



УДК 539.3

EDN: LSASNH DOI: 10.31429/vestnik-23-1-37-48

Моделирование неосесимметричных термоупругих полей для трансверсально-изотропных тел вращения

Д. А. Иванычев  , Д. И. Балыкин, Д. В. Ездакова

Липецкий государственный технический университет, ул. Интернациональная, 5, Липецк, 398600, Россия

✉ Иванычев Дмитрий Алексеевич; ORCID 0000-0002-7736-9311; SPIN 5839-4063; e-mail: Lsivdmal@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе представлен комплексный подход к анализу напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропных тел вращения, которые находятся под воздействием установившегося температурного поля, изменяющегося по гармоническому закону в цилиндрической системе координат. Методика, предложенная в работе, основывается на предположении о равновесном температурном поле, которое известно во всей области тела. Кроме того, внутри тела отсутствуют источники тепла, что позволяет избежать дополнительных сложностей, связанных с тепловыми потоками и эффектами теплообмена. Для решения данной задачи применяется метод граничных состояний, который позволяет эффективно моделировать деформации и напряжения внутри материала. В рамках этого метода рассматриваются перемещения внутренних точек тела, а также соответствующие им деформации и напряжения, а также температурные функции. Интегральные наложения помогают установить связь между пространственным напряженно-деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного тела и вспомогательными двумерными состояниями, которые зависят от двух координат. Такие вспомогательные состояния рассматриваются как общее решение плоской статической задачи термоупругости для трансверсально-изотропных материалов. На основе этих состояний с помощью переходных формул строится базис пространственных неосесимметричных состояний. Последний позволяет разложить искомое состояние в ряды Фурье, при этом коэффициенты этих рядов представляют собой квадратуры.

Ключевые слова: задача термоупругости, неосесимметричные задачи, трансверсально-изотропные материалы, тела вращения, метод граничных состояний.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.



Цитирование: Иванычев Д. А., Балыкин Д. И., Ездакова Д. В. Моделирование неосесимметричных термоупругих полей для трансверсально-изотропных тел вращения // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2026. Т. 23, № 1. С. 37–48. EDN: LSASNH. DOI: 10.31429/vestnik-23-1-37-48

Поступила 20 января 2026 г. После доработки 5 марта 2026 г. Принято 17 марта 2026 г. Публикация 23 марта 2026 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2026. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Modeling of Non-Axisymmetric Thermoelastic Fields for Transversely Isotropic Bodies of Revolution

D. A. Ivanychev  , D. I. Balykin, D. V. Yezdakova

Lipetsk State Technical University, Internationalnaya st., 5, Lipetsk, 398600, Russia

✉ Dmitry A. Ivanychev; ORCID 0000-0002-7736-9311; e-mail: Lsivdmal@mail.ru

Abstract. This paper presents a comprehensive approach to analyzing the stress-strain state of transversely isotropic solids of revolution subjected to a steady-state temperature field varying harmonically in a cylindrical coordinate system. The methodology proposed in this paper is based on the assumption of an equilibrium temperature field known throughout the entire body. Furthermore, there are no heat sources inside the body, eliminating additional complexities associated with heat fluxes and heat exchange effects. To solve this problem, the boundary state method is used, which enables efficient modeling of strains and stresses within the material. This method considers the displacements of internal points of the body, as well as the corresponding strains and stresses, as well as temperature functions. Integral superpositions help establish a relationship between the spatial stress-strain state of an elastic transversely isotropic solid and auxiliary two-dimensional states that depend on two coordinates. These auxiliary states are considered

as a general solution to the plane static thermoelasticity problem for transversely isotropic materials. Based on these states, a basis of spatial non-axisymmetric states is constructed using transition formulas. This allows the desired state to be expanded into Fourier series, with the coefficients of these series representing quadratures.

Keywords: thermoelasticity problem, non-axisymmetric problems, transversely isotropic materials, bodies of revolution, boundary state method.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Ivanychev, D. A., Balykin, D. I., Yezdakova, D. V., Modeling of non-axisymmetric thermoelastic fields for transversely isotropic bodies of revolution. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2026, vol. 23, no. 1, pp. 37–48. DOI: 10.31429/vestnik-23-1-37-48

Received 20 January 2026. Revised 5 March 2026. Accepted 17 March 2026. Published 23 March 2026.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2026. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\) license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Введение

Современное машиностроение с целью оптимизации формы деталей, возможности использования современных материалов, таких как композиты, полимерные материалы и др., предъявляет высокое требование к прочностным расчетам тел, изготовленных из этих материалов. Зачастую дополнительно эти тела пребывают в экстремальных температурных условиях, что вкупе со сложностью структуры (анизотропия упругих свойств) материала усложняет расчет их напряженно-деформированного состояния. Температурные поля в объектах машиностроения определяют характер распределения температурных напряжений и деформаций, которые при известных условиях могут вывести деталь из строя. Важность решения задачи о величине и характере распределения температурных напряжений в телах из усложненных по свойствам материалов очевидна.

