

УДК 51.37

EDN: OIUOBV DOI: 10.31429/vestnik-23-1-56-62

Вариационные методы идентификации мощности мгновенного точечного источника на поверхности моря

В. С. Кочергин  , С. В. Кочергин  

Морской гидрофизический институт РАН, ул. Капитанская 2, Севастополь, 299011, Россия

✉ Кочергин Владимир Сергеевич; ORCID 0000-0002-6767-1218; SPIN 9479-0245; e-mail: vskocher@gmail.com

Аннотация. В работе на примере модели переноса пассивной примеси рассматриваются вариационные алгоритмы идентификации мощности мгновенного источника загрязнений на поверхности моря. Решение такой задачи возможно несколькими вариационными подходами. Один из них — это алгоритм, основанный на вариационных принципах и решении сопряженных задач, а в случае точечного мгновенного источника возможно применение упрощенного алгоритма, основанного на методе линеаризации. Отметим, что свойства применяемых при этом алгоритмов могут в значительной степени быть улучшены за счет выбора оптимальной схемы измерений, т.е. оптимальных планов. С математической точки зрения под оптимальным планом понимается набор точек измерений, распределенных по пространству и времени, дающий лучшую обусловленность решаемой задачи. Информационная матрица Якоби строится с использованием решений серии сопряженных задач. Известно, что измерения поля концентрации, которые производятся в точках максимальных значений, приводит к повышению обусловленности решаемой задачи и более быстрой сходимости итерационного процесса. Алгоритм построения информационной матрицы Фишера представлен для случая трехмерной модели переноса пассивной примеси в Азовском море. Рассматривается действие мгновенного точечного источника загрязнения. Результаты могут быть использованы для решения различных задач экологической направленности при изучении воздействия источников загрязнения антропогенного характера в акваториях Азовского и Черного морей.

Ключевые слова: планирование эксперимента, модель переноса, пассивная примесь, идентификация, сопряженная задача, минимизация, Азовское море.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № FNNN-2024-0016 «Исследование пространственно-временной изменчивости океанологических процессов в береговой, прибрежной и шельфовых зонах Черного моря под воздействием природных и антропогенных факторов на основе контактных измерений и математического моделирования» (шифр «Прибрежные исследования»).

Цитирование: Кочергин В. С., Кочергин С. В. Вариационные методы идентификации мощности мгновенного точечного источника на поверхности моря // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2026. Т. 23, № 1. С. 56–62. EDN: OIUOBV. DOI: 10.31429/vestnik-23-1-56-62

Поступила 26 января 2026 г. После доработки 5 марта 2026 г. Принято 17 марта 2026 г. Публикация 23 марта 2026 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2026. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Variational Methods for Identifying the Power of an Instantaneous Point Source on the Sea Surface

V. S. Kochergin  , S. V. Kochergin 

Marine Hydrophysical Institute, Kapitanskaya str., 2, Sevastopol, 299011, Russia

✉ Vladimir S. Kochergin; ORCID 0000-0002-6767-1218; e-mail: vskocher@gmail.com

Abstract. Using the example of a passive impurity transfer model, variation algorithms for identifying the power of an instantaneous source of pollution on the sea surface are considered. The solution to this problem is possible with several variation approaches. One of them is an algorithm based on variation principles and solving related problems, and in the case of a point instantaneous source, a simplified algorithm based on the linearization method can be used. It should be noted that the properties of the algorithms used in this case can be significantly improved by choosing the optimal measurement scheme, i.e. optimal plans. From a mathematical point of view, an optimal plan is understood as a set of measurement points distributed over

space and time, which gives the best conditionality of the problem being solved. The Jacobi information matrix is constructed using solutions to a series of related problems. It is known that measurements of the concentration field, which are performed at the points of maximum values, lead to increased conditionality of the problem being solved and faster convergence of the iterative process. The algorithm for constructing the Fischer information matrix is presented for the case of a three-dimensional model of passive impurity transport in the Sea of Azov. The effect of an instantaneous and permanent point source of pollution is considered. The results can be used to solve various environmental problems in studying the effects of anthropogenic pollution sources in the waters of the Azov and Black Seas.

