

УДК 539.3:532.5

EDN: REWAZC DOI: 10.31429/vestnik-23-1-63-72

Фронты изгибно-гравитационных волн, вызванных движущимся источником переменной интенсивности

Ж. В. Маленко ¹, А. А. Ярошенко ^{1,2}✉

¹ Морской институт им. вице-адмирала В.А. Корнилова – филиал Государственного морского университета им. адм. Ф.Ф. Ушакова, ул. Героев Севастополя, д. 11, корпус 8/22, Севастополь, 299001, Россия

² Севастопольский государственный университет, ул. Университетская, 33, Севастополь, 299053, Россия

✉ Ярошенко Александр Александрович; ORCID 0000-0002-6471-0162; e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru

Аннотация. В линейной постановке исследуются неустановившиеся трехмерные колебания ледяного покрова, которые вызваны источником давлений переменной интенсивности. Ледяной покров моделируется тонкой упругой изотропной пластинкой, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. Полученное методом интегральных преобразований Фурье и Лапласа выражение для возвышения поверхности пластина–жидкость исследуется методом стационарной фазы для многомерных интегралов. Изучается влияние скорости движения источника и частоты его колебаний на передние фронты образующихся изгибно-гравитационных волн.

Ключевые слова: изгибно-гравитационные волны, упругая пластина, ледяной покров, несжимаемая жидкость, движущийся источник возмущений, фронт волны, частота колебаний.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Маленко Ж. В., Ярошенко А. А. Фронты изгибно-гравитационных волн, вызванных движущимся источником переменной интенсивности // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2026. Т. 23, № 1. С. 63–72. EDN: REWAZC. DOI: 10.31429/vestnik-23-1-63-72

Поступила 13 декабря 2025 г. После доработки 22 января 2026 г. Принято 28 января 2026 г. Публикация 23 марта 2026 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2026. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Fronts of Flexural-Gravity Waves Caused by a Moving Source of Variable Intensity

Z. V. Malenko ¹, A. A. Yaroshenko ^{1,2}✉

¹ Vice Admiral V.A. Kornilov Maritime Institute – branch of Admiral F.F. Ushakov State Maritime University, 11 Geroev Sevastopol str., bld. 8/22, Sevastopol, 299001, Russia

² Sevastopol State University, 33 Universitetskaya St., Sevastopol, 299053, Russia

✉ Aleksandr A. Yaroshenko; ORCID 0000-0002-6471-0162; e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru

Abstract. In winter, many rivers, lakes and seas of the country are covered with ice. In order to prolong navigation and early opening of rivers and reservoirs, it becomes necessary to destroy the ice cover. One of the ways to destroy a floating ice sheet is the resonance method, which uses hovercraft. To increase the efficiency of the resonance method, Kozin V.M. proposed periodically changing the pressure in the air cushion of the vessel. In a linear formulation, unsteady three-dimensional fluctuations of the ice sheet are investigated, which are caused by a pressure source of variable intensity. The ice sheet is modeled by a thin elastic isotropic plate floating on the surface of an ideal incompressible fluid of finite depth. The expression for the elevation of the plate–liquid surface obtained by the method of Fourier and Laplace integral transformations is investigated by the stationary phase method for multidimensional integrals. The influence of the velocity of the source and the frequency of its oscillations on the leading edges of the resulting flexural-gravity waves is investigated. It is shown that the velocity of the pressure source has the greatest effect on the wave fronts caused by the elastic forces of the plate.

Keywords: flexural-gravitational waves, elastic plate, ice cover, moving perturbations, critical speed, compressive force.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Malenko, Z. V., Yaroshenko, A. A., Fronts of flexural-gravity waves caused by a moving source of variable intensity. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2026, vol. 23, no. 1, pp. 63–72. DOI: 10.31429/vestnik-23-1-63-72

Received 13 December 2025. Revised 22 January 2026. Accepted 28 January 2026. Published 23 March 2026.
The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2026. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\) license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Введение

Одной из проблем в районах Крайнего Севера, Сибири и Дальнего Востока является продление навигации. Для продления навигации возникает необходимость разрушения ледяного покрова рек и водоемов. Технические средства должны разрушать ледяной покров, способствуя раннему вскрытию рек, водохранилищ и акваторий морей, обеспечивая раннюю навигацию. Для этих целей, кроме ледокольных средств, используются суда на воздушной подушке (СВП), которые, двигаясь с определенной скоростью, создают условия для разрушения плавающего ледяного покрова. При определенных скоростях движения нагрузки за кормой судна образуются волны, вызывающие разрушение льда. Ледяной покров при этом растрескивается и разрушается на гребне волны.

Одним из способов разрушения ледяного покрова служит резонансный метод [1, 2], для реализации которого используются СВП [3, 4]. В [5, 6] рассматривается способ повышения эффективности резонансного метода путем периодического изменения давления в подушке СВП. В работе [7] исследуются трехмерные колебания плавающего ледяного покрова при движении по его поверхности источника, совершающего периодические колебания. Приводятся фазовые портреты и передние фронты образующихся волн для различных скоростей движения источника и частоты его колебаний. В работах [8, 9] для периодических колебаний движущегося источника определяются значения критических скоростей, при которых меняется характер трехмерных изгибно-гравитационных волн. Исследуется зависимость критических скоростей источника от частоты его колебаний, а также влияние сил сжатия и растяжения на значения критических скоростей и значения угловых зон распространения волн.

В настоящей работе исследуем влияние скорости движения источника давлений и частоты его колебаний на скорость распространения фронтов образующихся трехмерных изгибно-гравитационных волн.

Среди последних работ, посвященных вопросам деформации и разрушения ледяного покрова движущимися источниками возмущений можно отметить обзорные работы [10, 11]. В работах представлен обзор теоретических и экспериментальных результатов, полученных российскими и зарубежными учеными за последние десятилетия. Основное внимание уделяется изучению изгибно-гравитационных волн, возбуждаемых движущимися источниками возмущений, как по поверхности ледяного покрова, так и в слое жидкости под ним. В теоретических работах ледяной покров моделируется упругой или вязкоупругой пластиной. Рассматриваются модели сплошного ледяного покрова, ледяного покрова с трещиной и полубесконечные ледяные покровы.

