УДК 531.39 EDN: EZIXCE DOI: 10.31429/vestnik-23-1-8-21

Операционный и безоперационный методы получения фундаментальных решений дифференциальных уравнений в частных производных для нанопластин. Часть III

П. Г. Великанов ✉

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111, Россия

✉ Великанов Петр Геннадьевич; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Аннотация. В настоящее время известно много численных методов, но, к сожалению, методу граничных элементов (МГЭ) и его модификациям уделяется незаслуженно мало внимания, хотя он, как метод конечных элементов и метод конечных разностей, также является одним из наиболее успешных современных численных методов с высокой точностью полученных результатов. В этой связи представляется актуальным дальнейшее развитие МГЭ для решения задач, основанных на применении предварительно вычисленных точных фундаментальных решений. В данной статье (часть III), являющейся логическим продолжением ранее опубликованных статей (части I и II), с помощью операционного (метод комплексного интегрального преобразования Фурье) и безоперационного (метод функционального анализа) методов удалось решить задачу по поиску фундаментального решения линейного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами на примере задачи изгиба тонкой однородной изотропной нанопластины, дифференциальное уравнение для которой получено в рамках нелокальной теории микроструктурной деформации. Показано, что метод функционального анализа позволил существенно упростить методику вычисления фундаментальных решений без необходимости предварительного глубокого изучения математической теории обобщенных функций и без привлечения аппарата операционного исчисления. Отмеченная теория и аппарат, к сожалению, до сих пор часто воспринимаются исследователями как трудные для понимания, что порой ограничивает область применения МГЭ.

Ключевые слова: нанопластины, фундаментальные решения, обобщенные функции, метод функционального анализа, изотропные пластины.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Великанов П. Г. Операционный и безоперационный методы получения фундаментальных решений дифференциальных уравнений в частных производных для нанопластин. Часть III // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2026. Т. 23, № 1. С. 8–21. EDN: EZIXCE. DOI: 10.31429/vestnik-23-1-8-21

Поступила 16 ноября 2025 г. После доработки 1 февраля 2026 г. Принято 2 марта 2026 г. Публикация 23 марта 2026 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Operational and Non-Operational Methods for Obtaining Fundamental Solutions of Partial Differential Equations for Nanoplates. Part III

P. G. Velikanov ✉

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, 10, K. Marx st., Kazan, 420111, Russia

✉ Peter G. Velikanov; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: pvelikanov@mail.ru

Abstract. Currently, many numerical methods are known, but, unfortunately, the boundary element method (BEM) and its modifications receive undeservedly little attention, although it, like the finite element method and the finite difference method, is also one of the most successful modern numerical methods with high accuracy of the results obtained. In this regard, it seems relevant to further develop the BEM to solve problems based on the application of precomputed exact fundamental solutions. In this article (Part III), which is a logical continuation of previously published articles (Parts I and II), using operational (the method of complex integral Fourier transform) and non-operational (the method of functional analysis) methods, it was possible to solve the problem of finding a fundamental solution to a linear partial differential equation with constant coefficients using the example of the bending problem of a thin a homogeneous isotropic nanoplate, the differential equation for which is obtained within the framework of the nonlocal theory of microstructural deformation. It is shown that the method of functional analysis made it possible to significantly simplify the methodology for calculating fundamental solutions without the need for a preliminary in-depth study of the mathematical theory of generalized functions and without involving the apparatus of operational calculus. Unfortunately, the mentioned theory and apparatus are still often perceived by researchers as difficult to understand, which sometimes limits the scope of the BEM.

Keywords: nanoplates, fundamental solutions, generalized functions, functional analysis method, isotropic plates.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Velikanov, P. G., Operational and non-operational methods for obtaining fundamental solutions of partial differential equations for nanoplates. Part III. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2026, vol. 23, no. 1, pp. 8–21. DOI: 10.31429/vestnik-23-1-8-21

Received 16 November 2025. Revised 1 February 2026. Accepted 2 March 2026. Published 23 March 2026.

The author declare no competing interests.

Введение

В настоящее время тонкие изотропные и анизотропные нанопластины широко используются в качестве структурных элементов во многих инженерных конструкциях. Для получения требуемых эксплуатационных характеристик, а также необходимых расчетных долговечностей, при их применении в наноконструкциях необходимо обязательно учитывать влияние эффектов малого масштаба, которые были экспериментально выявлены и вклад которых на жесткостные параметры, а также на частоты и формы колебаний, оказался существенным, например, для тонких наностержней. Для учета влияния отмеченных эффектов в рамках градиентной теории Миндлина в функцию свободной энергии введены члены, зависящие от параметров масштаба длины. При помощи данной функции и вариационного принципа была построена математическая модель для описания деформированного состояния тонкой изотропной нанопластины [1–8].

Как показал опыт численных расчетов конструкций различной геометрии и граничных (краевых, начальных) условий, не существует ни одного универсального численного метода для решения всего разнообразия технических проблем (у каждого численного метода есть свои преимущества и недостатки при решении конкретных классов задач). В этой связи не стоит ограничиваться при реализации численных расчетов лишь использованием тех численных методов, для которых существуют широко распространенные программные комплексы. Далеко не всегда полученные с помощью них результаты при сгущении сеточной области сходятся к точным решениям (если такие существуют).

Так, одним из наиболее успешных современных численных методов расчета сложных конструкций, подверженных действию сколь угодно сложных нагрузок, является метод граничных элементов (МГЭ; метод граничных интегральных уравнений, метод потенциалов, метод интегральных уравнений и др.). Дальнейшее его развитие в виде: непрямого МГЭ (НМГЭ; метода компенсирующих нагрузок), прямого МГЭ (ПМГЭ; метода взвешенных невязок) и полупрямого МГЭ, а также метод разрывных решений и др. для решения поставленных задач, основанных на применении предварительно вычисленных точных фундаментальных решений или матриц фундаментальных решений (ФР), является актуальным.

Классическими работами, где дается подробное описание понятий о ФР, являются работы Соболева С.А., Шварца Л., Гельфанда И.М. и Шилова Г.Е., Владимирова В.С. и Жаринова В.В., Шевченко В.П. [9–12] и др. о математической теории обобщенных функций.