Решению задач термоупругости для анизотропных тел, с той или иной симметрией упругих свойств посвящено множество работ. Например, в работе [1] исследуются задачи термомеханики для неоднородных анизотропных сред. Предлагаемый подход решения задачи предполагает разбиения на подзадачи структурного и параметрического синтеза, каждая из которых решается разными методами. В работе [2] рассмотрена плоская стационарная задача Дирихле, когда на границе тела заданы перемещения и температура. Задача сводится к системе интегральных уравнений, и если граница принадлежит классу Ляпунова, то система разрешима по Фредгольму. В работе [3] рассмотрена осесимметричная задача по определению напряжений в полой цилиндрической пуансоне при горячем деформировании заготовок. Построению матриц Грина трехмерной теории термоупругости посвящена работа [4]. Представлены интегральный и полиномиальный подходы формирования матриц Грина, как часть гранично-элементного моделирования, а также подход на основе двойных рядов Фурье. Ряд работ посвящен исследованию задач термоупругости для слоистых анизотропных материалов, например в работе [5] представлена неклассическая модель связанной задачи термоупругого деформирования слоистых анизотропных оболочек и пластин. В пространстве изображений по Лапласу строится пространственный функционал, который, с учетом допущений, удалось свести к двумерному и вывести из него корректные дифференциальные уравнения и связанные краевые условия. В работе [6] представлен метод отсчетных поверхностей для анализа стационарных задач термоупругости для слоистых анизотропных пластин, подвергающихся термической нагрузке. В работе [7] методом граничных элементов рассматривается трехмерная линейная математическая теория термоупругости. Выписаны граничные интегральные уравнения и гранично-элементная схема их решения. В работе [8] исследуется влияние скачкообразного изменения температуры на напряженное состояние многосвязной анизотропной бесконечной пластинки. Приближенные решения получены численными методами. В работе [9] рассмотрен термоупругий осесимметричный изгиб кольцевых пластин, изготовленных из разносопротивляющихся ортотропных материалов, обладающих к тому же цилиндрической анизотропией. Приведена система сложных неоднородных уравнений и результаты их исследования с помощью метода конечных разностей.

В работе [10] представлено решение задачи по определению осесимметричного термоупругого поля для трансверсально-изотропного тела вращения средствами метода граничных состояний. Решение строилось на основе плоской задачи теории термоупругости. Приведено решение для ступенчатого кругового цилиндра, находящегося в установившемся поле температур, осесимметричном относительно оси вращения. А в работе [11] осесимметричная задача термоупругости решена вкуче с задачей эластостатики и с задачей по определению упругого поля от действия массовых сил. Общее решение представляет собой суммы решений частных задач.

Целью настоящей работы является развитие аналитического метода определения напряженно-деформированного состояния, предложенной в работе [10], на класс неосесимметричных несвязанных задач термоупругости для анизотропных тел вращения.

1. Постановка задачи

Пусть в условном недеформированном и ненапряженном состоянии трансверсально-изотропное ограниченное тело вращения (рис. 1) имеет температуру T_1 как гармоническую функцию координат r, θ, z . В результате воздействия каких-либо факторов, температура тела изменилась и стала T_2 , тогда приращение температуры составит $T = \Delta T = T_2 - T_1$.

Изменение температуры способствует возникновению перемещений, деформаций и напряжений в теле (термоупругое состояние), которые и подлежат определению. Поверхность тела свободна от защемления и внешней нагрузки. Ось анизотропии трансверсально-изотропного тела совпадает с геометрической осью вращения z .

2. Соотношения теории упругости для анизотропной среды

В общем случае термоупругой деформации трансверсально-изотропного тела в цилиндрической системе координат r, θ, z имеют место следующие соотношения.

Дифференциальные уравнение равновесия при отсутствии объемных сил [12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{zr}}{r} &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Соотношения Коши [12]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{zr} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

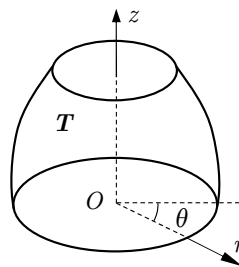


Рис. 1. Анизотропное тело

Fig. 1. Anisotropic body

Уравнения совместности деформаций [13]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_{\theta}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = 0; \\
 & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z} = 0; \\
 & -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r \varepsilon_{z\theta})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta \partial z} = 0; \\
 & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta \partial z} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial z} = 0; \\
 & \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta \partial z} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial \theta} \right) = 0; \\
 & \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial r \partial z} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Обобщенный закон Гука [12]:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_r \sigma_{\theta}) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z + \alpha_r T; \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} [\sigma_z - \nu_z (\sigma_r + \sigma_{\theta})] + \alpha_z T; \\
 \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{E_r} (\sigma_{\theta} - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z + \alpha_r T; \\
 \gamma_{zr} &= \frac{1}{G_z} \tau_{zr}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_z} \tau_{z\theta}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_r} \tau_{r\theta} = \frac{2(1 + \nu_r)}{E_r} \tau_{r\theta}.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Уравнение теплопроводности [12]:

$$\frac{k_r}{k_z} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0. \tag{2.5}$$

Здесь: u, v, w — компоненты вектора перемещения вдоль осей r, θ, z соответственно; $\varepsilon_r, \varepsilon_{\theta}, \varepsilon_z, \gamma_{r\theta}, \gamma_{zr}, \gamma_{z\theta}$ — компоненты тензора деформаций; $\sigma_r, \sigma_{\theta}, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{zr}, \tau_{z\theta}$ — компоненты тензора напряжений; E_z и E_r — модули упругости соответственно в направлении оси z и в плоскости изотропии; ν_z — коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие вдоль оси r при растяжении вдоль оси z ; ν_r — коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскости изотропии при растяжении в этой же плоскости; G_r и G_z — модули сдвига в плоскости изотропии и перпендикулярной к ней; k_z и k_r — коэффициенты теплопроводности в направлении оси симметрии и перпендикулярно к ней; α_z и α_r — коэффициентов температурного расширения в направлении осей z и r соответственно.