1. Постановка задачи

Исследуем колебания ледяного покрова, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H , вызванные движущимся по его поверхности с постоянной скоростью v источником давлений переменной интенсивности

$$p = p_0 f(x_1, y) \exp(i\sigma t), \quad x_1 = x + vt, \quad v = \text{const}. \quad (1.1)$$

Ледяной покров моделируем тонкой упругой изотропной пластинкой, плавающей на поверхности жидкости [12, 13]. Движение жидкости считаем потенциальным. Полагаем, что до начала действия возмущений жидкость не возмущена и граница поверхности пластины – жидкость горизонтальна. В рамках линейной теории в системе координат x_1, y , связанной с движущейся областью давлений (1.1), задача сводится к решению уравнения Лапласа

$$\Delta\phi = 0, \quad -H < z < 0, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad (1.2)$$

со следующими граничными и начальными условиями:

$$D_1 \nabla^4 \zeta + Q_1 \Delta_l \zeta + \chi_1 F \zeta + \zeta + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{1}{g} = \frac{p}{\rho g} \text{ при } z = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -H, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - v \frac{\partial \zeta}{\partial x} \text{ при } z = 0, \quad \phi(x, y, z, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0,$$

где

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad \Delta_l = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad F = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$D_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad Q_1 = \frac{Q}{\rho g}, \quad \chi_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}, \quad p_1 = \frac{p_0}{\rho g}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)},$$

ρ – плотность жидкости; D, Q, E, h, ρ_1, μ – цилиндрическая жесткость, сжимающее усилие, модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки, соответственно. ζ – возвышение поверхности пластина – жидкость. Здесь и далее у x_1 опущен индекс 1.

2. Аналитическое выражение для возвышения поверхности пластина-жидкость

Применяя для решения задачи (1.1)–(1.3) метод интегральных преобразований Фурье по горизонтальным координатам x и y для возвышения поверхности пластина – жидкость, получим

$$\zeta = \frac{p_0}{8\pi^2 \rho g} e^{i\sigma t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(m, n) M(r) \psi(m, n, t) e^{i(mx+ny)} dm dn, \quad (2.1)$$

$$\psi = \frac{2}{\Delta_1 \Delta_2} - \frac{1}{\tau \Delta_1} e^{-i\Delta_1 t} + \frac{1}{\tau \Delta_2} e^{-i\Delta_2 t}, \quad (2.2)$$

$$r = (m^2 + n^2)^{1/2}, \quad m = r \cos \theta, \quad n = r \sin \theta,$$

$$\Delta_j = \sigma + vm + \delta_j \tau, \quad \delta_j = (-1)^j, \quad j = 1, 2,$$

$$\tau(r) = (l(r)M(r))^{1/2}, \quad l(r) = 1 + Q_1 r^2 + D_1 r^4,$$

$$M(r) = rg(1 + \chi_1 rg \operatorname{th} rH)^{-1} \operatorname{th} rH,$$

$f^*(m, n)$ – трансформанта Фурье функции $f(x, y)$.

Первое слагаемое в выражении (2.2) описывает установившиеся колебания. Второе и третье слагаемые определяются начальными условиями и характеризуют развитие волнового движения.

Преобразуем (2.2) следующим образом:

$$\psi = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\Delta_1} (1 - e^{-i\Delta_1 t}) - \frac{1}{\Delta_2} (1 - e^{-i\Delta_2 t}) \right)$$

и учтем, что

$$\frac{i(1 - e^{-i\Delta_j t})}{\Delta_j} = - \int_0^t e^{-i\Delta_j \xi} d\xi.$$

После перехода к полярным координатам в случае осесимметричного распределения давлений (1.1) выражение (2.1) для ζ примет вид

$$\zeta = - \frac{p_0}{8\pi^2 \rho g} \operatorname{Im}(e^{i\sigma t} (J_1 - J_2)), \quad (2.3)$$

$$J_j = \int_0^\infty \int_0^t \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{r f^*(r)}{\tau(r)} M(r) e^{-i(rR \cos(\theta-\gamma) - \Delta_j \xi)} d\theta d\xi dr,$$

$$R = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad x = R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma.$$

3. Анализ полученного решения

Асимптотическое исследование выражения (2.3) для ζ при больших значениях R и t выполним методом стационарной фазы для многомерных интегралов [14]. Стационарные точки (r, θ, ξ) для J_j удовлетворяют системе уравнений (3.1)–(3.2)

$$R \cos(\theta - \gamma) - (v \cos \theta + \delta_j \tau') \xi = 0, \quad v \xi \sin \theta - R \sin(\theta - \gamma) = 0, \quad (3.1)$$

$$\sigma + \delta_j \tau + vr \cos \theta = 0, \quad (3.2)$$

где штрих означает производную по r .

Уравнение (3.2) имеет вещественные корни

$$\theta = \pm \theta_j, \quad \theta_j = \arccos(-\delta_j \tau_j), \quad \tau_j = \frac{\tau + \delta_j \sigma}{vr} \text{ при } |\tau_j| \leq 1. \quad (3.3)$$

После подстановки (3.3) в (3.1) получим

$$\operatorname{tg} \gamma = \chi_j(r), \quad \chi_j = \tau'(1 - \tau_j^2)^{1/2} (v - \tau_j \tau')^{-1}, \quad (3.4)$$

$$\xi = R/u_j, \quad u_j = (v - \delta_j \tau') \cos^{-1} \gamma. \quad (3.5)$$

Из (3.4) определяются значения r , соответствующие стационарным точкам интегралов J_j в установившемся и неустойчивом режимах. Принадлежность стационарных точек области интегрирования определяется условием $0 \leq \xi \leq t$. Это условие и соотношение (3.5) характеризуют распространение колебаний.

На рис. 1 приведено качественное поведение функции χ_1 для $0 < \sigma < \sigma_0$ (рис. 1а–1д) и для $\sigma > \sigma_0$ (рис. 1е, 1ж). Поведение функции χ_2 для $\sigma > 0$ приведено на рис. 1з, 1и.

