-21-20032.

Цитирование: Телятников И. С., Павлова А. В. К моделированию гармонических колебаний анизотропного основания, содержащего ансамбль плоских дефектов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 3. С. 36–42. EDN: NAXSYQ. DOI: 10.31429/vestnik-22-3-36-42

Поступила 19 августа 2025 г. После доработки 6 сентября 2025 г. Принято 18 сентября 2025 г. Публикация 22 сентября 2025 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2025. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](#).

To Modeling Harmonic Oscillations of an Anisotropic Foundation Containing a Group of Planar Defects

I. S. Telyatnikov^{1,2}, A. V. Pavlova¹

¹ Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Prospekt Chekhova, 41, Rostov-on-Don, 344006, Russia

² Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

Abstract. Problems of modeling the dynamic processes in systems with foundations of varying depth arise in various scientific and technological fields. These include geophysics, geology, and seismology. In this paper, we consider a numerical-analytical approach to solving mixed boundary value problems for harmonic oscillations of layered anisotropic structures, which can be used in modeling geophysical media containing ordered groups of internal inhomogeneities. The method we present, which is based on the block element method and the principles of the vibration strength “viruses” theory, will allow us to study the properties, including localizational, of physical fields generated by surface sources and interface defects in anisotropic layered structures. To determine the conditions for the localization of a wave process by a system of interface defects, we need to know the real singularities for the elements of the Green’s matrix functions and their determinants. This paper presents numerical examples for a four-layer stack of anisotropic materials with interface cracks modeled by a mathematical section. The study results of the problems for layered structures with planar defects can find applications in solving the problem of assessing the influence of mechanical vibrations on microseismicity and further the understanding of the various manifestations of seismicity induced, in particular, by harmonic effects of various genesis.

Keywords: anisotropic layered medium, harmonic loads, plane cracks.

Funding. The study was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation and the Kuban Science Foundation within the framework of project No. 24-21-20032.

Cite as: Telyatnikov, I. S., Pavlova, A. V., To modeling harmonic oscillations of an anisotropic foundation containing a group of planar defects. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 3, pp. 36–42. DOI: 10.31429/vestnik-22-3-36-42

Received 19 August 2025. Revised 6 September 2025. Accepted 18 September 2025. Published 22 September 2025.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2025. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\) license](#).

Введение

Задачи моделирования динамических процессов в системах, включающих неоднородные по глубине основания, возникают в различных научных и технологических областях. К ним относятся, в том числе геофизика, геология и сейсмология. В работах [1, 2 и др.] исследовались отклики геосреды на воздействия электромагнитных импульсов и вибраций, в результате чего их авторами сделан вывод, что для изучения механизма процессов разрядки избыточных напряжений и решения проблемы высвобождения энергии в земной коре использование вибрационного нагружения является наиболее перспективным [1]. Прикладные задачи сейсмологии и вибрационной геофизики по исследованию геофизических полей, при решении которых геосреды нередко моделируют слоистыми структурами, требуют учета неоднородности реальной среды по глубине.

Северный Кавказ — один из наиболее сейсмоопасных регионов России [3], поэтому интенсивное развитие транспортной инфраструктуры и строительного производства требует углубленного изучения воздействия вибрационных нагрузок на грунтовые массивы с учетом их неоднородности и анизотропии. Рассмотрение установившихся процессов позволяет моделировать широко распространенные длительные техногенные вибрации и представляет интерес для решения как теоретических, так и практических задач.

Наличие в упругих структурах внутренних и интерфейсных дефектов меняет их волновые и деформационные свойства, влияя, в том числе на прочностной ресурс. При воздействии на такие структуры длительных вибраций различного генезиса наличие тонких концентраторов напряжений может привести к локализации деформационных и волновых процессов [4, 5]. Широкий диапазон частот вибраций обуславливает необходимость развития эффективных методов исследования задач, описывающих колебательные процессы в структурах с одиночными и множественными дефектами. Описанный в работе подход дает возможность исследовать особенности волновых полей, генерируемых интерфейсными дефектами в анизотропных слоистых структурах.