3. Метод решения

В работе [12] методом интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженно-деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного тела вращения и некоторыми вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которого зависят от двух координат z и y (переменных). Ось η перпендикулярна плоскости zy . В качестве плоских вспомогательных состояний используется плоская деформация $\mathbf{u}^{pl} = \{u_y^{pl}, u_{\eta}^{pl}, u_z^{pl}\}$, возникающая в бесконечных цилиндрах, имеющих в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости zy (направление η).

Переход к пространственному состоянию в цилиндрических координатах осуществляется по зависимостям

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta + \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta \right); \\ v_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta - \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta \right); \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_z^{pl} \cos(n\beta) d\beta, \quad y = r \cos(\beta); \\ u &= \sum_{n=a}^b [u_n \cos(n\theta) + u_n \sin(n\theta)]; \\ v &= \sum_{n=a}^b [-v_n \sin(n\theta) + v_n \cos(n\theta)]; \\ w &= \sum_{n=a}^b [w_n \cos(n\theta) + w_n \sin(n\theta)]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Деформации вычисляются через соотношения Коши (2.2), а напряжения через закон Гука (2.4).

Установившееся температурное поле $T^{pl}(z, y)$ плоского вспомогательного состояния с отсутствующими внутри источниками тепла удовлетворяет уравнению теплопроводности [12]:

$$\left(k_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_r \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T^{pl}(z, y) = 0,$$

где:

$$\begin{aligned} T^{pl} &= \frac{g_0}{E_z} \operatorname{Re}[\phi'_0(\zeta_0)], \quad \zeta_0 = z/\gamma_0 + iy, \quad \gamma_0 = \sqrt{k_z/z_r}, \\ g_0 &= \frac{(E_z - \nu_z^2 E_r)(\gamma_1^2 - \gamma_0^2)(\gamma_2^2 - \gamma_0^2)}{\gamma_0^2(\alpha_z E_z + \alpha_r \nu_z E_r) - \alpha_r E_z(1 + \nu_r)}. \end{aligned}$$

Перемещения и напряжения соответствующие температурному полю [12]:

$$\begin{aligned} u_z^{pl} &= \operatorname{Re}[p_0 \phi_0(\zeta_0)]; \quad u_y^{pl} = \operatorname{Re}[iq_0 \phi_0(\zeta_0)]; \quad u_\eta^{pl} = 0; \\ \sigma_z^{pl} &= -\operatorname{Re}[\gamma_0^2 \phi'_0(\zeta_0)]; \quad \sigma_y^{pl} = \operatorname{Re}[\phi'_0(\zeta_0)]; \\ \sigma_{zy}^{pl} &= -\operatorname{Re}[\gamma_0 \phi'_0(\zeta_0)]; \quad \sigma_\eta^{pl} = \operatorname{Re}[(1 - \varepsilon_0) \phi'_0(\zeta_0)], \end{aligned}$$

где p_0, q_0, ε_0 — постоянные зависящие от упругих констант и коэффициентов температурного расширения α_z и α_r , $\phi_0(\zeta_0)$ — некоторая аналитическая функция переменной ζ_0 .

Переход от плоских температурных состояний к пространственным осуществляется по зависимостям (3.1) и (3.2).

Определение упругого состояния анизотропного тела осуществляется средствами, схожими со средствами метода граничных состояний (МГС) [14]. В качестве базиса в пространстве внутренних состояний Ξ принимаются наборы:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}; \quad \xi_k = \left\{ u_i^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}, T_i^{(k)} \right\}.$$

Базис пространства Ξ можно сконструировать, придавая функции ϕ_0 в (3.1), (3.2) следующие значения:

$$\phi_0 = \zeta_0^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ортонормирование базиса пространства Ξ осуществляется по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [15], где в качестве перекрестных скалярных произведений принимаются (например, для 1-го и 2-го состояния):

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V T_1 T_2 dV.$$

После восстановления поля температур, удовлетворяющего уравнению теплопроводности (2.5), определяются вектор перемещения, тензоры деформаций и напряжений соответствующих температурному состоянию. Каждому базисному вектору T_k соответствуют вектор перемещения и тензоры деформаций и напряжений, в совокупности образующие внутреннее состояние от действия поля температур ξ_k .

Решение представляет собой ряд Фурье

$$\xi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k; \quad c_k = \int_V T_k T dV, \quad (3.3)$$

где T_k — температура в базисном элементе ξ_k , T — заданное поле температур.

В развернутом виде:

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^{(k)}; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^{(k)}; \quad T = \sum_{k=1}^{\infty} c_k T^{(k)}. \quad (3.4)$$

Коэффициенты c_k одинаковы во всех рядах (3.4).

4. Решение задач

Исследуется термоупругое равновесие кругового цилиндра из гипотетического трансверсально-изотропного материала, по свойствам схожего с горной породой — алевролит крупный темно-серый [16].

Далее проводится процедура обезразмеривания параметров задачи, подробное описание которой показано в работе [17].

Введем размерные масштабные коэффициенты: X_0 — характерное напряжение; L_0 — характерная длина; T_0 — характерная температура. Приведем основные характеристики к безразмерному виду

$$\sigma_{ij} = X_0 \tilde{\sigma}_{ij}; \quad u_i = L_0 \tilde{u}_i; \quad \varepsilon_{ij} = L_0 \tilde{\varepsilon}_{ij}; \quad T = T_0 \tilde{T}.$$

После этого соотношения теории упругости (2.1)–(2.5) можно переписать в безразмерной форме, учитывая, что дифференцирование ведётся по безразмерным координатам \tilde{r} , $\tilde{\theta}$, \tilde{z} . Опуская промежуточные выкладки, окончательно безразмерные параметры задачи составили:

– упругие характеристики материала составили: $E_z = 6,21$; $E_r = 5,68$; $G_r = 2,29$; $G_z = 2,55$; $\nu_z = 0,22$; $\nu_r = 0,24$;

– область цилиндра $V = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -2 \leq z \leq 2\}$

– коэффициенты теплопроводности по осям координат [18]: $k_z = 1,6$, $k_r = 6,5$

– коэффициенты температурного расширения [18]: $\alpha_z = 6,7$, $\alpha_r = 8,6$.