В данной статье (часть III), являющейся логическим продолжением ранее опубликованных статей (части I и II) [13, 14], с помощью двух методов (операционного метода и метода функционального анализа) удалось получить ФР дифференциального уравнения в частных производных для нанопластин. Последний же из перечисленных методов позволил существенно упростить методику вычисления ФР линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами без необходимости предварительного глубокого изучения математической теории обобщенных функций и без привлечения аппарата операционного исчисления [15–34]. Отмеченная теория и аппарат часто воспринимаются исследователями (особенно инженерными работниками, перед которыми зачастую и ставят задачи по реализации конкретных и практически важных расчетов) как трудные для понимания, что порой ограничивает область применения МГЭ, имеющего значительные потенциальные преимущества в сравнении с другими численными методами, главным из которых является снижение на единицу геометрической размерности задачи. Метод функционального анализа позволил значительно упростить отмеченную проблему, чтобы, как и в других численных методах, основное внимание исследователя было уделено минимизации погрешностей дискретизации, аппроксимации и счета.

1. Фундаментальные решения и интегральные преобразования

Пусть дана система N линейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$L_0 U(x,y) = F(x,y), \tag{1.1}$$

где $L_0 = \left[L_{lm}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\right]$ — исходный линейный дифференциальный оператор в частных производных, $l,m=\overline{1,N}$; $U(x,y) = [u_l(x,y)]^{\mathrm{T}}$ — векторная функция, подлежащая определению; $F(x,y) = [f_l(x,y)]^{\mathrm{T}}$ — заданная векторная функция правых частей; $l,m=\overline{1,N}$.

Решение системы (1.1) $U(x,y)$ представимо в виде свертки

$$U(x,y) = L_0^{-1}F(x,y) = G * F = \int\limits_{\Omega} G(x-\xi, y-\eta)\, F(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,$$

где L_0^{-1} — интегральный оператор, ядром которого является матрица фундаментального решения (ФР) $G(x-\xi, y-\eta)$ системы линейных дифференциальных уравнений; Ω — область определения дифференциального оператора L_0.

Матрица ФР $G(x-\xi, y-\eta)$ определяется из выражения вида

$$L_0 G(x-\xi, y-\eta) = \delta(x-\xi, y-\eta)\,\mathbf{I}, \tag{1.2}$$

где $\delta(x-\xi, y-\eta)$ — двумерная обобщенная δ-функция Дирака; $\mathbf{I}$ — единичная матрица размерностью $N \times N$. Как показано в [15], для уравнений с постоянными коэффициентами ФР всегда существуют. Более того, ФР не единственны, они определяются с точностью до слагаемого (решения), являющегося произвольным решением однородного уравнения $L_0 G(x-\xi, y-\eta) = 0$ и, кроме того, являются обобщенными функциями. Из (1.2) видно, что ФР $G(x-\xi, y-\eta)$ зависит только от свойств дифференциального оператора L_0. Без ограничения общности далее будем считать, что $\xi = \eta = 0$, т.е. будем считать, что сосредоточенная нагрузка, моделируемая двумерной обобщенной δ-функцией Дирака, приложена в начале системы координат.

В дальнейшем фундаментальное решение $G(x-\xi, y-\eta)$ будем обозначать $G(t,\zeta) = G(t-\zeta)$, где $t(x,y)$ и $\zeta(\xi,\eta)$.

Элементы матрицы $G(t,\zeta)$ определятся из решения систем дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{k=1}^{N} L_{mk} G_{kl}(t,\zeta) = \delta_{lm}\delta(t-\zeta), \quad \left(l,m=\overline{1,N}\right), \tag{1.3}$$

где δ_{lm} — символ Кронекера.

Одним из наиболее эффективных способов решения дифференциальных уравнений (а следовательно и вычисления ФР) для решения задач теории упругости, теории пластин и оболочек, теплопроводности, электродинамики и др., записанных как в виде ЛОДУ, так и в виде дифференциальных уравнений в частных производных, является теория обобщенных функций в сочетании с методами интегральных преобразований (ИП) (операционное исчисление). Использование ИП позволяет свести дифференциальные, интегро-дифференциальные и интегральные уравнения к алгебраическим уравнениям, а также уменьшить размерность дифференциальных уравнений в частных производных.

В основе использования любого ИП лежит идея сведения некоторой сложной задачи в пространстве оригиналов к более простой в пространстве трансформант. Например, решение уравнений в частных производных в пространстве оригиналов свести к решению ОДУ или алгебраических уравнений в пространстве трансформант. Если найти такое решение в пространстве трансформант удается, то с помощью формулы обращения можно найти исходное решение. При этом из всех задач ИП наиболее трудной является задача восстановления оригинала функции по ее известной трансформанте. Решению этой наиболее трудной задачи и будут посвящены некоторые из последующих исследований.

Стоит отметить, что существуют научные источники, например, [12], которые дают определения прямых и обратных преобразований, отличающихся от традиционных выбором коэффициентов перед интегралами, а также знаками в показателях экспонент. Все свойства ИП в этом случае сохраняются, но вид некоторых формул может значительно измениться.

Широкое применение комплексного ИП Фурье для функций медленного (степенного) роста вызвано тем, что именно для этих функций построенные ФР имеют точный (без разложения в ряд(ы)) и компактный вид, который можно практически использовать для решения различного рода граничных (краевых) задач, например, с помощью различных видов МГЭ и других численных методов (а также их комбинаций).

Вместо комплексного ИП Фурье для функций общего вида для четных и нечетных функций имеет смысл использовать косинус- и синус-преобразования Фурье соответственно. Это убыстряет процесс нахождения оригинала, так как уже не требуется осуществлять разложение комплексной функции по формуле Эйлера и пользоваться свойствами интегралов по симметричному отрезку от четных и нечетных функций (только следует учесть, что при вычислении, например, косинус-преобразования Фурье от обобщенной δ-функции Дирака (которая является четной) ее величина должна быть уменьшена вдвое (чтобы воспользоваться фильтрующим свойством обобщенной δ-функции Дирака по симметричному отрезку интегрирования)).