1. Модель и методы

Гармонические колебания анизотропного пакета слоев ($-H \leq x_3 \leq 0$, $-\infty \leq x_1, x_2 \leq \infty$) происходят под действием локальных поверхностных механических нагрузок, заданных в области Ω плоскости $x_3 = 0$.

Гармонические колебания каждого слоя $\{-\infty \leq x_1, x_2 \leq \infty$, $h_n \leq x_3 \leq h_{n+1}$, $n = \overline{1, N}\}$, $h_{N+1} = 0$, $h_1 = -H$, с упругими тензорами $c_{ijnm}^{(l)}$, $l_{ijn}^{(l)}$, $\varepsilon_{ij}^{(l)}$ и плотностью $\rho^{(l)}$ описываются уравнениями [6]:

$$c_{ijkl}^{(n)} \frac{\partial^2 u_k^{(n)}}{\partial x_l \partial x_j} + \rho^{(n)} \omega^2 u_i^{(n)} = 0,$$

связь напряжений и перемещений в уравнениях движения анизотропной среды дается соотношением

$$\sigma_{ij}^{(n)} = c_{ijkl}^{(n)} \frac{\partial u_k^{(n)}}{\partial x_l}, \quad i, j, k, l = \overline{1, 3}.$$

Здесь ω — круговая частота, использованы следующие обозначения для амплитудных характеристик: $\sigma_{ij}^{(n)}$ — элементы тензора напряжений, $\mathbf{u}^{(n)} = \{u_j^{(n)}\}$ — вектор перемещений. Временной множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен.

Далее для векторов смещений и напряжений введем дополнительные обозначения: $\mathbf{u}_k^\pm, \boldsymbol{\tau}_k^\pm$. где, например, для \mathbf{u}_k^\pm будем иметь

$$\mathbf{u}_k^-(x_1, x_2) = \lim_{x_3 \rightarrow h_k} \mathbf{u}^{(k-1)}(x_1, x_2, x_3), \quad \mathbf{u}_k^+(x_1, x_2) = \lim_{x_3 \rightarrow h_k} \mathbf{u}^{(k)}(x_1, x_2, x_3).$$

Тогда на поверхности упругой среды можно сформулировать следующие граничные условия (считая, что в области Ω поверхность возбуждается механической нагрузкой, а вне ее — свободна от напряжений):

$$x_3 = h_{N+1} : \boldsymbol{\tau}_{N+1}^- = \boldsymbol{\tau}_{N+1}^0(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad \boldsymbol{\tau}_{N+1}^- = \mathbf{0}, \quad (x_1, x_2) \notin \Omega.$$

На нижней границе можно сформулировать различные условия, будем, например, считать, что нижняя поверхность сцеплена с недеформируемым основанием:

$$x_3 = h_1 : \mathbf{u}_1^+ = \mathbf{0}, \quad -\infty < x_1, x_2 < \infty.$$

В силу линейности задачи при наличии в среде планарных дефектов различных типов (трещин и жестких включений) можно рассматривать отдельно задачи с однотипными неоднородностями.

Пусть пакет слоев содержит плоские интерфейсные трещины. Тогда в плоскостях $x_3 = h_n$ присутствия одиночных трещин, занимающих односвязные области Ω_n и моделируемых математическим разрезом, формулируются смешанные граничные условия:

$$x_3 = h_n : \boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{\tau}_n^- = \boldsymbol{\tau}_n^+, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_n, \quad \mathbf{u}_n^* = \mathbf{u}_n^+ - \mathbf{u}_n^- = \mathbf{0}, \quad (x_1, x_2) \notin \Omega_n.$$

Далее использованы метод блочного элемента [7] и теория «вирусов» вибропрочности [8–10]. Принимая в качестве границ блоков интерфейсные плоскости, в которых расположены дефекты, и основываясь на формализме работ для ансамбля плоских трещин [8, 10], можно свести задачу к системе матрично-функциональных уравнений (МФУ):

$$\mathbf{L}_n^\pm \mathbf{U}_n^\pm - \mathbf{L}_{n+1}^\pm \mathbf{U}_{n+1}^\pm = \mathbf{D}_n^\pm \mathbf{T}_n^\pm - \mathbf{D}_{n+1}^\pm \mathbf{T}_{n+1}^\pm, \quad (1.1)$$