Keywords: experimental design, transport model, passive admixture, identification, adjoint problem, minimization, Sea of Azov.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment on topic No. FNNN-2024-0016 “Study of the spatio-temporal variability of oceanographic processes in the coastal, coastal and shelf zones of the Black Sea under the influence of natural and anthropogenic factors based on contact measurements and mathematical modeling” (code “Coastal research”).

Cite as: Kochergin, V. S., Kochergin, S. V., Variational methods for identifying the power of an instantaneous point source on the sea surface. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2026, vol. 23, no. 1, pp. 56–62. DOI: 10.31429/vestnik-23-1-56-62

Received 26 January 2026. Revised 5 March 2026. Accepted 17 March 2026. Published 23 March 2026.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2026. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Решение задачи по идентификации мощности мгновенного источника загрязнения в модели переноса пассивной примеси по данным измерений возможно несколькими вариационными подходами. Один из них — это алгоритм, основанный на вариационных принципах и решении сопряженных задач, а в данном случае возможно применение другого упрощенного алгоритма, основанного на методе линеаризации. Отметим, что свойства применяемых при этом алгоритмов могут в значительной степени быть улучшены за счет выбора оптимальной схемы измерений, т.е. оптимальных планов. С математической точки зрения под оптимальным планом понимается набор точек измерений, распределенных по пространству и времени, дающий лучшую обусловленность решаемой задачи. Такой подход, к решению задачи идентификации мощности мгновенного точечного источника загрязнения, является новым и позволяет улучшить сходимость итерационного процесса. Для выбора координат точек измерений строится матрица Фишера с учетом решения серии сопряженных задач и метода оценки. В отличие от работы [1] аналитические выражения для элементов матрицы получены для случая мгновенного точечного источника, что позволяет оценить детерминанты соответствующих матриц и выбрать оптимальный план.

1. Модель переноса

Рассмотрим модель [2] переноса–диффузии пассивной примеси в σ -координатах

$$\frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial x} DA_H \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} DA_H \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial \sigma} \frac{\partial C}{\partial \sigma}, \quad (1.1)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \partial M : \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} &= 0, \\ \sigma = 0 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= Q = Q^S \delta(t - 0) \delta(x - \bar{x}) \delta(y - \bar{y}), \\ \sigma = -1 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

и начальными данными

$$C(x, y, \sigma, 0) = C_0(x, y, \sigma), \quad (1.3)$$

где $t \in [0, T]$ — время; D — динамическая глубина; x, y — горизонтальные координаты; σ — безразмерная вертикальная координата, изменяющаяся в пределах от -1 (на дне) до 0 (на поверхности моря); U, V, W — компоненты поля скорости; C — концентрация примеси; A_H и K — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии; \mathbf{n} — нормаль к боковой границе ∂M области интегрирования модели M ; $M_t = M \times [0, T]$; $C_0(x, y, \sigma)$ — некоторое начальное значение концентрации. В данном случае для определенности источник задан на поверхности моря с координатами (\bar{x}, \bar{y}) . Аналогично можно получить алгоритм и для варианта задания источника на дне моря.

2. Вариационный алгоритм ассимиляции данных измерений

Рассмотрим вариационный алгоритм [3–8] ассимиляции, при котором усвоение происходит за счет минимизации следующего выпуклого квадратичного функционала качества прогноза

$$I_0 = \frac{1}{2} (P(RC - C^{\text{изм}}), P(RC - C^{\text{изм}}))_{M_t}, \quad (2.1)$$