Уравнение $\operatorname{tg} \gamma = \chi_1(r)$ при $0 < \sigma < \sigma_0$ имеет один корень, если $0 < \nu < \nu_{01}$; два корня, если $\nu_{01} < \nu < \nu_{11}$; два или четыре корня, если $\nu_{11} < \nu < \nu_{02}$; один или три корня, если $\nu > \nu_{02}$.

При $\sigma > \sigma_0$ уравнение $\operatorname{tg} \gamma = \chi_1(r)$ имеет один корень, если $0 < \nu < \nu_{11}$; один либо три корня, если $\nu > \nu_{11}$.

Уравнение $\operatorname{tg} \gamma = \chi_2(r)$ имеет при $\sigma > 0$ один корень, если $\nu_{03} < \nu < \nu_{12}$; один либо три корня, если $\nu > \nu_{12}$.

Из анализа поведения функций $\chi_j(r)$ следует, что число положительных корней α_{jk} уравнений (3.4) зависит от скорости v перемещения давлений, частоты колебаний σ источника и величины угла γ . Количество корней уравнений (3.4) определяет количество образующихся волн. Таким образом, в зависимости от скорости перемещения источника и его частоты колебаний образуется от одной до семи систем волн (3.6).

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_{14}, \text{ при } 0 < \sigma < \sigma_0, 0 < v < \nu_{01}; \sigma_0 < \sigma < \sigma_6, 0 < v < \nu_{11}; \sigma > \sigma_6, 0 < v < \nu_{03}, \\ \zeta_{14} + \zeta_{13}, \text{ при } 0 < \sigma < \sigma_3, \nu_{01} < v < \nu_{03}; \sigma_3 < \sigma < \sigma_0, \nu_{01} < v < \nu_{11}; \\ \zeta_{14} + \zeta_{21}, \text{ при } \sigma > \sigma_6, \nu_{03} < v < \nu_{11}; \\ \zeta_{14} + \zeta_{13} + \zeta_{21}, \text{ при } 0 < \sigma < \sigma_3, \nu_{03} < v < \nu_{11}; \\ \zeta_{14} + \zeta_{12} + \zeta_{13}, \text{ при } \sigma_4 < \sigma < \sigma_0, \nu_{02} < v < \nu_{03}; \sigma_0 < \sigma < \sigma_6, \nu_{11} < v < \nu_{03}; \\ \zeta_{14} + \zeta_{11} + \zeta_{12} + \zeta_{13}, \text{ при } \sigma_3 < \sigma < \sigma_4, \nu_{11} < v < \nu_{03}; \sigma_4 < \sigma < \sigma_0, \nu_{11} < v < \nu_{03}; \\ \zeta_{14} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21}, \text{ при } \sigma_1 < \sigma < \sigma_4, \nu_{02} < v < \nu_{12}; \sigma_4 < \sigma < \sigma_6, \nu_{03} < v < \nu_{12}; \\ \quad \sigma > \sigma_6, \nu_{11} < v < \nu_{12} \\ \zeta_{14} + \zeta_{11} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21}, \text{ при } 0 < \sigma < \sigma_1, \nu_{11} < v < \nu_{12}; \\ \quad \sigma_1 < \sigma < \sigma_3, \nu_{11} < v < \nu_{02}; \sigma_3 < \sigma < \sigma_4, \nu_{03} < v < \nu_{02}; \\ \zeta_{14} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21} + \zeta_{22} + \zeta_{23}, \text{ при } 0 < \sigma < \sigma_1, v > \nu_{02}; \sigma > \sigma_1, v > \nu_{11}; \\ \zeta_{14} + \zeta_{11} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21} + \zeta_{22} + \zeta_{23}, \text{ при } 0 < \sigma < \sigma_1, \nu_{12} < v < \nu_{02}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Здесь

$$\zeta_{jk} = R^{-1/2} \psi_j(\alpha_{jk}) \cos(R\Phi_j(\alpha_{jk}) + \sigma t + \delta_{jk}\pi/4) + O(R^{-1}), \quad (3.7)$$

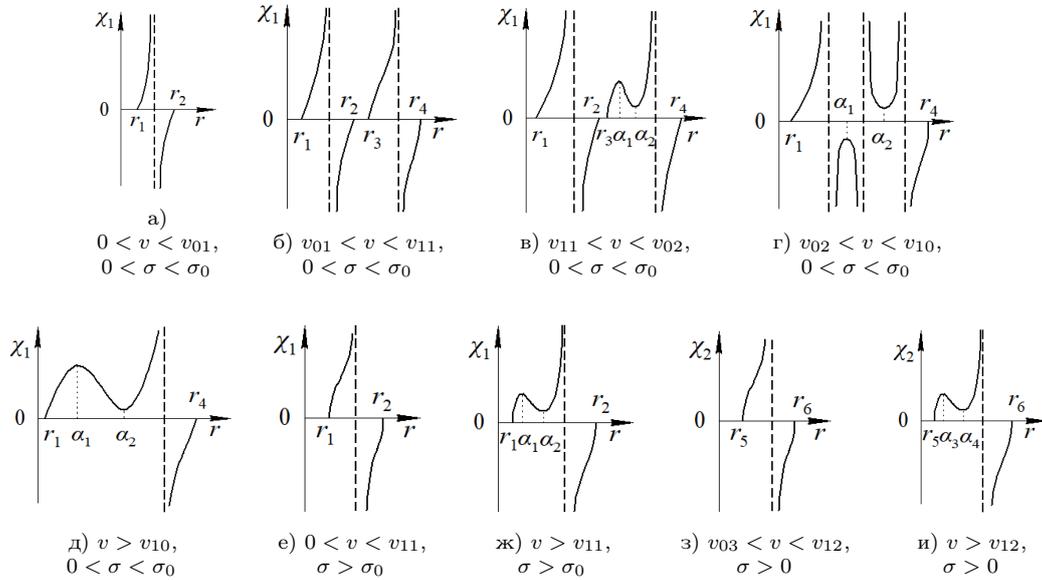


Рис. 1. Графики функций $\chi_1(r)$ и $\chi_2(r)$

Fig. 1. Graphs of functions $\chi_1(r)$ and $\chi_2(r)$

$$\psi_j = -\frac{p_0}{\rho g} f^*(r) M(r) ((1 - \tau_j^2) \tau v)^{-1} (2\pi |\Phi_j''|)^{-1/2},$$

$$\Phi_j = \delta_j r ((1 - \tau_j^2)^{1/2} \sin \gamma - \tau_j \cos \gamma),$$

$$j = 1, \quad k = 1, \dots, 4; \quad j = 2, \quad k = 1, 2, 3; \quad \delta_{jk} = (-1)^{j+k}, \quad k \neq 4, \quad \delta_{14} = 1.$$

Каждый корень α_{jk} уравнений (3.4) характеризует систему волн ζ_{jk} .