где

$$\mathbf{L}_n^\pm = \mathbf{E}^{(n)\pm} \mathbf{L}^\pm, \quad \mathbf{D}_n^\pm = \mathbf{E}^{(n)\pm} \mathbf{D}^\pm, \quad E_{km}^{(n)\pm} = \delta_{km} \exp(i\sigma_k^\pm h_n), \quad k, m = \overline{1, 3}, \quad n = \overline{1, N},$$

$$\mathbf{U}_k^\pm(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}_k^\pm(\xi_1, \xi_2) \exp(i(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2)) d\xi_1 d\xi_2, \quad \mathbf{u}_k^\pm(\xi_1, \xi_2) \equiv \mathbf{u}_k^\pm(\xi_1, \xi_2, h_k),$$

$$\mathbf{T}_k^\pm(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\tau}_k^\pm(\xi_1, \xi_2) \exp(i(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2)) d\xi_1 d\xi_2.$$

Критерии выбора σ_k^\pm для анизотропных материалов описаны, например, в [11].

Следует отметить, что применение метода блочного элемента для блоков-слоев с плоско-параллельными границами приводит к той же системе МФУ, что и применение формулы Бетти [12].

Применительно к задачам идентификации интерфейсных дефектов можно рассматривать решение прямой задачи для пакета с трещинами (считая характеристики неоднородностей заданными) в качестве первого приближения явлений, наблюдаемых на поверхности среды.

Сохраняя обозначения работы [12], введем матрицы $\mathbf{F}^{(m,k)\pm}$ и $\mathbf{G}^{(n)}$ следующим образом:

$$F_{jl}^{(m,k)\pm} = \delta_{jl} \exp(i\sigma_j^\pm (h_k - h_m)), \quad j, l = \overline{1, 3},$$

$$\mathbf{G}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}^- & -\mathbf{F}^{(n,n+1)-} \mathbf{L}^- \\ \mathbf{L}^+ & -\mathbf{F}^{(n,n+1)+} \mathbf{L}^+ \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{D}^- & -\mathbf{F}^{(n,n+1)-} \mathbf{D}^- \\ \mathbf{D}^+ & -\mathbf{F}^{(n,n+1)+} \mathbf{D}^+ \end{pmatrix}, \quad n = \overline{1, N-1},$$

$$\mathbf{G}^{(N)} = \mathbf{G}^{(N)} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^- & \mathbf{F}^{(N,N+1)-}\mathbf{L}^- \\ \mathbf{D}^+ & \mathbf{F}^{(N,N+1)+}\mathbf{L}^+ \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{L}^- & \mathbf{F}^{(N,N+1)-}\mathbf{D}^- \\ \mathbf{L}^+ & \mathbf{F}^{(N,N+1)+}\mathbf{D}^+ \end{pmatrix}.$$

Все $\mathbf{G}^{(n)} = \mathbf{G}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \omega, C_{ijkm}^{(n)}, \rho^{(n)}, h_{n+1} - h_n)$.

После преобразования система МФУ (1.1) примет вид

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}\mathbf{T}, \quad (1.2)$$

где

$$\mathbf{U} = \left\{ \mathbf{U}^{(1)}, \dots, \mathbf{U}^{(N)}, \mathbf{U}^{(N+1)} \right\}, \quad \mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{U}^{(N+1)} = \mathbf{T}_{N+1}^0, \quad \mathbf{U}^{(n)} = \mathbf{U}_n^* \\ \mathbf{T} = \left\{ \mathbf{T}^{(1)}, \dots, \mathbf{T}^{(N)}, \mathbf{T}^{(N+1)} \right\},$$

где $\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{T}_n$, $\mathbf{T}^{(N+1)} = \mathbf{U}_{N+1}^-$, $n = \overline{2, N}$.