– заданная функция температуры $T = r^2 z^3 \cos 3\theta$.

Рекомендации по формированию базиса внутренних состояний описанные в работах [19, 20], действительны и для построения базиса в задаче термоупругости. В случае, когда заданное поле температуры зависит от $\cos(n\theta)$ или $\sin(n\theta)$, $n = 2, 3, \dots$, то в рядах (3.2) соответственно

Таблица 1. Ортонормированный базисный набор функций температуры

Table 1. Orthonormal basis set of temperature functions

N	T
ξ_1	$-0.798r^3 \cos 3\theta$
ξ_2	$-0.691r^3 z \cos 3\theta$
ξ_3	$(0.875r^3 + 0.02r^5 - 0.669r^3 z^2) \cos 3\theta$
ξ_4	$(1.534r^3 + 0.06r^5 - 0.659r^3 z^2) z \cos 3\theta$
ξ_5	$(-0.843r^3 - 0.066r^5 - 0.001r^7 + 2.146r^3 z^2 + 0.12r^5 z^2 - 0.654r^3 z^4) \cos 3\theta$
ξ_6	$(-2.269r^3 - 0.251r^5 - 0.007r^7 + 2.727r^3 z^2 + 0.2r^5 z^2 - 0.65r^3 z^4) z \cos 3\theta$

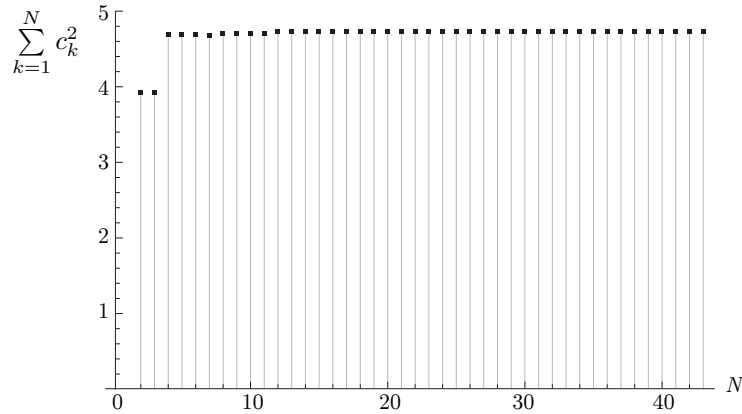


Рис. 2. Сумма Бесселя

Fig. 2. Bessel sum

$a = b = n$. Так как заданная температура зависит только от косинуса, то базис пространства внутренних состояний будем формировать из левых частей выражений (3.2):

$$u = u_n \cos(3\theta); \quad v = -v_n \sin(3\theta); \quad w = w_n \cos(3\theta). \quad (4.1)$$

После построения базиса внутренних состояний по соотношениям (3.1) и (4.1), его ортонормирования, исключения линейно зависимых элементов, а также элементов для которых $T = 0$, базисные функции температуры представлены в табл. 1 (показано 6 элементов).

Для решения задачи используем базис внутренних состояний из 43 элементов. Приведем значения некоторых нулевых коэффициентов Фурье (3.3): $c_2 = -1,984$; $c_4 = -0,87$; $c_6 = -0,019$; $c_8 = -0,048$; $c_{10} = -0,092$; $c_{12} = -0,116$.

Решение формируется рядами (3.4). Рис. 2 представляет собой график, иллюстрирующий «насыщение» суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя). Это является косвенным признаком сходимости решения.

Особенность решения задач, когда множитель при угловой координате в заданной функции температуры $n > 1$ заключается в том, что восстановленное поле температур отличается по амплитуде от заданного на некоторую константу — корректирующий коэффициент κ . Последний вычисляется через заданное T и восстановленное T_0 поле температур для фиксированных координат r, θ и z :

$$\kappa = \frac{T}{T_0} \Big|_{r,\theta,z}. \quad (4.2)$$

Затем все остальные характеристики полученного термоупругого поля умножаются на коэффициент κ , т.е. решение имеет вид $\xi = \kappa \xi_0$.