При $0 < \sigma < \sigma_0$ для α_{1k} справедливы следующие оценки:

$$r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 \text{ для } 0 < v < v_{01}; \quad r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 < r_3 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \text{ для } v_{01} < v < v_{11};$$

$$r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 < r_3 \leq \alpha_{11} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \text{ для } v_{11} < v < v_{02};$$

$$r_1 \leq \alpha_{14} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \text{ для } v > v_{02}.$$

При $\sigma > \sigma_0$ для α_{1k} справедливы следующие оценки:

$$r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 \text{ для } 0 < v < v_{11}; \quad r_1 \leq \alpha_{14} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_2 \text{ для } v > v_{11}.$$

При $\sigma > 0$ для α_{2k} справедливы следующие оценки:

$$r_5 \leq \alpha_{23} \leq r_6 \text{ для } v_{03} < v < v_{12}; \quad r_5 \leq \alpha_{21} \leq \alpha_3 \leq \alpha_{22} \leq \alpha_4 \leq \alpha_{23} \leq r_6 \text{ для } v > v_{12}.$$

$$\sigma_0 = (\beta_2 \tau(\beta_1) - \beta_1 \tau(\beta_2)) (\beta_2 - \beta_1)^{-1},$$

$$v_{01} = \tau_5(\beta_2), \quad v_{02} = \tau_5(\beta_1), \quad v_{03} = \tau_6(\beta_3), \quad v_{11} = (\tau_7(\beta_4))^{1/2}, \quad v_{12} = (\tau_8(\beta_6))^{1/2}, \quad v_{10} = (\tau_9(\beta_8))^{1/2},$$

$$\tau_{5,6} = (\tau \pm \sigma)/r, \quad \tau_7 = \tau_5^2 - r(\tau_5')^2 \tau'/\tau'', \quad \tau_8 = \tau_6^2 - r(\tau_6')^2 \tau'/\tau'', \quad \tau_9 = \tau_5 \tau', \quad \beta_k \quad (k = 1, \dots, 9)$$

являются корнями уравнений: $\tau_5'(\beta_{1,2}) = 0$, $\tau_6'(\beta_3) = 0$, $\chi_1''(\beta_{4,5}) = 0$, $\chi_2''(\beta_{6,7}) = 0$, $\tau_9'(\beta_{8,9}) = 0$, где $\beta_1 < \beta_2$, $\beta_4 < \beta_5$, $\beta_6 < \beta_7$, $\beta_8 < \beta_9$, $r_1 < r_2 < \beta_1 < r_3 < \beta_2 < r_4$, $r_5 < \beta_3 < r_6$, r_k ($k = 1, \dots, 4$) — положительные корни уравнения $1 - \tau_1^2 = 0$, а $r_{5,6}$ — уравнения $1 - \tau_2^2 = 0$.

Размеры угловых зон определяются величинами углов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{11}, \gamma_{22}$: $\gamma_1 = \arctg \chi_1(\alpha_1)$, если $v_{11} < v < v_{02}$, $\gamma_3 = \arctg \chi_1(\alpha_1)$, если $v > v_{02}$, $\gamma_2 = \arctg \chi_1(\alpha_2)$, $\gamma_{11} = \arctg \chi_2(\alpha_3)$, $\gamma_{22} = \arctg \chi_2(\alpha_4)$, α_k ($k = 1, \dots, 4$) — корни уравнений: $\chi_1'(\alpha_{1,2}) = 0$, $\chi_2'(\alpha_{3,4}) = 0$, $\alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_3 < \alpha_4$.

Волны образуются в областях $R < u_{jk} t$, $u_{jk} = u_j(\alpha_{jk})$ (3.5) угловых зон, соответствующих диапазону изменения скорости перемещения источника возмущений и частоты его колебаний.

На рис. 2–10 представлены фронты волн ζ_{jk} ($j = 1, k = 1, \dots, 4; j = 2, k = 1, 2, 3$) для различных скоростей движения источника возмущений и частоты его колебаний. Передние

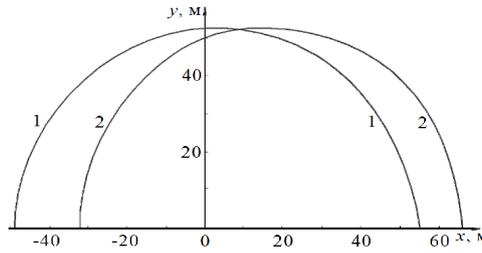


Рис. 2. Фронты волны ζ_{14} для $v = 1$ м/с (линия 1) и $v = 6$ м/с (линия 2) ($0 < v < v_{01}$), $\sigma = 0,2 \text{ с}^{-1}$ ($\sigma < \sigma_0$), $t = 2 \text{ с}$

Fig. 2. Wave fronts ζ_{14} for $v = 1 \text{ m/s}$ (line 1) and $v = 6 \text{ m/s}$ (line 2) ($0 < v < v_{01}$), $\sigma = 0.2 \text{ s}^{-1}$ ($\sigma < \sigma_0$), $t = 2 \text{ s}$