Преобразование Хартли, как и косинус- и синус-преобразования Фурье, тесно связаны с комплексным ИП Фурье, но в отличие от последнего трансформирует одни функции вещественной переменной в другие вещественные же функции. Преобразование было предложено Р. Хартли в 1942 году в качестве альтернативы комплексному ИП Фурье, которое в общем случае трансформирует одни функции вещественной переменной в другие (комплекснозначные) функции вещественной переменной.

В большинстве своем функции, трансформанты и оригиналы которых в теории пластин и оболочек, теории упругости и др. стремятся найти, не являются функциями общего вида, а являются четными или нечетными, поэтому нет разницы, какое из ИП (комплексное, косинус-преобразование Фурье, преобразование Хартли) мы используем. Каждое из перечисленных ИП приводит нас к идентичным результатам, но, как показано выше, некоторые из них (в зависимости от свойств функций) приводят к ним быстрее.

Вместо вышеперечисленных ИП (комплексного, косинус- и синус-преобразований Фурье, преобразования Хартли) эффективно могут быть использованы одно- или двусторонее ИП Лапласа, которые тесным образом связаны друг с другом и другими ИП, например, ИП Меллина. В дальнейшем среди многочисленных свойств (линейность, подобие, смещение, запаздывание и др.) одно- и двусторонего ИП Лапласа обычно интересует их свойство дифференцирования оригинала. В свете вышеприведенного свойства дифференцирования оригинала одно- и двусторонего ИП Лапласа, а также свойства четности обобщенной δ-функции Дирака и ее фильтрующего свойства по симметричному отрезку интегрирования становится оправданным и предпочтительным использование двусторонего ИП Лапласа.

Решение систем (1.3) может быть эффективно осуществлено любым из вышеприведенных ИП. Для примера рассмотрим широко распространенный метод двумерного комплексного ИП Фурье.

Двумерная трансформанта (образ, изображение) $\bar{f}(\xi,\eta)$ функции $f(x,y)$ определяется выражением вида:

$$F[f(x,y)] = \bar{f}(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{i(\xi x+\eta y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad i=\sqrt{-1}.$$

Соотношение между трансформантами производных от $f(x,y)$ и самой трансформантой $\bar{f}(\xi,\eta)$ может быть определено следующим выражением:

$$F\left[\frac{\partial^{(n+m)} f(x,y)}{\partial x^n \partial y^m}\right](\xi,\eta) = (-i\xi)^n (-i\eta)^m \bar{f}(\xi,\eta).$$

Трансформанта двумерной обобщенной δ-функции Дирака, которая, в силу присущих ей свойств, представима в виде $\delta(x,y)=\delta(x)\,\delta(y)$, определяется из следующего соотношения:

$$F[\delta(x,y)] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x,y)\,e^{i(\xi x+\eta y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}.$$

Трансформанты для производных δ-функции Дирака примут вид

$$F\left[\delta^{(m+n)}(x,y)\right] = \frac{1}{2\pi}(-i\xi)^m(-i\eta)^n.$$

Системы (1.3) в пространстве трансформант примут вид

$$\sum_{k=1}^{N} L_{mk}(-i\xi,-i\eta)\,\bar{G}_{kl}(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\delta_{lm}, \quad \left(l,m=\overline{1,N}\right).$$

Формула обращения двумерного интегрального преобразования Фурье (прообраз, оригинал) имеет вид

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(\xi,\eta)\,e^{-i(\xi x+\eta y)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta.$$

При вычислении несобственных интегралов будем пользоваться свойством

$$\frac{\partial^{(n+m)} f(x,y)}{\partial x^n \partial y^m} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(-i\xi)^n(-i\eta)^m\,\bar{f}(\xi,\eta)\,e^{-i(\xi x+\eta y)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta.$$

Для вычисления интегралов будем использовать теорию вычетов из комплексного анализа: если $Q(z)$ — функция, где z — комплексное число, удовлетворяющая следующим условиям:

1) аналитическая при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ всюду, за исключением числа полюсов, лежащих на действительной оси;

2) не имеет полюсов на действительной оси;

3) при $z\to\infty$, функция $zQ(z)\to 0$ равномерно при $0\leqslant \arg z\leqslant \pi$; 4) интегралы $\int_0^\infty Q(x)\,\mathrm{d}x$ и $\int_{-\infty}^0 Q(x)\,\mathrm{d}x$ являются сходящимися, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z\geqslant 0}\operatorname{Res} Q(z).$$

Кроме того,

$$\int\limits_{0}^{\infty} Q(x)\cos mx\,\mathrm{d}x = \pi i\sum_{\operatorname{Im} z\geqslant 0}\operatorname{Res} Q(z)\,e^{imz}; \quad \int\limits_{0}^{\infty} Q(x)\sin mx\,\mathrm{d}x = \pi\sum_{\operatorname{Im} z\geqslant 0}\operatorname{Res} Q(z)\,e^{imz}.$$

Если $z = a$ — полюс функции $Q(z)$ порядка m, то вычет функции $Q(z)$ определяется по формуле

$$\operatorname{Res} Q(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left[(z-a)^m Q(z)\right].$$

Для вычисления расходящихся интегралов далее будем вводить в рассмотрение обобщенную функцию $\theta(\eta)$, производная от которой также будет обобщенной и пользоваться правилом дифференцирования обобщенных функций [10].

Рассмотрим вычисление несобственных интегралов следующих типов:

$$I_1(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\xi^2+\eta^2)} e^{-i(\xi x + \eta y)}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta;$$

$$I_2(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\xi^2+\eta^2+\lambda^2)} e^{-i(\xi x + \eta y)}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta;$$

$$I_3(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\xi^2+\eta^2)^2} e^{-i(\xi x + \eta y)}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta.$$

Интеграл $I_1(x,y)$ определим, воспользовавшись свойством интегралов от четных и нечетных функций на интервале, симметричном относительно начала координат

$$I_1(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\xi^2+\eta^2)} e^{-i(\xi x + \eta y)}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \cos\eta y\, \mathrm{d}\eta \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos\xi x\, \mathrm{d}\xi}{(\xi^2+\eta^2)} = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\eta} e^{-\eta x} \cos\eta y\, \mathrm{d}\eta,$$

где была использована теория вычетов

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos\xi x}{(\xi^2+\eta^2)}\, \mathrm{d}\xi = \pi i \sum_{\operatorname{Im} z \geqslant 0} \operatorname{Res} \frac{e^{izx}}{(z^2+\eta^2)} = \pi i \left.\frac{e^{iz_1 x}}{2z_1}\right|_{z_1 = i\eta} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\eta} e^{-\eta x}.$$

Внешний интеграл вычислим с помощью теории обобщенных функций [12]. Рассмотрим обобщенную функцию вида

$$\theta(\eta) = \ln\eta_+ = \begin{cases} 0, & \eta \leqslant 0, \\ \ln\eta, & \eta > 0. \end{cases}$$

Производная этой функции есть обобщенная функция $\theta'(\eta) = 1/\eta$, $\eta > 0$.