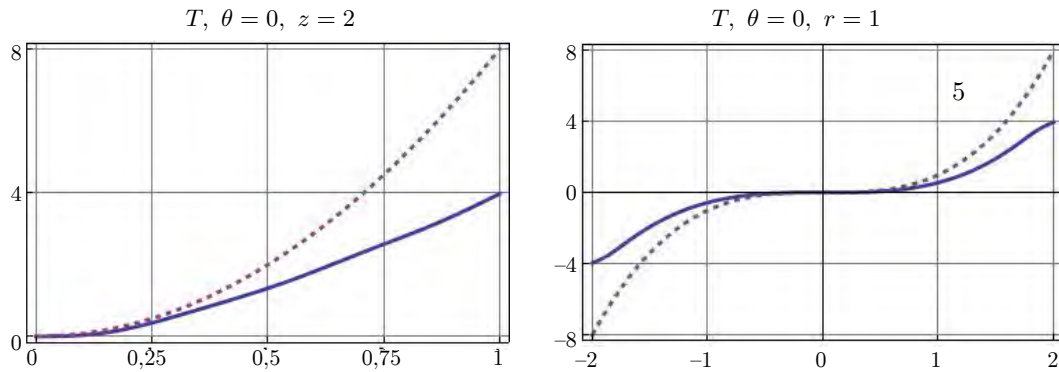


Рис. 3. Верификация температур без корректирующего коэффициента

Fig. 3. Temperature verification without correction factor

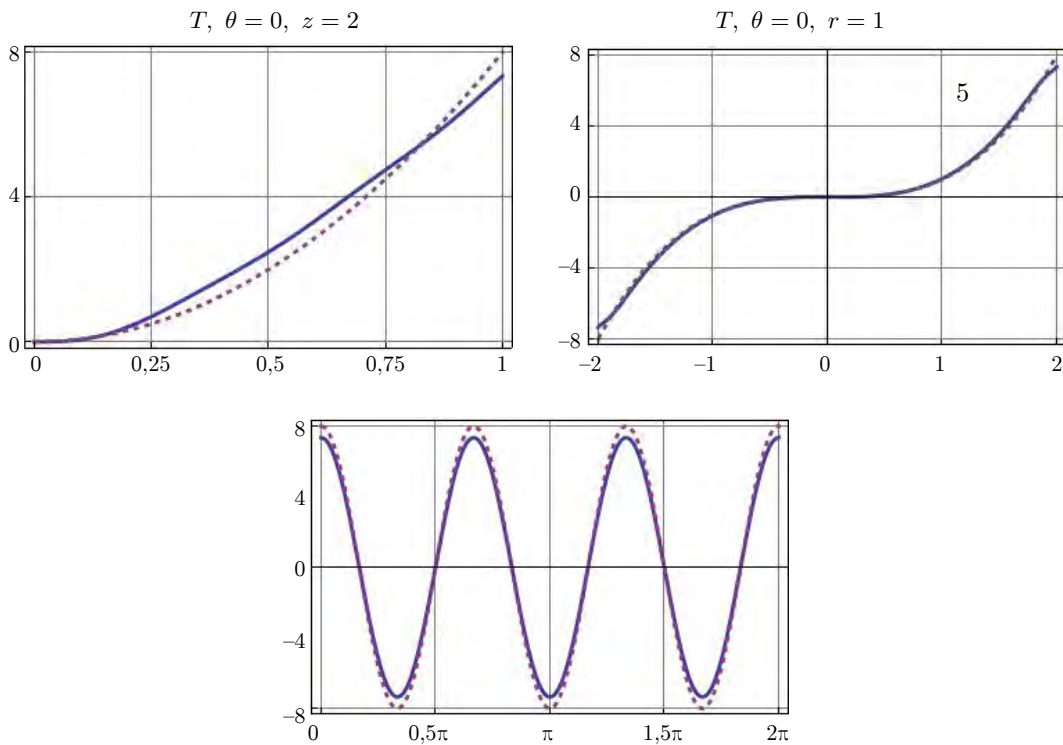


Рис. 4. Верификация температур с учетом корректирующего коэффициента

Fig. 4. Temperature verification taking into account the correction factor

На рис. 3 показано сопоставление заданного поля температур (штриховая линия) с полученным без корректирующего коэффициента (сплошная линия) на боковой поверхности цилиндра и на его торце.

В ходе анализа полученной функции температуры, выяснилось, что наименьшая погрешность задачи достигается, если использовать в формуле (4.2) координаты $r = 0,8236$, $\theta = 0$, $z = 2$ тогда коэффициент $\kappa = 1,85$. После умножения всех характеристик термоупругого поля на κ , получаем окончательное решение. Верификация полученной температуры с заданной с учетом коэффициента κ , представлена на рис. 4.

Погрешность задачи уменьшается при увеличении числа используемых элементов базиса. Графически сплошная линия на графиках рис. 4 по форме приближается к штриховой.