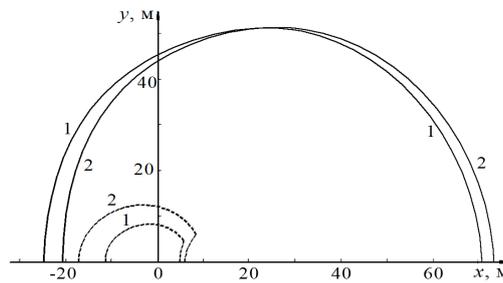


Рис. 3. Фронты волн ζ_{13} (пунктирные линии) и ζ_{14} (сплошные линии) для $v = 8$ м/с (линии 1) и $v = 9$ м/с (линии 2) ($v_{01} < v < v_{11}$), $\sigma = 0,2 \text{ с}^{-1}$ ($\sigma < \sigma_0$), $t = 2 \text{ с}$

Fig. 3. Wave fronts ζ_{13} (dotted lines) and ζ_{14} (solid lines) for $v = 8 \text{ m/s}$ (lines 1) and $v = 9 \text{ m/s}$ (lines 2) ($v_{01} < v < v_{11}$), $\sigma = 0.2 \text{ s}^{-1}$ ($\sigma < \sigma_0$), $t = 2 \text{ s}$

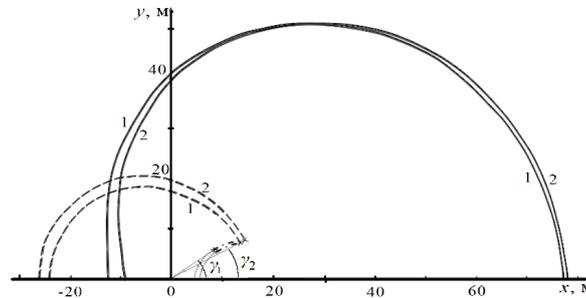


Рис. 4. Фронты волн ζ_{11} (штриховые линии), ζ_{12} (штрихпунктирные линии), ζ_{13} (пунктирные линии) и ζ_{14} (сплошные линии) для $v = 10,5$ м/с (линии 1) и $v = 11$ м/с (линии 2) ($v_{11} < v < v_{02}$), $\sigma = 0,2 \text{ с}^{-1}$ ($\sigma < \sigma_0$), $t = 2 \text{ с}$

Fig. 4. Wave fronts ζ_{11} (dashed lines), ζ_{12} (dotted lines), ζ_{13} (dotted lines) and ζ_{14} (solid lines) for $v = 10.5 \text{ m/s}$ (lines 1) and $v = 11 \text{ m/s}$ (lines 2) ($v_{11} < v < v_{02}$), $\sigma = 0.2 \text{ s}^{-1}$ ($\sigma < \sigma_0$), $t = 2 \text{ s}$

фронты этих волн перемещаются со скоростью u_{jk} . В работе [7] представлены фазовые портреты образующихся волн. Для количественной оценки численные расчеты проводились для следующих параметров ледяного покрова и жидкости: $E = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\mu = 0,34$, $\rho_1 = 870 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 0,34$, $Q = 0$, $h = 0,2 \text{ м}$, $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $H = 100 \text{ м}$.

Рассмотрим случай, когда частота колебаний движущегося источника $0 < \sigma < \sigma_0$ (рис. 2–6). Волны ζ_{14} имеют вид кольцевых волн, распространяющихся в жидкости со свободной поверхностью. При $0 < v < v_{02}$ они распространяются по всей поверхности пластина–жидкость (рис. 2–4) и в угловой зоне $-\gamma_3 \leq \gamma \leq \gamma_3$ за источником при $v > v_{02}$ (рис. 5–6).

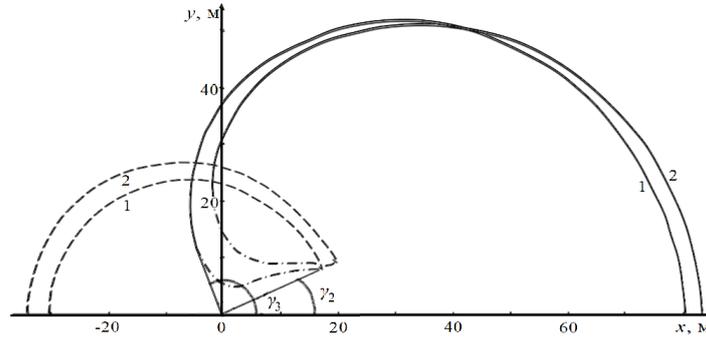


Рис. 5. Фронты волн ζ_{12} (штрихпунктирные линии), ζ_{13} (пунктирные линии) и ζ_{14} (сплошные линии) для $v = 12$ м/с (линии 1) и $v = 13$ м/с (линии 2) ($v_{02} < v < v_{10}$), $\sigma = 0,2 \text{ c}^{-1}$ ($\sigma < \sigma_0$), $t = 2 \text{ c}$

Fig. 5. Wave fronts ζ_{12} (dotted lines), ζ_{13} (dotted lines) and ζ_{14} (solid lines) for $v = 12$ m/s (lines 1) and $v = 13$ m/s (lines 2) ($v_{02} < v < v_{10}$), $\sigma = 0.2 \text{ s}^{-1}$ ($\sigma < \sigma_0$), $t = 2 \text{ s}$

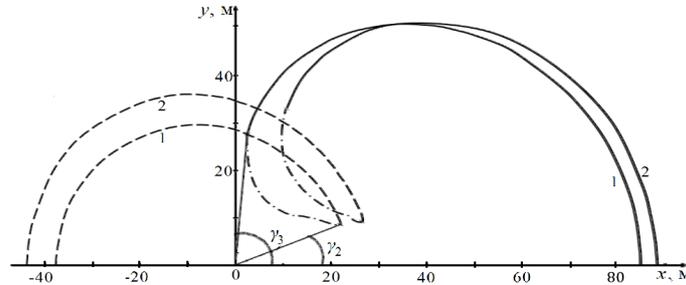


Рис. 6. Фронты волн ζ_{12} (штрихпунктирные линии), ζ_{13} (пунктирные линии) и ζ_{14} (сплошные линии) для $v = 14$ м/с (линии 1) и $v = 16$ м/с (линии 2) ($v > v_{10}$), $\sigma = 0,2 \text{ c}^{-1}$ ($\sigma < \sigma_0$), $t = 2 \text{ c}$