Согласно правилу дифференцирования обобщенных функций, имеем

$$(\theta', \phi) = -(\theta, \phi') = -\int \phi'(\eta)\, \theta(\eta)\, \mathrm{d}\eta,$$

где $\phi(\eta)$ — основная функция (бесконечное число раз дифференцируемая и в бесконечно удаленной точке сама функция и ее бесконечное число производных стремятся к нулю).

Здесь в качестве основной функции выступает функция $\phi(\eta) = e^{-\eta x}\cos\eta y$. Учитывая все вышесказанное, получим

$$I_1(x,y) = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\eta} e^{-\eta x} \cos\eta y\, \mathrm{d}\eta = x \int\limits_0^{\infty} e^{-\eta x} \cos\eta y \ln\eta\, \mathrm{d}\eta + y \int\limits_0^{\infty} e^{-\eta x} \sin\eta y \ln\eta\, \mathrm{d}\eta =$$
$$= -\frac{1}{2} \ln\left(x^2+y^2\right) - C = -\left(\ln r + C\right),$$

где входящие интегралы являются табличными; $r^2 = x^2 + y^2$, $C = 0{,}5772157\ldots$ — постоянная Эйлера.

Рассмотрим интеграл $I_2(x, y)$

$$I_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\xi^2+\eta^2+\lambda^2)}e^{-i(\xi x+\eta y)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos\eta y\,\mathrm{d}\eta\int\limits_0^\infty\frac{\cos\xi x\,\mathrm{d}\xi}{(\xi^2+\eta^2+\lambda^2)}.$$

Аналогично рассмотренному выше

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos\xi x}{(\xi^2+\eta^2+\lambda^2)}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{\eta^2+\lambda^2}}e^{-x\sqrt{\eta^2+\lambda^2}},$$

отсюда

$$I_2(x,y) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\eta^2+\lambda^2}}e^{-x\sqrt{\eta^2+\lambda^2}}\cos\eta y\,\mathrm{d}\eta = K_0(\lambda r),$$

где $K_0(\lambda r)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка; этот интеграл также является табличным.

Рассмотрим интеграл $I_3(x, y)$

$$\begin{gathered}I_3(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\xi^2+\eta^2)^2}e^{-i(\xi x+\eta y)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\cos\eta y\,\mathrm{d}\eta\int\limits_0^\infty\frac{\cos\xi x\,\mathrm{d}\xi}{(\xi^2+\eta^2)^2} = \\ = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\frac{1}{\eta^3}\cos\eta y\,(1+\eta x)\,e^{-\eta x}\,\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^\infty\frac{1}{\eta^3}\cos\eta y e^{-\eta x}\,\mathrm{d}\eta + x\int\limits_0^\infty\frac{1}{\eta^2}\cos\eta y e^{-\eta x}\,\mathrm{d}\eta\right],\end{gathered}$$

где при вычислении внутреннего интеграла была использована ранее приведенная формула для полюса функции второго порядка

$$\int\limits_0^\infty\frac{\cos\xi x}{(\xi^2+\eta^2)^2}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{4\eta^3}(1+\eta x)\,e^{-\eta x}.$$

Внешний интеграл вычислим с помощью теории обобщенных функций [12]. Рассмотрим обобщенную функцию вида

$$\theta(\eta) = \ln\eta_+ = \begin{cases}0, & \eta\leqslant 0,\\ \ln\eta, & \eta>0.\end{cases}$$

Производные этой функции есть обобщенные функции

$$\theta'(\eta) = \frac{1}{\eta},\quad \theta''(\eta) = -\frac{1}{\eta^2},\quad \theta'''(\eta) = \frac{2}{\eta^3},\quad \eta>0.$$

Согласно правилу дифференцирования обобщенных функций, имеем

$$\left(\theta^{(n)},\phi\right) = (-1)^n\left(\theta,\phi^{(n)}\right) = (-1)^n\int\phi^{(n)}\theta(\eta)\,\mathrm{d}\eta,$$

где $\phi(\eta)$ — основная функция (бесконечное число раз дифференцируемая и в бесконечно удаленной точке сама функция и ее бесконечное число производных стремятся к нулю).

Здесь в качестве основной функции выступает функция $\phi(\eta) = e^{-\eta x}\cos\eta y$. Учитывая все вышесказанное, получим

$$I_3(x,y) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^\infty \frac{1}{\eta^3}\cos\eta y e^{-\eta x}\,\mathrm{d}\eta + x\int\limits_0^\infty \frac{1}{\eta^2}\cos\eta y e^{-\eta x}\,\mathrm{d}\eta\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{C}{4}\left(x^2+y^2\right) = \frac{1}{4}r^2\ln r + \frac{C}{4}r^2,$$

где входящие интегралы являются табличными; $r^2 = x^2+y^2$, $C = 0{,}5772157\ldots$ — постоянная Эйлера.

Опираясь на все вышеизложенное, можно показать, как получаются ФР задачи изгиба изотропной нанопластины операционным и безоперационным методами.

2. Нахождение фундаментального решения задачи изгиба изотропной нанопластины с помощью операционного метода

Дифференциальное уравнение изгиба тонкой изотропной нанопластины имеет вид

$$D\nabla^2\nabla^2 w - l^2 D\left(\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + 3\frac{\partial^6 w}{\partial x^4\partial y^2} + 3\frac{\partial^6 w}{\partial y^4\partial x^2} + \frac{\partial^6 w}{\partial y^6}\right) = p_z(x,y), \tag{2.1}$$

где $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — изгибная (цилиндрическая) жесткость пластины; E – модуль упругости Юнга (модуль упругости первого рода); h — толщина пластины; ν — коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации); ∇^2 — оператор Лапласа; w — прогиб точки срединной поверхности пластины; l — нелокальный наноразмерный параметр; p_z — интенсивность нормального давления, действующего на пластину.