Блоки матрицы \mathbf{K} можно представить через блоки матрицы $\mathbf{G}^{(n)}$:

$$\mathbf{K}^{(1,1)} = \mathbf{G}_{11}^{(1)}, \quad \mathbf{K}^{(1,2)} = \mathbf{G}_{12}^{(1)}, \quad \mathbf{K}^{(N+1,N)} = \mathbf{G}_{21}^{(N)}, \quad \mathbf{K}^{(N+1,N+1)} = \mathbf{G}_{22}^{(N)},$$

$$\mathbf{K}^{(n,n-1)} = -\mathbf{G}_{21}^{(n-1)}, \quad \mathbf{K}^{(n,n)} = \mathbf{G}_{11}^{(n)} - \mathbf{G}_{22}^{(n-1)}, \quad \mathbf{K}^{(n,n+1)} = \mathbf{G}_{12}^{(n)}, \quad n = \overline{2, N}.$$

Для определения условий локализации волнового процесса системой интерфейсных дефектов необходимо знание особенностей элементов матриц-функций (1.2) и их определителей.

В работе [13] представлены результаты численных экспериментов для пакета анизотропных слоев (четыре слоя) с интерфейсными трещинами, обладающего следующими свойствами: 1-й слой составляет GaAs, 2-й слой — α -кварц, 3-й — $\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7$, 4-й — ZnO. В [13] приведены графики полюсов и нулей определителей $\det \mathbf{K}$, $\det \mathbf{K}^{(2,2)}$ и диагонального элемента $K_{2,2}^{(2,2)}$ матрицы $\mathbf{K}^{(2,2)}$, а также кривые нулей и полюсов тех же функций в плоскости $\alpha_1 O \alpha_2$ для приведенной частоты $\bar{\omega} = 3$.

На рис. 1, 2 представлены графики полюсов (жирные линии красного цвета) и нулей (тонкие линии черного цвета) для элементов соответственно $K_{1,1}^{(2,2)}$, $K_{3,3}^{(2,2)}$ диагонального блока $\mathbf{K}^{(2,2)}$ при тех же свойствах составляющих пакет слоев [14, 15]: 1-й слой — $C_{11} = 1,188 \cdot 10^{11}$ Н/м², $C_{12} = 0,538 \cdot 10^{11}$ Н/м², $C_{44} = 0,594 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho = 5316$ кг/м³ [10];

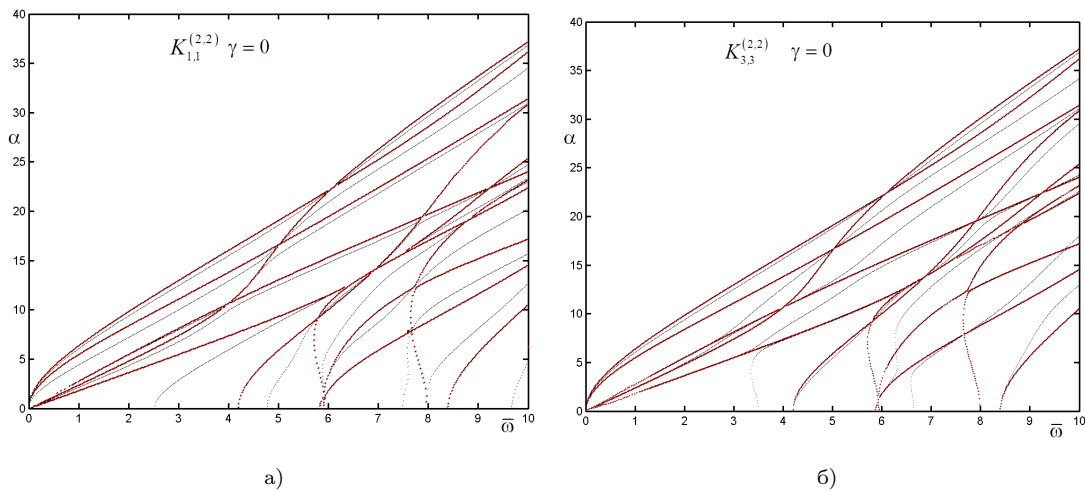


Рис. 1. Поведение нулей и полюсов элементов $K_{1,1}^{(2,2)}$ (а), $K_{3,3}^{(2,2)}$ (б) в зависимости от приведенной частоты

Fig. 1. Behavior of the zeros and poles of elements $K_{1,1}^{(2,2)}$ (а), $K_{3,3}^{(2,2)}$ (б) depending on the reduced frequency