Fig. 6. Wave fronts ζ_{12} (dotted lines), ζ_{13} (dotted lines) and ζ_{14} (solid lines) for $v = 14$ m/s (lines 1) and $v = 16$ m/s (lines 2) ($v > v_{10}$), $\sigma = 0.2 \text{ s}^{-1}$ ($\sigma < \sigma_0$), $t = 2 \text{ s}$

Волны ζ_{14} обусловлены периодичностью колебаний источника возмущений. При $0 < \sigma < \sigma_0$ и $0 < v < v_{01}$ образуются только волны ζ_{14} . На рис. 2 приведены фронты этих волн для скорости движения источника $v = 1$ м/с (линия 1) и $v = 6$ м/с (линия 2) из диапазона $0 < v < v_{01}$. При увеличении скорости движения источника уменьшается фронт волн ζ_{14} , распространяющихся впереди источника, и увеличивается за источником.

При дальнейшем увеличении скорости движения источника возмущений $v > v_{01}$ образуются изгибно-гравитационные волны ζ_{13} , которые при $v_{01} < v < v_{11}$ распространяются как впереди источника, так и за ним. Волны, распространяющиеся впереди источника, короче волн, распространяющихся за источником. Упругие силы пластинки оказывают большее влияние на волны, распространяющиеся впереди источника, а гидродинамические силы — на волны, распространяющиеся за источником. При $v > v_{11}$ волны ζ_{13} распространяются в угловой зоне $\gamma_2 \leq \gamma \leq 2\pi - \gamma_2$. В угловой зоне $-\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_2$ волны ζ_{13} не образуются. При увеличении скорости движения источника увеличивается фронт распространения изгибно-гравитационных волн ζ_{13} (рис. 3–6).

При $v_{11} < v < v_{02}$ образуются волны ζ_{11} и ζ_{12} , которые распространяются за источником возмущений и имеют характер поперечных и продольных корабельных волн соответственно (рис. 4). Волны ζ_{11} распространяются в угловой зоне $-\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_1$, а при $v > v_{02}$ не образуются. Волны ζ_{12} распространяются в угловых зонах $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_3$ при $v > v_{02}$ (рис. 5–6). При увеличении скорости движения источника скорость распространения волн ζ_{11} уменьшается (рис. 4), а скорость распространения волн ζ_{12} увеличивается (рис. 4–6).

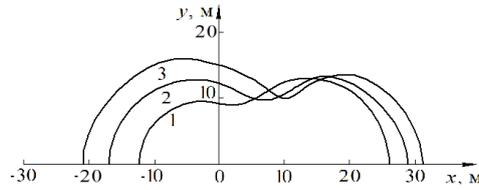


Рис. 7. Фронт волны ζ_{14} для $v = 5$ м/с (линия 1), $v = 6$ м/с (линия 2), $v = 6$ м/с (линия 3) ($0 < v < v_{11}$), $\sigma = 0,8$ с $^{-1}$ ($\sigma > \sigma_0$), $t = 2$ с

Fig. 7. Wave front ζ_{14} for $v = 5$ m/s (line 1), $v = 6$ m/s (line 2), $v = 6$ m/s (line 3) ($0 < v < v_{11}$), $\sigma = 0.8$ s $^{-1}$ ($\sigma > \sigma_0$), $t = 2$ s

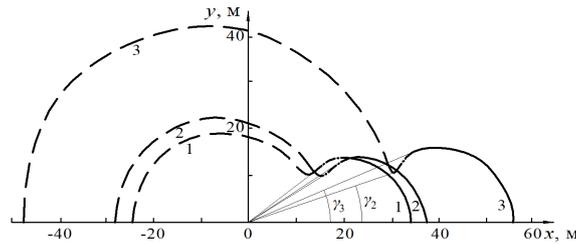


Рис. 8. Фронты волн ζ_{12} (штрихпунктирная линия), ζ_{13} (штриховая линия) и ζ_{14} (сплошная линия) для $v = 8$ м/с (линия 1), $v = 9$ м/с (линия 2), $v = 16$ м/с (линия 3) ($v > v_{11}$), $\sigma = 0,8$ с $^{-1}$ ($\sigma > \sigma_0$), $t = 2$ с

Fig. 8. Wave fronts ζ_{12} (dotted line), ζ_{13} (dashed line) and ζ_{14} (solid line) for $v = 8$ m/s (line 1), $v = 9$ m/s (line 2), $v = 16$ m/s (line 3) ($v > v_{11}$), $\sigma = 0.8$ s $^{-1}$ ($\sigma > \sigma_0$), $t = 2$ s

Рассмотрим случай, когда частота колебаний движущегося источника $\sigma > \sigma_0$ (рис. 7–8). При $0 < v < v_{11}$ (рис. 7) распространяются кольцевые волны ζ_{14} и покрывают всю поверхность пластина-жидкость. На волны ζ_{14} , распространяющиеся впереди источника, оказывают наибольшее влияние упругие силы пластинки и при $v > v_{11}$ они приобретают характер упругих волн ζ_{13} , которые распространяются в угловой зоне $\gamma_2 \leq \gamma \leq 2\pi - \gamma_2$. На волны ζ_{14} , распространяющиеся за источником, оказывают влияние гидродинамические силы, и при $v > v_{11}$ они распространяются в угловой зоне $-\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_2$. При $v > v_{11}$ для $\sigma > \sigma_0$ образуется три системы волн — ζ_{12} , ζ_{13} , ζ_{14} . Волны ζ_{12} распространяются в угловых зонах $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_3$ за источником. Волны ζ_{11} не образуются. При увеличении скорости движения источника увеличивается область распространения волн ζ_{12} , ζ_{13} , ζ_{14} .