ФР дифференциального уравнения изгиба тонкой изотропной нанопластины ищется из дифференциального уравнения вида

$$D\nabla^2\nabla^2 G - l^2 D\left(\frac{\partial^6 G}{\partial x^6} + 3\frac{\partial^6 G}{\partial x^4\partial y^2} + 3\frac{\partial^6 G}{\partial y^4\partial x^2} + \frac{\partial^6 G}{\partial y^6}\right) = \delta(x,y), \tag{2.2}$$

где $G(x,y)$ — ФР дифференциального уравнения; $\delta(x,y)$ — двумерная обобщенная δ-функция Дирака.

Трансформанта Фурье ФР задачи изгиба изотропной нанопластины имеет вид

$$\bar{G}(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi D}\frac{1}{\{(\xi^2+\eta^2)^2 + l^2(\xi^2+\eta^2)^3\}} = \frac{1}{\{(\xi^2+\eta^2)^2(\xi^2+\eta^2+\lambda^2)\}} =$$
$$= \frac{1}{2\pi D l^2}\left[\frac{1}{\lambda^2(\xi^2+\eta^2)^2} - \frac{1}{\lambda^4(\xi^2+\eta^2)} - \frac{1}{\lambda^4(\xi^2+\eta^2+\lambda^2)}\right], \tag{2.3}$$

где $\lambda = 1/l$.

Восстанавливая его оригинал с помощью ранее вычисленных интегралов $I_i(x,y)$ $(i=\overline{1,3})$ с точность до решения однородного уравнения (в соответствии со свойством ФР), получим

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi D l^2}\left[\frac{I_3(x,y)}{\lambda^2} - \frac{I_1(x,y)}{\lambda^4} + \frac{I_2(x,y)}{\lambda^4}\right] = \frac{1}{8\pi D}\left[r^2\ln r + 4l^2\left(\ln r + K_0\left(\frac{r}{l}\right)\right)\right]. \tag{2.4}$$

Для проверки правильности найденного фундаментального решения дифференциального уравнения были использованы две методики: с помощью формулы дифференцирования обобщенных функций [8]

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)_G + (-1)^{i-1}\delta(x_1,\ldots,x_n)\int\limits_\Gamma \Phi\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{i-1}\,\mathrm{d}x_{i+1}\ldots\mathrm{d}x_n, \tag{2.5}$$

где $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)_G$ — обычная производная от функции Φ, Γ — граница области G (один из контуров, внутри которого находится особенность), и с помощью проверки равновесия пластины, ограниченной кривой, при действии на нее единичной нагрузки [17,25]. Обе этих методики эквивалентны и привели к идентичным результатам (ФР (2.4) удовлетворяет дифференциальному уравнению изгиба тонкой изотропной нанопластины).

Можно заметить, что частным случаем ФР (2.4) является ФР бигармонического уравнения для задачи изгиба изотропной пластины в рамках модели Кирхгофа–Лява

$$l = 0 \Rightarrow G(x, y) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r.$$

Известно, что сами по себе методики получения ФР, например, с помощью алгоритмов интегрального преобразования Фурье и др., ассоциированного дифференциального оператора, теории вычетов из комплексного анализа, с помощью метода последовательного (перестановочного) интегрирования и многих других [9–34] зачастую сложны, поэтому была поставлена задача свести поиск ФР ни к операции интегрирования, как было неоднократно проделано ранее другими методами [9–34], а к операции дифференцирования аппроксимирующих ФР функций. По аналогии с [32] в дальнейшем данный метод будем называть методом функционального анализа.

3. Метод функционального анализа

Из теории как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и дифференциальных уравнений в частных производных [16,34], известно, что решением дифференциальных уравнений является сумма общего решения однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения. Поиск же ФР дифференциального уравнения (2.2) в силу того, что, как было ранее отмечено, ФР определяется с точностью до решения однородного уравнения, ограничивается лишь поиском любого частного решения неоднородного уравнения.

Т.к. ранее было отмечено, что ФР зависит только от свойств дифференциального оператора L_0, то необходимо выбрать аппроксимирующую функцию для ФР, исходя из свойств дифференциального оператора L_0: для изотропной нанопластины (дифференциальный оператор 6-го порядка с постоянными коэффициентами) можно заключить: искомое ФР является лишь функцией от x и y, т.е.$G\,(x, y)$; т.к. фундаментальное решение $G\,(x, y)$ можно интерпретировать прогибом для бесконечной нанопластины от действия единичной сосредоточенной нагрузки, моделируемой обобщенной δ-функцией Дирака $\delta\,(x, y)$, размещенной в центре нанопластины, и так как линии равного прогиба являются окружностями (по аналогии с ранее рассмотренным изгибом изотропной пластины), что подтверждается, например, ранее приведенными для изотропной пластинки исследованиями с помощью голографической интерферометрии, двух- и трехэкспозиционных интерферограмм, а также с помощью спекл-фотографии, то ФР является функцией от $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, т.е. $G\,(r)$.

В [9,16,34] показано, что в окрестности приложения сосредоточенной нагрузки асимптотические формулы для ФР имеют логарифмическую особенность, т.е. $G\,(r, \ln r)$.

В свете вышеприведенного аппроксимирующую функцию для ФР с помощью МФА будем искать в виде суммы трех функций (выбор аппроксимирующих ФР функций обусловлен структурой дифференциального оператора для (2.1) или (2.2): он представим в виде суперпозиции бигармонического оператора (гармонического оператора второй кратности) и оператора Гельмгольца)

$$G(x, y) = G(r) = G_1(x, y) + G_2(x, y) + G_3(x, y) = Ar^{m1} \ln^{n1} r + Br^{m2} \ln^{n2} r + CK_0\,(Dr)\,, \quad (3.1)$$

где A, $m1$, $n1$, B, $m2$, $n2$, C и D — подлежащие определению константы.