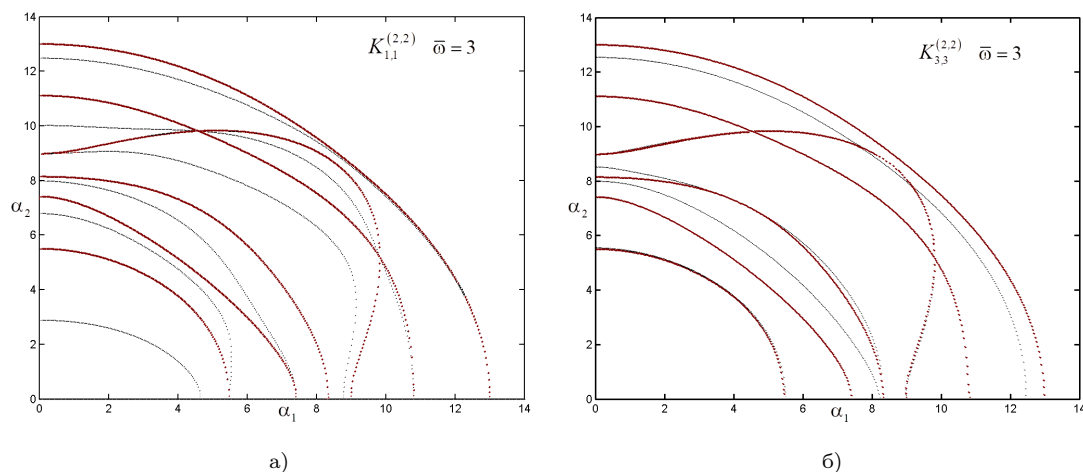


Рис. 2. Поведение нулей и полюсов элементов $K_{1,1}^{(2,2)}$ (а), $K_{3,3}^{(2,2)}$ (б) в зависимости от направления в плоскости $\alpha_1 O \alpha_2$

Fig. 2. Behavior of the zeros and poles of the elements $K_{1,1}^{(2,2)}$ (a), $K_{3,3}^{(2,2)}$ (б) depending on the direction in the plane $\alpha_1 O \alpha_2$

2-й слой — $C_{11} = 0,8674 \cdot 10^{11}$ Н/м², $C_{12} = 0,0699 \cdot 10^{11}$ Н/м², $C_{13} = 0,1191 \cdot 10^{11}$ Н/м², $C_{14} = -0,1791 \cdot 10^{11}$ Н/м², $C_{33} = 1,072 \cdot 10^{11}$ Н/м², $C_{44} = 0,5794 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho = 2650$ кг/м³; 3-й слой — $C_{11} = 1,35 \cdot 10^{11}$ Н/м², $C_{12} = 0,0357 \cdot 10^{11}$ Н/м², $C_{13} = 0,335 \cdot 10^{11}$ Н/м², $C_{33} = 0,568 \cdot 10^{11}$ Н/м², $C_{44} = 0,585 \cdot 10^{11}$ Н/м², $C_{66} = 1,467 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho = 2439$ кг/м³; 4-й слой — $C_{11} = 2,097 \cdot 10^{11}$ Н/м², $C_{12} = 1,211 \cdot 10^{11}$ Н/м², $C_{13} = 1,051 \cdot 10^{11}$ Н/м², $C_{33} = 2,109 \cdot 10^{11}$ Н/м², $C_{44} = 0,4244 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho = 5676$ кг/м³.

В работе использована матричная форма записи симметричного тензора в нотации Фойгта $c_{ijkl} = c_{\alpha\beta}$. При этом нумерация парных индексов определяется правилом: $ij \rightarrow \alpha$, $11 \rightarrow 1$, $22 \rightarrow 2$, $33 \rightarrow 3$. Для смешанных индексов используется подстановка: $ij \rightarrow \alpha$, $12 \rightarrow 6$, $13 \rightarrow 5$, $23 \rightarrow 4$ (сумма всех индексов должна равняться 9) [14].