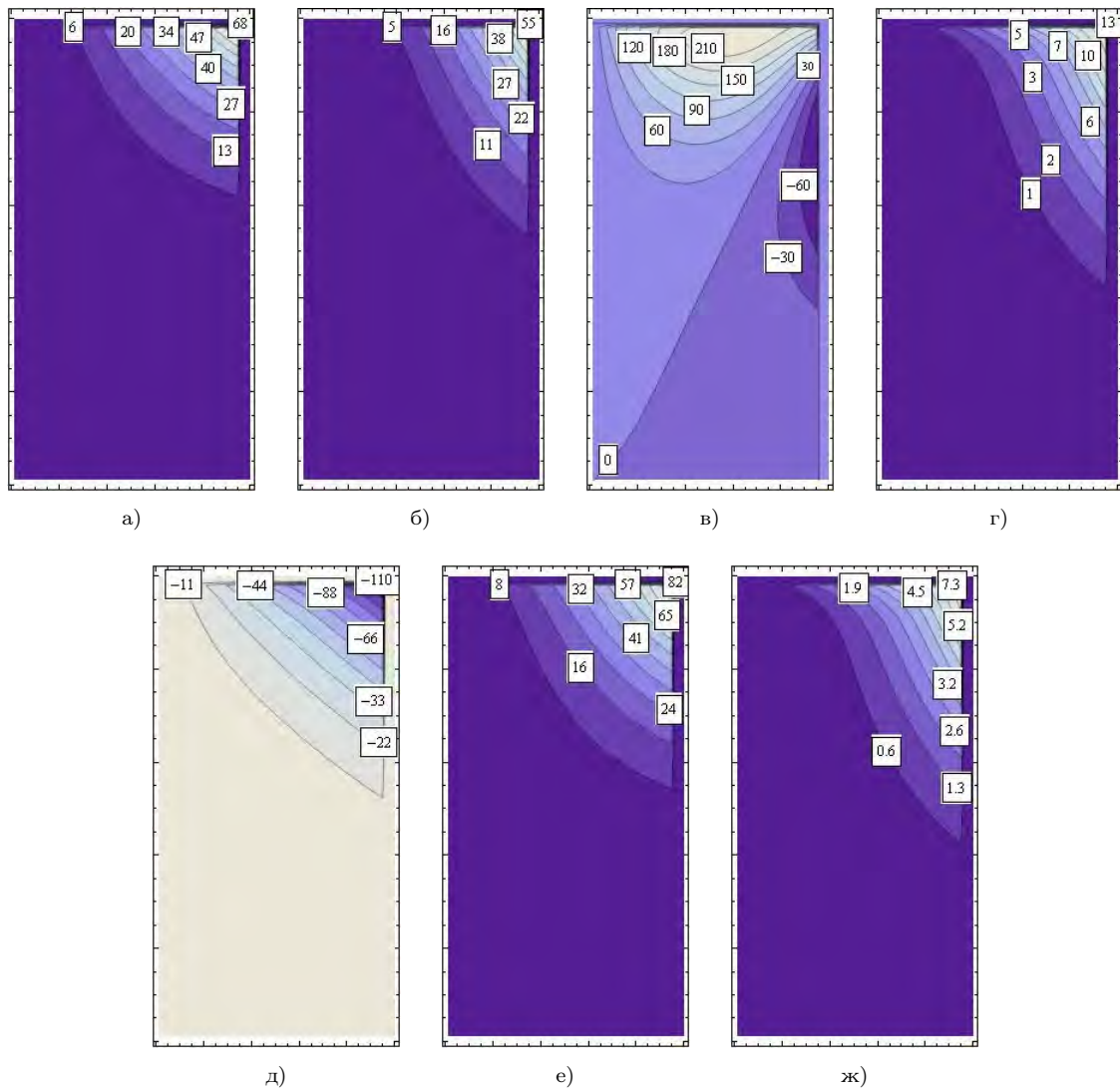


Рис. 5. Изолинии, а – перемещение u , $k = 1$; б – перемещение w , $k = 1$; в – напряжение σ_{rr} , $k = 1$; з – напряжение σ_{zz} , $k = 1$; д – напряжение $\sigma_{\theta\theta}$, $k = 10$; е – напряжение σ_{zr} , $k = 10$; ж – температура T , $k = 1$

Fig. 5. Isolines, a – displacement u , $k = 1$; б – displacement w , $k = 1$; в – stress σ_{rr} , $k = 1$; з – stress σ_{zz} , $k = 1$; д – stress $\sigma_{\theta\theta}$, $k = 10$; е – stress σ_{zr} , $k = 10$; ж – temperature T , $k = 1$

Изолинии компонент термоупругого поля имеют полиномиальный вид и представлены в виде изолиний (в явном виде необозримы) на рис. 5. В силу косо́й симметрии компонент термоупругого поля относительно плоскости $z = 0$, показано меридианное сечение с $\theta = 0$ и $0 \leq z \leq 2$. Значения на графике указаны в масштабе с масштабным коэффициентом k , т.е истинное значение показанной характеристики равно значению на графике, умноженному на k . С целью выявления наибольшей погрешности здесь и далее изолинии показаны в тех сечениях, в которых представленная характеристика упругого поля имеет максимальное по амплитуде значение.

Компоненты упругого состояния v , $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$ зависят от $\sin 3\theta$, поэтому их изолинии представим в сечении с $\theta = \pi/6$ (рис. 6). На рис. 6г представлен контур деформированного состояния тела.

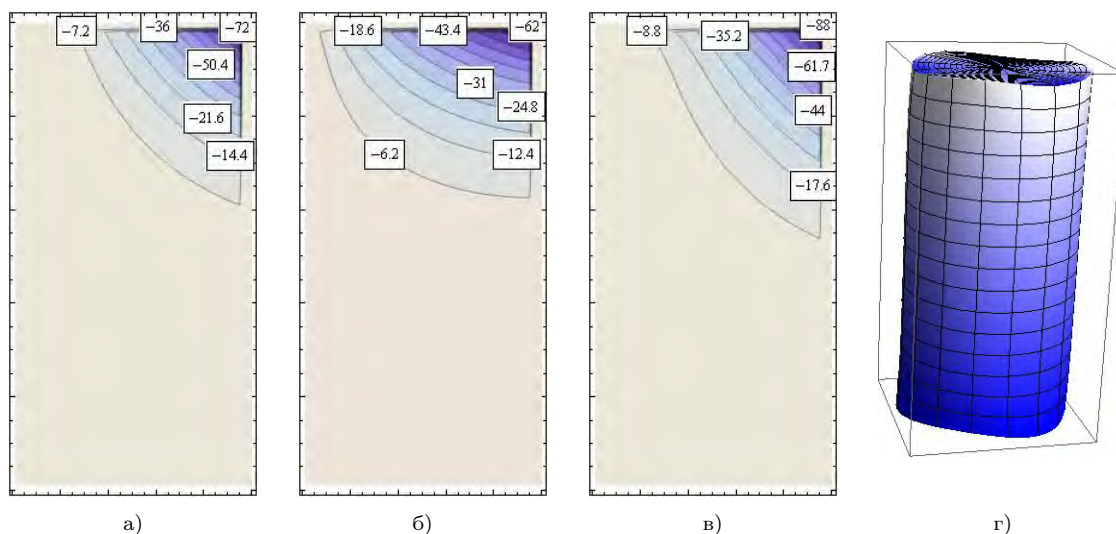


Рис. 6. Изолинии, а – перемещение u , $k = 1$; б – напряжение $\sigma_{r\theta}$, $k = 10$; в – напряжение $\sigma_{z\theta}$, $k = 10$; г – контур деформированного состояния

Fig. 6. Isolines, a – displacement u , $k = 1$; б – stress $\sigma_{r\theta}$, $k = 10$; в – stress $\sigma_{z\theta}$, $k = 10$; г – contour of the deformed state

Полученные компоненты термоупругого поля строго удовлетворяют соотношениям (2.1)–(2.5).