Теперь с помощью формулы (2.5) находим все необходимые для дифференциального уравнения (2.2) производные аппроксимирующей ФР $G\,(x, y)$ функции. Проще всего сначала определить обычные производные от аппроксимирующей функции ФР $G\,(x, y)$ (3.1): так как в сумме они должны дать нуль, то коэффициенты при одинаковых степенях функций должны также обратиться в нуль — эти коэффициенты и позволяют образовать систему алгебраических уравнений, из которых в любом пакете символьной математики, например, в Wolfram Mathematica [35, 36] можно найти искомые константы. В результате вычислений искомые константы оказались равны

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)G_1\left(x,y\right)=\frac{\delta(x,y)}{D}\Rightarrow A=\frac{l^2}{2\pi D};\ m1=0;\ n1=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow G_1(x,y)=G_1(r)=\frac{l^2}{2\pi D}\ln r,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2G_2\left(x,y\right)=\frac{\delta(x,y)}{D}\Rightarrow B=\frac{1}{8\pi D};\ m2=2;\ n2=1;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow G_2(x,y)=G_2(r)=\frac{1}{8\pi D}r^2\ln r, \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\lambda^2\right)G_3\left(x,y\right)=\frac{\delta(x,y)}{D}\Rightarrow C=\frac{l^2}{2\pi D};\ D=\lambda\Rightarrow$$
$$\Rightarrow G_3(x,y)=G_3(r)=\frac{l^2}{2\pi D}K_0\left(\lambda r\right).$$

Подставив найденные константы в $G_i\left(x,y\right)$, $\left(i=\overline{1,3}\right)$, а их, в свою очередь, в (3.1), получаем, что результаты для ФР обоими методами (интегральным преобразованием Фурье и методом функционального анализа) полностью совпали, но второй метод (МФА) потребовал для достижения результата существенно меньших усилий, т.к. нахождение ФР с помощью МФА свелось лишь к операции дифференцирования и решения систем линейных алгебраических уравнений, что является существенно более простой операцией по сравнению с восстановлением оригиналов путем интегрирования для предварительно найденных трансформант, что является обязательным элементом любых операционных методов.

4. Пример

Рассмотрим шарнирно опертую квадратную изотропную нанопластину, находящуюся под действием постоянной поперечной нагрузки безразмерной интенсивности $q_*(x_*,y_*)=1$, где $x_*=x/d$, $y_*=y/d$ (d — сторона нанопластины), $q_*=q/q_0$ (q_0 — интенсивность некоторой постоянной нагрузки, $w_*=wD/(q_0d^4)$ ($D=Eh^3/(12(1-\nu^2))$ изгибная (цилиндрическая) жесткость нанопластины), $l_*=l/d$ (l_* — приведенный нелокальный наноразмерный параметр).

Заключение

В статье успешно реализована попытка с помощью операционного (метода комплексного интегрального преобразования Фурье) и безоперационного (метод функционального анализа) методов решить задачу по поиску фундаментального решения линейного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами на примере задачи изгиба изотропной нанопластины. Оба метода привели к идентичным результатам, но второй метод потребовал для достижения поставленной цели меньших усилий. Вышеназванный безоперационный метод позволил значительно упростить, а порой и исключить из рассмотрения, трудные для понимания исследователями вышеперечисленные теории и алгоритмы, акцентировав внимание на минимизации погрешностей аппроксимации, дискретизации и счета. Также была решена задача по расчету шарнирно опертой квадратной изотропной нанопластины для различных значений приведенного нелокального наноразмерного параметра. Показано, что с увеличением приведенного нелокального наноразмерного параметра происходит уменьшение

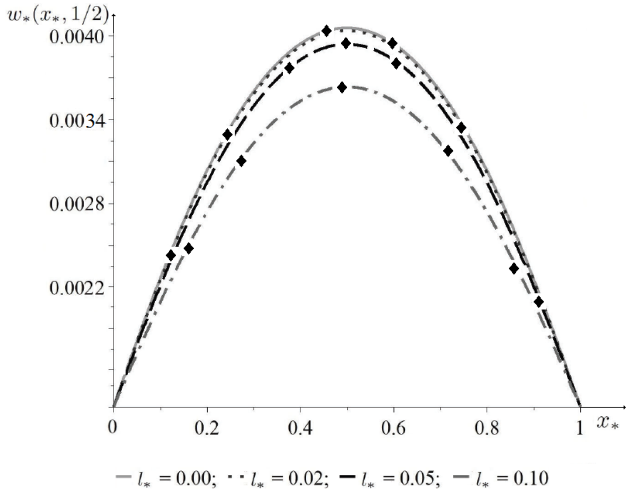

Рис. 1. Непрерывными, пунктирными и штрихпунктирными линиями обозначены безразмерный прогиб $w_*(x_*, 0{,}5)$ изотропной квадратной нанопластины при действии постоянной приведенной нагрузки $q_*(x_*, y_*) = 1$ для различных значений приведенного нелокального наноразмерного параметра l_* полученный с использованием многочленов Чебышёва первого рода [1]; ромбами обозначен безразмерный прогиб, полученный с помощью непрямого метода граничных элементов (метода компенсирующих нагрузок), полученный с помощью разбиения каждой стороны квадратной пластины на 10 граничных элементов

Fig. 1. Solid, dotted, and dash-dotted lines denote the dimensionless deflection $w_*(x_*, 0.5)$ of an isotropic square nanoplate under the action of a constant reduced load $q_*(x_*, y_*) = 1$ for various values of the reduced nonlocal nanoscale parameter l_* obtained using Chebyshev polynomials of the first kind [1]; diamonds denote the dimensionless deflection obtained using the indirect boundary element method (compensating load method), obtained by dividing each side of the square plate into 10 boundary elements

абсолютной величины максимального изгиба срединной поверхности изотропной нанопластины. Представленные результаты могут найти применение для построения математической модели деформированного состояния как ортотропных, так и анизотропных нанопластин.