где P — оператор восполнения нулями поля невязок прогноза при отсутствии данных измерений, R — оператор проектирования в точки наблюдений. Функционал (2.1) при линейных ограничениях (1.1)–(1.3) запишем следующим образом:

$$I = I_0 + \left[\frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} DA_H \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} DA_H \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} K \frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^* \right]_{M_t} + \\ + \left(\frac{\partial C}{\partial n}, C^* \right)_{\partial M_t} + (C - C_0, C^*)_M + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^* \right)_{\sigma_t^{-1}} + \\ + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma} - Q^S \delta(t - T) \delta(x - \bar{x}) \delta(y - \bar{y}), C^* \right)_{\sigma_t^{01}}, \quad (2.2)$$

где скалярное произведение определяется стандартным способом в L_2 . Проинтегрируем соответствующее (2.2) выражение для вариации функционала по частям с учетом аналога уравнения неразрывности и краевых условий. В (2.2) $\sigma_t^0 = \sigma^0 \times [0, T]$, $\sigma_t^{-1} = \sigma^{-1} \times [0, T]$, σ^0 — поверхность моря, а σ^{-1} — дно.

Аналог уравнения неразрывности в σ -координатах имеет вид

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \sigma} = 0. \quad (2.3)$$

Выберем в качестве множителей Лагранжа решение следующей сопряженной задачи:

$$-\frac{\partial DC^*}{\partial t} - \frac{\partial DUC^*}{\partial x} - \frac{\partial DVC^*}{\partial y} - \frac{\partial WC^*}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} DA_H \frac{\partial C^*}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} DA_H \frac{\partial C^*}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} K \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \\ \Gamma : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \quad \sigma = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \quad \sigma = -1 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \\ t = T : C^* = P(C^{\text{изм}} - RC). \quad (2.4)$$

При определении мощности мгновенного точечного источника имеем

$$\nabla_{Q^S} I = C^*(0, x_i, y_i, 0). \quad (2.5)$$

Значение мощности источника определяется

$$Q_{n+1}^S = Q_n^S + \tau \nabla_{Q^S} I, \quad (2.6)$$

где τ — итерационный параметр, который находится с учетом решения задачи в вариациях. Следует отметить, что подробный обзор вариационных методов ассимиляции представлен в работе [7]. Проведенные тестовые расчеты [8] показали хорошую сходимость итерационного

процесса и достаточную точность идентификации мощности источников при использовании полной информации о поле концентрации. При задании небольшого количества точек измерений результат в полной мере зависит от их местоположения и тогда задача планирования эксперимента встает естественным образом.

Отметим фильтрационные свойства вариационного алгоритма, которые в полной мере проявляются при зашумлении данных измерений. Фильтрация происходит за счет решения сопряженных задач в процессе итераций.

3. Метод линеаризации

В случае, когда параметр, подлежащий идентификации, константа – процедура его идентификации существенно упрощается. Задаче (1.1)–(1.3) в случае идентификации Q^S поставим в соответствие следующую задачу в вариациях

$$\frac{\partial D \frac{\delta C}{\delta Q^S}}{\partial t} + \frac{\partial DU \frac{\delta C}{\delta Q^S}}{\partial x} + \frac{\partial DV \frac{\delta C}{\delta Q^S}}{\partial y} + \frac{\partial W \frac{\delta C}{\delta Q^S}}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial x} DA_H \frac{\partial \frac{\delta C}{\delta Q^S}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} DA_H \frac{\partial \frac{\delta C}{\delta Q^S}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} K \frac{\partial \frac{\delta C}{\delta Q^S}}{\partial \sigma} \quad (3.1)$$

с условиями на боковых границах

$$\Gamma : \frac{\partial \frac{\delta C}{\delta Q^S}}{\partial n} = 0, \quad (3.2)$$

краевыми условиями на поверхности и на дне

$$\begin{aligned} \sigma = 0 : \frac{\partial \frac{\delta C}{\delta Q^S}}{\partial \sigma} &= \delta(t - 0) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \\ \sigma = -1 : \frac{\partial \frac{\delta C}{\delta Q^S}}{\partial \sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

и начальными данными

$$\frac{\delta C}{\delta Q^S}(0, x, y, \sigma) = 0. \quad (3.4)$$

Будем считать, что

$$C = \tilde{C} + \frac{\delta C}{\delta Q^S} (Q^S - Q_{\text{ист}}), \quad (3.5)$$

где \tilde{C} – некоторая первоначальная оценка концентрации.