Рис. 1 иллюстрирует поведение нулей и полюсов элементов $K_{1,1}^{(2,2)}$, $K_{3,3}^{(2,2)}$ в зависимости от приведенной частоты $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$. Все слои пакета имеют безразмерную толщину $h = 0,25$. Для введения безразмерных величин были выбраны следующие характерные значения: $h_0 = 1$ м, $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^4$ Гц, $m_0 = 10^3$ кг.

На рис. 2 для тех же элементов представлены зависимости нулей и полюсов от направления в плоскости $\alpha_1 O \alpha_2$, задаваемого величиной угла γ , где $\alpha_1 = \alpha \cos \gamma$, $\alpha_2 = \alpha \sin \gamma$ ($\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$, $\gamma = \arctg(\alpha_2/\alpha_1)$), демонстрирующие влияние анизотропии слоев на их распределение.

Как следует из вычислительных экспериментов, для диагональных элементов матриц-блоков $\mathbf{K}^{(j,j)}$ сохраняется чередование полюсов и нулей для направлений $\gamma \in \{\pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2\}$.

Заключение

Современные вибрационные геотехнологии и инструментальные методы, активно применяемые на практике, нуждаются порой в теоретическом обосновании, обеспечить которое могут механико-математические модели и новые методы их исследования [3]. Описанный в работе подход дает возможность исследовать особенности волновых полей, генерируемых интерфейсными дефектами в анизотропных слоистых структурах. Результаты исследования задач для слоистых структур с планарными дефектами могут найти приложения в решении проблемы оценки влияния механических вибраций на микросейсмичность и послужить развитию методов активного сейсмомониторинга и пониманию различных проявлений сейсмичности, наведенной, в частности, гармоническими воздействиями.

Литература [References]