5. Выводы

В работе решение задачи теории термоупругости от действия установившегося поля температур строится следующим образом. На основе общего решения, дающего температурные деформации и напряжения двумерного состояния трансверсально-изотропного тела, строится конечное множество плоских вспомогательных состояний. Используя решение, представляющее собой, по сути, разложение пространственного состояния в тригонометрический ряд по плоским вспомогательным состояниям осуществляется переход к множеству пространственных неосесимметричных состояний. Это множество определяет пространство внутренних состояний в аппарате метода граничных состояний. Далее осуществляется ортонормирование этого базиса и исключения линейно зависимых элементов, а также элементов, для которых температура равна нулю. Окончательно, получаем базис, по которому искомые векторы и тензоры разлагаются в ряды с одинаковыми коэффициентами Фурье (3.3).

Разложение по левым или правым частям рядов (3.2) зависит от вида заданной функции температуры. В общем случае применяются полные выражения для рядов (3.2). Для решения задач требуется довольно большой «отрезок» базиса внутренних состояний.

Заключение

В работе сформулирован подход решения задачи по определению напряженно-деформированного состояния анизотропного тела, вызванного действием поля температур, заданных по циклическому закону. Компоненты термоупругого поля зависят от всех трех координат и носят неосесимметричный характер.

Предложенная методика, однако, не является общей для любого класса рассматриваемых областей (односвязных и многосвязных) и вида заданной функции, описывающей температурное поле внутри тела. Однако, если эту функцию возможно разложить на том или ином промежутке в тригонометрический ряд по косинусам или синусам, то, не исключая принцип независимости действия сил, данная методика вполне применима.

Решение является аналитическим и имеет полиномиальный вид, что позволяет легко проводить анализ полученных характеристик напряженно-деформированного состояния.

Литература [References]

1. Ломазов, В.А., Ломазова, В.И., Построение математической модели при решении задач термомеханики. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, 2011, № 4(4), с. 2276–2278. [Lomazov, V.A., Lomazova, V.I., Construction of a mathematical model for solving problems of thermomechanics. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo = Bulletin of the Lobachevsky University of Nizhny Novgorod*, 2011, no. 4(4), pp. 1582–1584. (in Russian)]
2. Богдан, Ю.А., Задача Дирихле в двумерной стационарной анизотропной теормоупругости. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*, 2010, № 5(21), с. 64–71. [Bogdan, Yu.A., Dirichlet problem in two-dimensional stationary anisotropic thermoelasticity. *Vestnik samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskkiye nauki = Bulletin of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences*, 2010, no. 5(21), pp. 64–71. (in Russian)]
3. Фатеев, В.И., Термоупругие напряжения в полой осесимметричном водоохлаждаемом пуансоне горячего деформирования. *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*, 2009, № 1-1, с. 98–104. [Fateyev, V.I., Thermoelastic stresses in a hollow axisymmetric water-cooled punch of hot deformation. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskkiye nauki = Bulletin of Tula State University. Technical Sciences*, 2009, no. 1-1, pp. 98–104. (in Russian)]
4. Пазин, В.П., Сравнительный анализ подходов к построению матрицы Грина трехмерной теории термоупругости. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, 2014, № 4(1), с. 250–253. [Pazin, V.P., Comparative analysis of approaches to constructing the Green's matrix of the three-dimensional theory of thermoelasticity. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo = Bulletin of the Lobachevsky University of Nizhny Novgorod*, 2014, no. 4(1), pp. 250–253. (in Russian)]
5. Андреев, А.Н., Математическая модель термоупругого деформирования слоистых композитных оболочек и пластин. *Известия Алтайского государственного университета*, 2014, вып. 1, № 1(81), с. 19–21. [Andreyev, A.N., Mathematical model of thermoelastic deformation of layered composite shells and plates. *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Altai State University*, 2014, iss. 1, no. 1(81), pp. 19–21. (in Russian)]
6. Kulikov, G.M., Mamontov, A.A., Three-dimensional thermoelastic analysis of laminated anisotropic plates. *Вестник Тамбовского государственного технического университета*, 2013, т. 19, № 4, с. 853–863. [Kulikov, G.M., Mamontov, A.A., Three-dimensional thermoelastic analysis of laminated anisotropic plates. *Vestnik Tambovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Bulletin of Tambov State Technical University*, 2013, vol. 19, no. 4, pp. 853–863. (in Russian)]
7. Ратаушко, Я.Ю., Анализ термоупругой динамики трехмерных тел методом граничных элементов. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, 2011, № 4(4), с. 1736–1737. [Rataushko, Ya.Yu., Analysis of thermoelastic dynamics of three-dimensional bodies using the boundary element method. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo = Bulletin of the Lobachevsky University of Nizhny Novgorod*, 2011, no. 4(4), pp. 1736–1737. (in Russian)]
8. Глушанков, Е.С., Приближенное решение задачи термоупругости для многосвязной анизотропной пластинки при скачках температуры на контурах. *Журнал теоретической и прикладной механики*, 2022, № 3(80), с. 3–13. [Glushankov, Ye.S., Approximate solution of the thermoelasticity problem for a multiply connected anisotropic plate with temperature jumps on the contours. *Zhurnal teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki = Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, no. 3(80), pp. 3–13. (in Russian)] DOI: [10.24412/0136-4545-2022-3-5-13](https://doi.org/10.24412/0136-4545-2022-3-5-13)
9. Самсоненко, Г.И., Трещёв, А.А., Термоупругий изгиб кольцевых пластин средней толщины из ортотропных разносопротивляющихся материалов. *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*, 2012, вып. 1, с. 238–244. [Samsonenko, G.I., Treshchov, A.A., Thermoelastic bending of medium-thick annular plates made of orthotropic materials of different resistance. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskkiye nauki. Tekhnicheskkiye nauki = Bulletin of Tula State University. Technical Sciences*, 2012, iss. 1, pp. 238–244. (in Russian)]
10. Иванычев, Д.А., Решение задач термоупругости для анизотропных тел вращения. *Труды МАИ*, 2019, № 106, с. 1–19. [Ivanychev, D.A., Solution of thermoelasticity problems for anisotropic bodies of rotation. *Trudy MAI = Proc. of MAI*, 2019, no. 106, pp. 1–19. (in Russian)]
11. Ivanychev, D.A., Levina, E.Yu. Solution of thermo elasticity problems for solids of revolution with