Кроме перечисленных волн ζ_{11} , ζ_{12} , ζ_{13} , ζ_{14} , при $\sigma > 0$ и $v > v_{03}$ образуются волны ζ_{21} , ζ_{22} , ζ_{23} . На рис. 9–10 представлены фронты этих волн для $\sigma = 0,2$ с $^{-1}$ и $\sigma = 0,8$ с $^{-1}$ (ζ_{23} — линии 1–4; ζ_{21} , ζ_{22} , ζ_{23} — линии 5). Волны ζ_{23} — упругие волны, при $v_{03} < v < v_{12}$ распространяются по всей поверхности пластинки, как впереди источника возмущений, так и за ним, а при $v > v_{12}$ в угловой зоне $\gamma_{22} \leq \gamma \leq 2\pi - \gamma_{22}$. Волны ζ_{21} , ζ_{22} образуются при $v > v_{12}$ и имеют характер поперечных и продольных корабельных волн соответственно. Волны ζ_{21} распространяются в угловой зоне $-\gamma_{11} \leq \gamma \leq \gamma_{11}$, а ζ_{22} в угловых зонах $\gamma_{22} \leq |\gamma| \leq \gamma_{11}$. При увеличении скорости движения источника увеличивается фронт распространения этих волн (ζ_{21} , ζ_{22} , ζ_{23}).

Заключение

Наибольшее влияние скорость движения источника оказывает на скорость распространения передних фронтов упругих волн ζ_{13} , ζ_{23} и волн ζ_{14} , обусловленных наличием периодических колебаний источника. На фронты волн ζ_{11} , ζ_{12} , ζ_{21} и ζ_{22} скорость движения источника оказывает меньшее влияние. Движущийся источник, совершающий периодически колебания, повышает эффективность резонансного метода разрушения ледяного покрова. При этом источник давлений должен совершать колебания с частотой $\sigma = \sigma_0$ и двигаться со скоростью $\nu = \nu_{01} = \nu_{11} = \nu_{02} = \nu_{10}$.

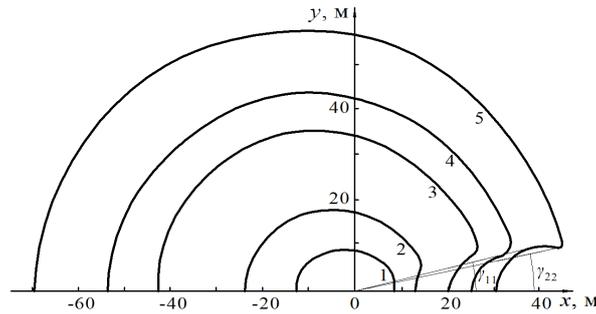


Рис. 9. Фронты волны ζ_{23} (линии 1–4) и волн ζ_{21} , ζ_{22} , ζ_{23} (линия 5) для $v = 10$ м/с, $v = 12$ м/с, $v = 17$ м/с, $v = 20$ м/с (линии 1–4 соответственно) ($v_{03} < v < v_{12}$), $v = 25$ м/с (линия 5) ($v > v_{12}$), $\sigma = 0,2 \text{ c}^{-1}$ ($\sigma > 0$), $t = 2 \text{ c}$

Fig. 9. Wave fronts ζ_{23} (lines 1–4) and waves ζ_{21} , ζ_{22} , ζ_{23} (line 5) for $v = 10 \text{ m/s}$, $v = 12 \text{ m/s}$, $v = 17 \text{ m/s}$, $v = 20 \text{ m/s}$ (lines 1–4, respectively) ($v_{03} < v < v_{12}$), $v = 25 \text{ m/s}$ (line 5) ($v > v_{12}$), $\sigma = 0.2 \text{ s}^{-1}$ ($\sigma > 0$), $t = 2 \text{ s}$

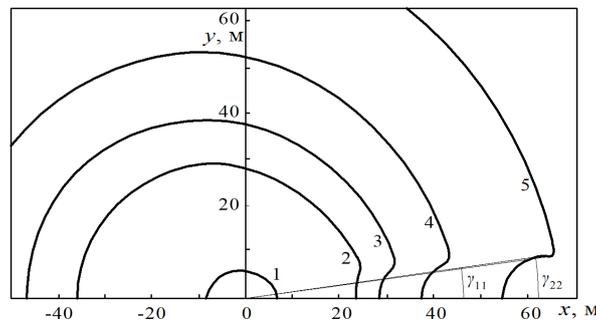


Рис. 10. Фронты волны ζ_{23} (линии 1–4) и волн ζ_{21} , ζ_{22} , ζ_{23} (линия 5) для $v = 12$ м/с, $v = 17$ м/с, $v = 20$ м/с, $v = 25$ м/с (линии 1–4 соответственно) ($v_{03} < v < v_{12}$), $v = 35$ м/с (линия 5) ($v > v_{12}$), $\sigma = 0,8 \text{ c}^{-1}$ ($\sigma > 0$), $t = 2 \text{ c}$

Fig. 10. Wave fronts ζ_{23} (lines 1–4) and waves ζ_{21} , ζ_{22} , ζ_{23} (line 5) for $v = 12 \text{ m/s}$, $v = 17 \text{ m/s}$, $v = 20 \text{ m/s}$, $v = 25 \text{ m/s}$ (lines 1–4, respectively) ($v_{03} < v < v_{12}$), $v = 35 \text{ m/s}$ (line 5) ($v > v_{12}$), $\sigma = 0.8 \text{ s}^{-1}$ ($\sigma > 0$), $t = 2 \text{ s}$

Литература [References]