Тогда функционал (2.2) можно записать в виде

$$I_0 = \frac{1}{2} \left[P \left(R(\tilde{C} + \frac{\delta C}{\delta Q^S} (Q^S - Q_{\text{ист}})) - C_{t_m}^{\text{изм}} \right), P \left(R(\tilde{C} + \frac{\delta C}{\delta Q^S} (Q^S - Q_{\text{ист}})) - C_{t_m}^{\text{изм}} \right) \right]_{M_t}. \quad (3.6)$$

Откуда из условия стационарности можно получить формулу для оценки искомого параметра в следующем виде:

$$Q_{\text{ист}} = Q^S + \frac{\left(P \left(R\tilde{C} - C_{t_m}^{\text{изм}} \right), PR \frac{\delta C}{\delta Q^S} \right)_{M_t}}{\left(PR \frac{\delta C}{\delta Q^S}, PR \frac{\delta C}{\delta Q^S} \right)_{M_t}}. \quad (3.7)$$

Аналогично решается задача при определении других неизвестных параметров модели по данным измерений. Например, в работе [9] такой подход применен для идентификации мощности заглубленного источника загрязнения.

4. Метод оценки. Алгоритм фильтрации

Умножая (1.2)–(2.1) на C^* и интегрируя по частям с учетом краевых условий и аналога уравнения неразрывности в σ -координатах, выберем C^* как решение следующей сопряженной задачи:

$$-\frac{\partial DC^*}{\partial t} - \frac{\partial DUC^*}{\partial x} - \frac{\partial DVC^*}{\partial y} - \frac{\partial WC^*}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} DA_H \frac{\partial C^*}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} DA_H \frac{\partial C^*}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} K \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \quad (4.1)$$

$$\partial \Gamma : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \quad \sigma = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = g, \quad \sigma = -1 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \quad (4.2)$$

$$t = T : C^* = 0. \quad (4.3)$$

В итоге [10, 11] из интегрального тождества получаем:

$$\int_{S_t} Q^S C^* dS_t = \int_{S_t} C g dS_t, \quad (4.4)$$

где S — поверхность моря, $g = \delta(t - T) \delta(x - x_n) \delta(y - y_n)$, $n = 1, \dots, N$, N — общее количество точек измерений в конечный момент времени. Учитывая представления Q и g , из формулы (3.6) имеем

$$Q^S C_n^*(0, \bar{x}, \bar{y}, 0) = C(T, x_n, y_n, 0), \quad n = 1, \dots, N. \quad (4.5)$$

Таким образом, с учетом информации о концентрации в N точках для конечного момента времени строится система линейных N уравнений. В случае переопределенной системы, т.е., когда число уравнений больше числа источников, применяется один из известных методов вариационной фильтрации, например, значения Q^S определяются из системы (4.5) на основе метода [12], который успешно применяется при решении аналогичных задач. Для переопределенной системы (4.5) в случае наличия ошибок измерений необходима фильтрация данных с учетом всей информации имеющейся в N уравнениях. Начальная система уравнений при помощи ортогонального преобразования плоских вращений трансформируется к некоторой эквивалентной системе. Углы поворота находятся из максимума функционала, характеризующего соотношение коэффициентов системы, априори заданной информации о решении и правых частях. Алгоритм осуществляется итерационно. Коэффициенты такого преобразования ищутся исходя из максимума квадратичного функционала специального вида.

В итоге получается другая система алгебраических уравнений эквивалентная (4.3) с учетом всей доступной информации. В результате работы такой процедуры уравнения новой системы сортируются по рангу. В итоге в верхних строках системы оказываются уравнения с наилучшей информативностью.