1. Собисевич, Л.Е., Собисевич, А.Л., Фатьянов, А.Г., *Длиннопериодные сейсмогравитационные процессы в литосфере*. Москва, ИФЗ РАН, 2020. [Sobisevich, L.E., Sobisevich, A.L., Fatyanov, A.G., *Dlinnoperiodnye seysmogravitatsionnye protsessy v litosfere = Long-period seismogravitational processes in the lithosphere*. Moscow, IPE RAS, 2020. (in Russian)]
2. Стогний, В.В., Габараев, А.Ф., Ксенофонтов, И.В., Мельков, Д.А., Тригубович, Г.М., Некоторые проблемы ЭМИ-мониторинга в Крымско-Кавказской сейсмической зоне. В *Современные проблемы геологии, геофизики и геоэкологии Северного Кавказа*. Москва, Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН, 2023, с. 400–403. [Stogniy, V.V., Gabaraev, A.F., Ksenofontov, I.V., Melkov, D.A., Trigubovich, G.M., Some problems of EMI monitoring in the Crimean-Caucasian seismic zone. In *Sovremennye problemy geologii, geofiziki i geoekologii Severnogo Kavkaza = Modern Problems of Geology, Geophysics and Geoecology of the North Caucasus*. Moscow, S.I. Vavilov Institute of the History of Natural Science and Technology, Russian Academy of Sciences, 2023, pp. 400–403. (in Russian)]
3. Лаверов, Н.П. (ред.), *Изменение окружающей среды и климата, том 1: сейсмические процессы и катастрофы*. Москва, ИФЗ РАН, 2008. [Laverov, N.P. (ed.), *Izmenenie okruzhayushchey sredy i klimata, tom 1: seysmicheskie protsessy i katastrofy = Environmental and Climate Change, vol.1: Seismic Processes and Disasters*. Moscow, IPE RAS, 2008. (in Russian)]
4. Садовский, М.А., Писаренко, В.Ф., *Сейсмический процесс в блоковой среде*. Москва, Наука, 1991. [Sadovsky, M.A., Pisarenko, V.F., *Seysmicheskiy protsess v blokovoy srede = Seismic process in a block medium*. Moscow, Nauka, 1991. (in Russian)]
5. Александров, В.М., Сметанин, Б.И., Соболев, Б.В., *Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах*. Москва, Наука, 1993. [Aleksandrov, V.M., Smetanin, B.I., Sobol, B.V., *Thin stress concentrators in elastic bodies*. Moscow, Nauka, 1993. (in Russian)]
6. Дьелесан, Э., Руайе, Д., *Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов*. Москва, Наука, 1982. [Dieulesan, E., Royer, D., *Elastic Waves in Solids. Application to Signal Processing*. Moscow, Nauka, 1982. (in Russian)]
7. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Topological method of solving boundary-value problems and block elements. *Doklady Physics*, 2013, vol. 58, no. 4, pp. 152–155. DOI: [10.1134/S1028335813040083](https://doi.org/10.1134/S1028335813040083)
8. Бабешко, В.А., Павлова, А.В., Ратнер, С.В., Вильямс, Р., К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей. *Доклады Академии наук*, 2002, т. 382, № 5, с. 625–628. [Babeshko, V.A., Pavlova, A.V., Ratner, S.V., Williams, R., On the solution of the problem of vibration of an elastic body containing a system of internal cavities. *Doklady Akademii nauk = Proc. of the Academy of Sciences*, 2002, vol. 382, no. 5, pp. 625–628. (in Russian)]
9. Пряхина, О.Д., Смирнова, А.В., Построение определителей матриц-символов Грина многослойных сред с дефектами на основе теории «вирусов» вибропрочности. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2006, № 2, с. 35–41. [Pryakhina, O.D., Smirnova, A.V., Construction of determinants of Green's matrix-symbols of multilayered media with defects based on the theory of vibration strength "viruses". *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2006, no. 2, pp. 35–41. (in Russian)]
10. Телятников, И.С., Павлова, А.В., К задачам теории «вирусов» вибропрочности в сейсмологии. *Геология и геофизика Юга России*, т. 15, № 2, с. 116–127. [Telyatnikov, I.S., Pavlova, A.V., On the problems of the theory of vibration strength "viruses" in seismology. *Geologiya i geofizika Yuga Rossii = Geology and Geophysics of Southern Russia*, vol. 15, no. 2, pp. 116–127. (in Russian)]
11. Бабешко, В.А., Сыромятников, П.В., Метод построения символа Фурье матрицы Грина многослойного электроупругого полупространства. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2002, № 5, с. 35–47. [Babeshko, V.A., Syromyatnikov, P.V., Method for constructing the Fourier symbol of the Green's matrix of a multilayer electroelastic half-space. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela = Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid State Mechanics*, 2002, no. 5, pp. 35–47. (in Russian)]
12. Зарецкая, М.В., Москвичев, С.В., Павлова, А.В., Плужник, А.В., Ратнер, С.В., Сыромятников, П.В., О смешанных задачах для многослойных анизотропных материалов со множественными неоднородностями. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2007, № 1, с. 35–41. [Zaretskaya, M.V., Moskvichev, S.V., Pavlova, A.V., Pluzhnik, A.V., Ratner, S.V., Syromyatnikov, P.V., On mixed problems for multilayer anisotropic materials with

multiple inhomogeneities. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* = *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2007, no. 1, pp. 35–41. (in Russian)]

13. Бабешко, В.А., Ратнер, С.В., Сыромятников, П.В., Анизотропные тела с неоднородностями. Случай совокупности трещин. *Механика твердого тела*, 2007, № 5, с. 49–59. [Babeshko, V.A., Ratner, S.V., Syromyatnikov, P.V., Anisotropic bodies with inhomogeneities. The case of a set of cracks. *Mekhanika tverdogo tela* = *Solid Body Mechanics*, 2007, No. 5, pp. 49–59. (in Russian)]
14. Шаскольской, М.П. (ред.), *Акустические кристаллы. Справочник*. Москва, Наука, 1982. [Shaskolskoy, M.P. (ed.), *Akusticheskie kristally. Spravochnik* = *Acoustic Crystals. Handbook*. Moscow, Nauka, 1982. (in Russian)]
15. Зеленка, И., *Пьезоэлектрические резонаторы на объемных и поверхностных акустических волнах*. Москва, Мир, 1990. [Zelenka, I., *P'ezoelektricheskie rezonatory na ob'emnykh i poverkhnostnykh akusticheskikh volnakh* = *Piezoelectric Resonators on Bulk and Surface Acoustic Waves*. Moscow, Mir, 1990. (in Russian)]