1. Козин, В.М., *Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты*. Москва, Академия Естественных наук, 2007. [Kozin, V.M., *Rezonansnyj metod razrusheniya ledyanogo pokrova. Izobreteniya i eksperimenty = Resonant method of ice cover destruction. Inventions and experiments*. Moscow, Akademiya Estestvoznaniya, 2007. (in Russian)]
2. Козин, В.М., Результаты экспериментально-теоретических исследований возможностей резонансного метода разрушения ледяного покрова. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2023, № 3, с. 3–20. [Kozin, V.M., The results of experimental and theoretical studies of the possibilities of the resonant method of ice sheet destruction. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela = News of the Russian Academy of Sciences. Solid State Mechanics*, 2023, no. 3, pp. 3–20. (in Russian)] DOI: 10.31857/S0572329922600396
3. Зуев, В.А., Козин, В.М., *Использование судов на воздушной подушке для разрушения ледяного покрова*. Владивосток, Издательство Дальневосточного университета, 1988. [Zuev, V.A., Kozin, V.M., *Ispol'zovanie sudov na vozduшной podushke dlya razrusheniya ledyanogo pokrova = The use of hovercraft to destroy the ice sheet*. Vladivostok, Far Eastern University Press, 1988. (in Russian)]
4. Козин, В.М., Земляк, В.Л., Куркин, А.А., Беляков, В.В., *Избранные задачи ледотехники. Средства и методы решения*. Нижний Новгород, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, 2023. [Kozin, V.M., Zemlyak, V.L., Kurkin, A.A., Belyakov, V.V., *Izbrannye zadachi ledotekhniki. Sredstva i metody resheniya = Selected tasks of ice engineering. Means and methods of solution*. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseev, 2023. (in Russian)]

5. Козин, В.М., Скрипачев, В.В., Колебания ледяного покрова под действием периодически изменяющейся нагрузки. *Прикладная механика и техническая физика*, 1992, № 5, с. 141–146. [Kozin, V.M., Skripachev, V.V., Fluctuations of the ice cover under the influence of periodically changing load. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika = Applied mechanics and technical physics*, 1992, no. 5, pp. 141–146. (in Russian)]
6. Кожаев, А.В., Козин, В.М., Повышение эффективности резонансного метода интерференций изгибно-гравитационных волн от периодического изменения давления в подушке СВП. В *Сборнике докладов IV Всероссийской конференции с международным участием «Полярная механика-2017» 14–15 сентября 2017 г.*, Санкт-Петербург. Полярная механика, 2018, № 4, с. 265–271. [Kozhaev, A.V., Kozin, V.M., Increasing the efficiency of the resonant method of interference of bending-gravitational waves from periodic pressure changes in the SVP cushion. In *Sbornik докладov IV Vserossiyskoj konferencii s mezhdunarodnym uchastiem “Polyarnaya mekhanika-2017” 14–15 sentyabrya 2017 g.*, Sankt-Peterburg. *Polyarnaya mekhanika = Collection of reports of the IV All-Russian Conference with international participation “Polar Mechanics-2017” September 14–15, 2017*, St. Petersburg. *Polar mechanics*, 2018, no. 4, pp. 265–271. (in Russian)]
7. Ярошенко, А.А., Маленко Ж.В., Неуставившиеся трехмерные изгибно-гравитационные волны, вызванные движущимися возмущениями переменной интенсивности. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2023, т. 20, № 1, с. 41–51. [Yaroshenko, A.A., Malenko Zh.V., Unsteady three-dimensional flexural-gravity waves caused by moving disturbances of variable intensity. *Ehkologicheskij vestnik nauchnykh centrov Chernomorskogo ehkonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2023, vol. 20, no. 1, pp. 41–51. (in Russian)] DOI: [10.31429/vestnik-20-1-41-51](https://doi.org/10.31429/vestnik-20-1-41-51)
8. Маленко, Ж.В., Ярошенко А.А., Изгибно-гравитационные волны в ледяном покрове от движущихся периодически изменяющихся возмущений. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2024, № 3, с. 45–56. [Malenko, Zh.V., Yaroshenko, A.A., Flexural-gravity waves in an ice cover excited by periodically varying moving perturbations. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza = News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Liquid and Gas*, 2024, no. 3, pp. 45–56. (in Russian)] DOI: [10.31857/S1024708424030042](https://doi.org/10.31857/S1024708424030042)
9. Ярошенко, А.А., Маленко, Ж.В., Трехмерные изгибно-гравитационные волны в ледяном покрове, вызванные движущимися источниками возмущений. *Труды Крыловского государственного научного центра*, 2024, специальный выпуск 1, с. 202–208. [Yaroshenko, A.A., Malenko, Zh.V., Three-dimensional flexural-gravity waves in the ice cover caused by moving sources of disturbances. *Trudy Krylovskogo gosudarstvennogo nauchnogo centra = Proceedings of the Krylov State Scientific Center*, 2024, special issue 1, pp. 202–208. (in Russian)]
10. Ni, B., Xiong, H., Han, D., Zeng, L., Sun, L., Tan, H., A Review of Ice Deformation and Breaking Under Flexural–Gravity Waves Induced by Moving Loads. *Journal of Marine Science and Application*, 2025, vol. 24, no. 1, pp. 35–52. DOI: [10.1007/s11804-024-00408-3](https://doi.org/10.1007/s11804-024-00408-3)
11. Стурова, И.В., Ткачева, Л.А., Поведение плавающего ледяного покрова под действием внешних нагрузок (обзор). *Прикладная механика и техническая физика*, 2025, № 3, с. 3–55. [Sturova, I.V., Tkacheva, L.A., Behavior of a floating ice sheet under the influence of external loads (overview). *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika = Applied Mechanics and Technical Physics*, 2025, no. 3, pp. 3–55. (in Russian)] DOI: [10.15372/PMTF202415617](https://doi.org/10.15372/PMTF202415617)
12. Хейсин, Д.Е., *Динамика ледяного покрова*. Ленинград, Гидрометеиздат, 1967. [Heisin, D.E., *Dinamika ledyanogo pokrova = Dynamics of the ice cover*. Leningrad, Gidrometeizdat, 1967. (in Russian)]
13. Букатов, А.Е., *Волны в море с плавающим ледяным покровом*. Севастополь, ФГБУН МГИ, 2017. [Bukatov, A.E., *Volny v more s plavayushchim ledyanym pokrovom = Waves in the sea with a floating ice cover*. Sevastopol, FGBUN MGI, 2017. (in Russian)]
14. Федорюк, М.В., *Асимптотика. Интегралы и ряды*. Москва, Либликом, 2020. [Fedoryuk, M.V., *Asimptotika. Integraly i ryady = Asymptotics. Integrals and series*. Moscow, Librocom, 2020. (in Russian)]