- transversal isotropic feature and a body force. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1348, art. 012058. DOI: [10.1088/17426596/1348/1/012058](https://doi.org/10.1088/17426596/1348/1/012058)
12. Александров, А.Я., Соловьев, Ю.И., *Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного)*. Москва, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1978. [Aleksandrov, A.Ya., Solov'ev, Yu.I., *Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti (primeneniye metodov teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo) = Spatial problems of the theory of elasticity (application of methods of the theory of functions of a complex variable)*, Moscow, Nauka Publ, Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury, 1978. (in Russian)]
 13. Лурье, А.И., *Пространственные задачи теории упругости*. Москва, Госиздат технико-теоретической литературы, 1955. [Lur'ye, A.I., *Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti = Spatial problems of the theory of elasticity*. Moscow, Gosizdat tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1955. (in Russian)]
 14. Пеньков, В.Б., Пеньков, В.В., Метод граничных состояний для решения задач линейной механики. *Дальневосточный математический журнал*, 2001, т. 2, № 2, с. 115–137. [Penkov, V.B., Penkov, V.V., The boundary state method for solving linear mechanics problems. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal = Far Eastern Mathematical Journal*, 2001, vol. 2, no. 2, pp. 115–137. (in Russian)]
 15. Саталкина, Л.В., Нарращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоёмкости вычислений. *Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета*. Липецк, ЛГТУ. 2007, с. 130–131. [Satalkina, L.V., Building up the basis of the state space with hard constraints on the energy intensity of computations. *Sbornik tezisov dokladov nauchnoy konferencii studentov i aspirant Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Collection of Abstracts from the Scientific Conference of Students and Postgraduates of Lipetsk State Technical University*. Lipeck, LGTU, 2007, pp. 130–131. (in Russian)]
 16. Лехницкий, С.Г., *Теория упругости анизотропного тела*. Москва, Наука, 1977. [Lexniczkij, S.G., *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela = Theory of Elasticity of Anisotropic Body*, Moscow, Nauka, 1977 (in Russian)]
 17. Левина, Л.В., Новикова, О.С., Пеньков, В.Б., Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела. *Вестник ЛГТУ*, 2016, № 2(28), с. 16–24. [Levina, L.V., Novikova, O.S., Penkov, V.B., Full-parameter solution of the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body. *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Bulletin of Lipetsk State Technical University*, 2016, no. 2(28), pp. 16–24 (in Russian)]
 18. Юдин, В.А., Королёв, А.В., Афанаскин, И.В., Вольпин, С.Г., *Теплоёмкость и теплопроводность пород и флюидов базеновской свиты — исходные данные для численного моделирования тепловых способов разработки*. Москва, ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, 2015. [Yudin, V.A., Korolov, A.V., Afanaskin, I.V., Vol'pin, S.G., *Teploemkost' i teploprovodnost' porod i flyuidov bazhenovskoy svity — iskhodnye dannye dlya chislennogo modelirovaniya teplovykh sposobov razrabotki = Heat Capacity and Thermal Conductivity of Rocks and Fluids of the Bazhenov Formation – Initial Data for Numerical Modeling of Thermal Development Methods*. Moscow, FGU FNTS NIISI RAN, 2015 (in Russian)]
 19. Иванычев, Д.А., Решение неосесимметричной задачи эластостатики для трансверсально-изотропного тела вращения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 2(101), с. 4–21. [Ivanychev, D.A., Solution of a non-axisymmetric elastostatics problem for a transversely isotropic body of rotation. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Seriya "Estestvennyye nauki" = Bauman Moscow State Technical University Bulletin. Natural Sciences Series*, 2022, no. 2(101), pp. 4–21. (in Russian)] DOI: [10.18698/1812-3368-2022-2-4-21](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-2-4-21)
 20. Иванычев, Д.А., Левина, Е.Ю., Определение неосесимметричных упругих полей в анизотропных телах вращения, вызванных действием объемных сил. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 4(103), с. 22–38. [Ivanychev, D.A., Levina, E.Yu., Describing non-axisymmetric elastic fields generated by volume forces in anisotropic solids of revolution. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Seriya "Estestvennyye nauki" = Bauman Moscow State Technical University Bulletin. Natural Sciences Series*, 2022, no. 4(103), pp. 22–38 (in Russian)] DOI: [10.18698/1812-3368-2022-4-22-38](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-4-22-38)