Литература [References]

1. Omar, I., Marhoon, Th., Babadoust, Sh., Najm, A.Sh., Pirmoradian, M., Salahshour, S., Sajadi, S.M., Static stability of functionally graded porous nanoplates under uniform and non-uniform in-plane loads and various boundary conditions based on the nonlocal strain gradient theory. *Results in Engineering*, 2025, vol. 25, art. 103612. DOI: 10.1016/j.rineng.2024.103612
2. Ullah, S., Bo, H., Zhang, J., Javed, M.F., Chen, W., Buckling behavior of orthotropic thin plates using analytical and machine learning methods. *Engineering Structures*, 2025, vol. 324, art. 119376. DOI: 10.1016/j.engstruct.2024.119376
3. Zhou, Y., Huang, K., Static and dynamic stabilities of modified gradient elastic Kirchhoff—Love plates. *European Journal of Mechanics / A Solids*, 2024, vol. 108, art. 105426. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2024.105426
4. Li, L., Tang H., Hu, Yu., The effect of thickness on the mechanics of nanobeams. *International Journal of Engineering Science*, 2018, vol. 123, pp. 81–91. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2017.11.021
5. Ansari, R., Gholami, R., Rouhi, H., Vibration analysis of single-walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories. *Composites B: Engineering*, 2012, vol. 43, iss. 8, pp. 2985–2989. DOI: 10.1016/j.compositesb.2012.05.049
6. Mindlin, R.D., Eshel, N.N., On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1968, vol. 4, pp. 109–124. DOI: 10.1016/0020-7683(68)90036-X
7. Papargyri-Beskou, S., Giannakopoulos, A.E., Beskos, D.E., Variational analysis of gradient elastic flexural plates under static loading. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, vol. 47, iss. 20, pp. 2755–2766. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.06.003

8. Zhou Y., Huang K. On simplified deformation gradient theory of modified gradient elastic Kirchhoff—Love plate. *European Journal of Mechanics / A Solids*, 2023, vol. 100, art. 105014. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2023.105014
9. Гельфанд, И.М., Шилов, Г.Е., *Обобщенные функции и действия над ними*. Москва, Добросвет, 2000. [Gelfand, I.M., Shilov, G.E., *Obobshchennye funktsii i deystviya nad nimi = Generalized functions and actions on them*. Moscow, Dobrosvet, 2000. (in Russian)]
10. Шилов, Г.Е., *Математический анализ. Второй специальный курс*. Москва, Изд-во МГУ, 1984. [Shilov, G.E., *Matematicheskiy analiz. Vtoroy spetsial'nyy kurs = Mathematical analysis. The second special course*. Moscow, Publishing House of Moscow State University, 1984. (in Russian)]
11. Владимиров, В.С., Жаринов, В.В., *Уравнения математической физики*. Москва, Физико-математическая литература, 2000. [Vladimirov, V.S., Zharinov, V.V., *Uravneniya matematicheskoy fiziki = Equations of mathematical physics*. Moscow, Physical and mathematical literature, 2000. (in Russian)]
12. Шевченко, В.П., *Интегральные преобразования в теории пластин и оболочек*. Донецк, Донецкий государственный университет, 1977. [Shevchenko, V.P., *Integral'nye preobrazovaniya v teorii plastin i obolochek = Integral transformations in the theory of plates and shells*. Donetsk, Donetsk State University, 1977. (in Russian)]
13. Великанов, П.Г., Альтернативные методы получения фундаментальных решений дифференциальных уравнений с частными производными для изотропных материалов. Часть I. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 4, с. 6–22. [Velikanov, P.G., Alternative methods for obtaining fundamental solutions of partial differential equations for isotropic materials. Part I. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 4, pp. 6–22. (in Russian)] EDN: DMWKQC DOI: 10.31429/vestnik-21-4-6-22
14. Великанов, П.Г., Альтернативные методы получения фундаментальных решений дифференциальных уравнений и систем в частных производных для изо- и ортотропных материалов. Часть II. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2025, т. 22, № 2, с. 15–30. [Velikanov, P.G., Alternative methods for obtaining fundamental solutions of differential equations and partial differential systems for isotropic and orthotropic materials. Part II. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 2, pp. 15–30. (in Russian)] EDN: SBDBCP DOI: 10.31429/vestnik-22-2-15-30
15. Хермандер, Л., *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье*. Москва, Мир, 1986. [Hermander, L., *Analiz lineynykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 1. Teoriya raspredeleniy i analiz Fur'e = Analysis of linear partial differential operators. Vol. 1. Theory of distributions and Fourier analysis*. Moscow, Mir, 1986. (in Russian)]
16. Shanz, M., Antes, H., A boundary integral formulation for the dynamic behavior of a Timoshenko beam. *Electronic Journal of Boundary Elements*, 2002, vol. BETEQ 2001, no. 3, pp. 348–359.
17. Артюхин, Ю.П., Грибов, А.П., *Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов*. Казань, Фэн, 2002. [Artyukhin, Yu.P., Gribov, A.P., *Solving problems of nonlinear deformation of plates and flat shells by the method of boundary elements*. Kazan, Feng, 2002. (in Russian)]
18. Грибов, А.П., Великанов, П.Г., Применение преобразования Фурье для получения фундаментального решения задачи изгиба ортотропной пластины. В *Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Всероссийской научной конференции*, 2004, ч. 3, с. 67–71. [Gribov, A.P., Velikanov, P.G., Application of the Fourier transform to obtain a fundamental solution to the problem of orthotropic plate bending. In *Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi: Trudy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii = Mathematical modeling and boundary value problems: Proceedings of the All-Russian Scientific Conference*, 2004, pt. 3, pp. 67–71. (in Russian)]
19. Великанов, П.Г., Исследование термомеханического изгиба длинной пологой цилиндрической панели методом граничных интегральных уравнений. В *Труды 3-го Международного форума «Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки». Ч. 3*. Самара: Изд-во СамГТУ, 2007, с. 15–19. [Velikanov, P.G., Investigation of thermomechanical bending of a long flat cylindrical panel by the method of boundary integral equations. In *Trudy 3-go Mezhdunarodnogo foruma "Aktual'nye problemy sovremennoy nauki. Estestvennye nauki". Ch. 3 = Proc. of the 3rd International Forum*

“Actual problems of modern Science. Natural Sciences”. Pt. 3. Samara, Publishing House of SamSTU, 2007, pp. 15–19. (in Russian)]