5. Построение матрицы Якоби

При решении задач планирования [13, 14] измерений важную роль играет изучение свойств информационной матрицы Фишера, которая вычисляется с использованием матрицы Якоби и значений реализуемого плана. Пусть $C_{\text{изм}}$ имеются в N точках. Матрица Якоби, характеризующая вариацию решения в зависимости от вариаций параметров, преобразуется в данном случае в вектор

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\partial C_1}{\partial Q^S} \quad \frac{\partial C_2}{\partial Q^S} \quad \dots \quad \frac{\partial C_N}{\partial Q^S} \right). \quad (5.1)$$

Учитывая представление метода оценки (4.5) для мгновенного точечного источника, имеем

$$\mathbf{F} = (C_1^*(0, \bar{x}, \bar{y}, -1) \quad C_2^*(0, \bar{x}, \bar{y}, -1) \quad \dots \quad C_N^*(0, \bar{x}, \bar{y}, -1)), \quad (5.2)$$

где C_n^* — решение сопряженной задачи для n -го измерения в соответствующей точке пространства с координатами источника загрязнения.

При выводе (5.2) учтено соотношение метода оценки (4.5) для мгновенного точечного источника.

6. Результаты численных экспериментов

Численные эксперименты реализованы с использованием модели [2]. Для акватории Азовского моря был проведен расчеты на установление модельных полей скорости течений с постоянным восточным ветром 10 м/с. Найденные в результате расчетов поля скоростей и коэффициентов турбулентной диффузии задавались в качестве входных данных для модели

переноса пассивной примеси при ее интегрировании на срок 5 суток модельного времени. По вертикали в модели используется расчетная сетка в σ -координатах с 15-ю горизонтами. Шаг по времени $\Delta t = 240$ с, шаг по пространству $\Delta x = 0,78$ км, $\Delta y = 1,125$ км.

С учетом проведенных расчетов циркуляции вод в Азовском море при восточном ветровом воздействии, реализованы численные эксперименты по переносу загрязнений от точечного мгновенного источника единичной мощности в районе выхода из акватории порта Темрюк. Местоположение мгновенного точечного источника на рис. 1 обозначены черным треугольником, а белыми и черными точками координаты измерений для первого и второго плана.

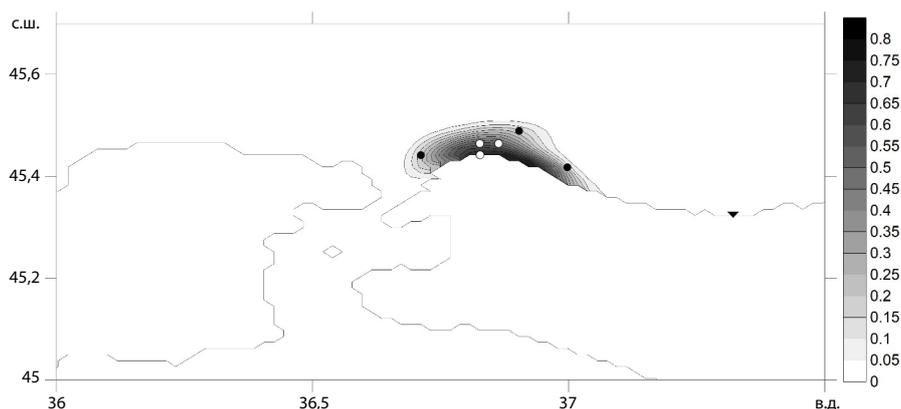


Рис. 1. Мгновенный источник, модельное поле (восточный ветер), точки измерений

Fig. 1. Instantaneous source, model field (east wind), measurement points

В первом плане точки измерений расположены в области максимальных значений концентрации. Второй план характеризуется измерениями на периферии пятна загрязнения.