20. Великанов, П.Г., Метод граничных интегральных уравнений для решения задач изгиба изотропных пластин, лежащих на сложном двухпараметрическом упругом основании. *Известия Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2008, Т. 8. вып. 1, с. 36–42. [Velikanov, P.G., The method of boundary integral equations for solving bending problems of isotropic plates lying on a complex two-parameter elastic base. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika = Proc. of the Saratov University. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2008, vol. 8, iss. 1, pp. 36–42. (in Russian)]
21. Великанов, П.Г., Куканов, Н.И., Халитова, Д.М., Нелинейное деформирование цилиндрической панели ступенчато-переменной жесткости на упругом основании методом граничных элементов. В *Всероссийская научная конференция с международным участием «Актуальные проблемы механики сплошной среды – 2020»*, 2020, с. 111–115. [Velikanov, P.G., Kukanov, N.I., Khalitova, D.M., Nonlinear deformation of a cylindrical panel of step-variable stiffness on an elastic base by the method of boundary elements. In *Vserossiyskaya nauchnaya konferentsiya s mezhdunarodnym uchastiem “Aktual'nye problemy mekhaniki sploshnoy sredy – 2020” = All-Russian scientific conference with international participation “Actual problems of continuum mechanics – 2020”*, 2020, pp. 111–115. (in Russian)]
22. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Куканов, Н.И., Изгиб анизотропной пластины методом граничных элементов. В сб. *Актуальные проблемы механики сплошных сред*, 2020, с. 105–111. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Kukanov, N.I., Anisotropic plate bending by the boundary elements method. In *Aktual'nye problemy mekhaniki sploshnykh sred = Actual problems of continuum mechanics*, 2020, pp. 105–111. (in Russian)]
23. Великанов, П.Г., Куканов, Н.И., Халитова, Д.М., Использование непрямого метода граничных элементов для расчета изотропных пластин на упругом основании Винклера и Пастернака–Власова. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2021, т. 27, № 2, с. 33–47. [Velikanov, P.G., Kukanov, N.I., Khalitova, D.M., The use of the indirect boundary element method for the calculation of isotropic plates on an elastic base of Winkler and Pasternak–Vlasov. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Bulletin of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 33–47. (in Russian)]
24. Великанов, П.Г., Халитова, Д.М., Решение задач нелинейного деформирования анизотропных пластин и оболочек методом граничных элементов. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2021, т. 27, № 2, с. 48–61. [Velikanov, P.G., Khalitova, D.M., Solving problems of nonlinear deformation of anisotropic plates and shells by the boundary element method. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Bulletin of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 48–61. (in Russian)]
25. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Общая теория ортотропных оболочек. Часть I. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2022, т. 28, № 1–2, с. 46–54. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., General theory of orthotropic shells. Part I. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Bulletin of Samara University. Natural Science series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 46–54. (in Russian)]
26. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Общая теория ортотропных оболочек. Часть II. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2022, т. 28, № 3–4, с. 40–52. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., General theory of orthotropic shells. Part II. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Bulletin of Samara University. Natural Science series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 40–52. (in Russian)]
27. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Математические аналогии для решения задач прочности, устойчивости и колебаний ортотропных пластин и оболочек. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 3, с. 47–54. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Mathematical analogies for solving problems of strength, stability and vibrations of orthotropic plates and shells. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 47–54. (in Russian)] EDN: JYGZJI DOI: 10.31429/vestnik-19-3-47-54
28. Великанова, Н.П., Великанов, П.Г., Проверка утверждения академика Новожилова Г.В. о влиянии погрешности в определении напряжений на величину погрешности в определении ресурса на примере основных деталей двигателя. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 4, с. 48–56. [Velikanova, N.P., Velikanov, P.G.,

Verification of the statement of academician Novozhilov G.V. on the influence of the error in determining stresses on the magnitude of the error in determining the resource on the example of the main engine parts. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 48–56. (in Russian)]

29. Velikanov, P., Solution of contact problems of anisotropic plates bending on an elastic base using the compensating loads method. *E3S Web of Conferences*, 2023, vol. 402 (International Scientific Siberian Transport Forum – TransSiberia 2023), art. 11010. DOI: 10.1051/e3sconf/202340211010
30. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследования по динамике рамных конструкций. *Геосистемы переходных зон*, 2023, т. 7, № 2, с. 180–195. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Research on the dynamics of frame structures. *Geosistemy perekhodnykh zon = Geosystems of transition zones*, 2023, vol. 7, iss. 2, pp. 180–195. (in Russian)]
31. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследование по динамике многоэтажных зданий. *Геосистемы переходных зон*, 2023, т. 7, № 3, с. 304–315. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Research on the dynamics of multi-storey buildings. *Geosistemy perekhodnykh zon = Geosystems of transition zones*, 2023, vol. 7, no. 3, pp. 304-315. (in Russian)]
32. Великанов, П.Г., Математические аналоги и аналогии для решения задач методом граничных элементов. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 1, с. 6–20. [Velikanov, P.G., Mathematical analogies and analogies for solving problems by the boundary element method. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 1, pp. 6–20. (in Russian)] EDN: WRVRQN. DOI: 10.31429/vestnik-21-1-6-20
33. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследование композитов в виде слоистых ортотропных оболочек. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 2, с. 23–34. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Investigation of composites in the form of layered orthotropic shells. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 23–34. (in Russian)]
34. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследование композитов с помощью уравнений общей теории ортотропных оболочек в комплексной форме. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 3, с. 6–15. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Investigation of composites using the equations of the general theory of orthotropic shells in a complex form. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 3, pp. 6–15. (in Russian)]
35. Артюхин, Ю.П., Гурьянов, Н.Г., Котляр, Л.М., *Система Математика 4.0 и ее приложения в механике*. Казань, Казанское математическое общество, Изд-во КамПИ, 2002. [Artyukhin, Y.P., Guryanov, N.G., Kotlyar, L.M., *Sistema Matematika 4.0 i ee prilozheniya v mekhanike = The Mathematics 4.0 system and its applications in mechanics*. Kazan, Kazan Mathematical Society, Publishing House of CamPI, 2002. (in Russian)]
36. Великанов, П.Г., *Основы работы в системе Mathematica*. Казань, Изд-во Казанского гос. техн. ун-та, 2010. [Velikanov, P.G., *Osnovy raboty v sisteme Mathematisa = Fundamentals of work in the Mathematics system*. Kazan, Publishing House of Kazan State Technical University, 2010. (in Russian)]