Таким образом, имея решения сопряженных задач (4.1)–(4.3) мы можем сразу оценивать все члены матрицы Якоби, а значит и Фишера. Далее по детерминанту соответствующей матрицы выбирается оптимальный план. Например, значения детерминанта первого плана получились на порядок больше чем для второго. Решая систему (4.5) оцениваем значения входных параметров. В случае переопределенной системы появляется возможность фильтрации ошибок измерений за счет всей информации системы (4.5).

Результаты могут быть использованы для решения различных задач экологической направленности при изучении воздействия источников загрязнения антропогенного характера в акваториях Азовского и Черного морей.

Литература [References]

1. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Использование решения сопряженных задач при идентификации входных параметров модели переноса и планировании эксперимента. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2017, № 2, с. 42–47. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Using adjoint problem solving in identifying input parameters of a transport model and planning an experiment. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2017, no. 2, pp. 42–47. (in Russian)] EDN: ZHXFNL
2. Иванов, В.А., Фомин, В.В., *Математическое моделирование динамических процессов в зоне море – суша*. Севастополь, ЭКОСИ-гидрофизика, 2008. [Ivanov, V.A., Fomin, V.V., *Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskikh protsessov v zone more – susha = Mathematical modeling of dynamic processes in the sea-land zone*. Sevastopol, ECOSI-hydrophysics, 2008. (in Russian)]
3. Пененко, В.В., Оценка параметров дискретных моделей динамики атмосферы и океана. *Метеорология и гидрология*, 1979, № 7, с. 77–90. [Penenko, V.V., Estimation of parameters of discrete models of atmospheric and ocean dynamics. *Meteorologiya i gidrologiya = Meteorology and Hydrology*, 1979, no. 7, pp. 77–90. (in Russian)]

4. Марчук, Г.И., *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды*. Москва, Наука, 1982. [Marchuk, G.I., *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayushchey sredy = Mathematical Modeling in Environmental Problems*. Moscow, Nauka, 1982. (in Russian)]
5. Marchuk, G.I., Agoskov, V.I., Shutyaev, V.P., *Adjoint Equations and Perturbation Algorithms in Nonlinear Problems*. New York, CRC Press, 1996.
6. Shutyaev, V.P., Le Dimet, F.-X., Parmuzin, E., Sensitivity analysis with respect to observations in variational data assimilation for parameter estimation. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2018, vol. 25, iss. 2. pp. 429–439. DOI: [10.5194/npg-25-429-2018](https://doi.org/10.5194/npg-25-429-2018)
7. Shutyaev, V.P., Methods for observation data assimilation in problems of physics of atmosphere and ocean. *Izvestiya Atmospheric and Oceanic Physics*, 2019, vol. 55, pp. 17–31. DOI: [10.1134/S0001433819010080](https://doi.org/10.1134/S0001433819010080)
8. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В. Идентификация мощности источника загрязнения в Казантипском заливе на основе применения вариационного алгоритма. *Морской гидрофизический журнал*, 2015, № 2, с. 79–88. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V. Identification of the pollution source power in the Kazantip Bay based on the application of the variational algorithm. *Morskoy gidrofizicheskiy zhurnal = Marine Hydrophysical Journal*, 2015, no. 2, pp. 79–88. (in Russian)] EDN: [VDVDER](https://www.edn.net/VDVDER) DOI: [10.22449/0233-7584-2015-2-79-88](https://doi.org/10.22449/0233-7584-2015-2-79-88)
9. Кочергин, С.В., Фомин, В.В., Вариационная идентификация входных параметров модели распространения загрязняющих веществ от подводного источника. *Морской гидрофизический журнал*, 2019, т. 35, № 6, с. 621–632. [Kochergin, S.V., Fomin, V.V., Variational identification of input parameters of the model of pollutant spread from an underwater source. *Morskoy gidrofizicheskiy zhurnal = Marine Hydrophysical Journal*, 2019, vol. 35, no. 6, pp. 621–632. (in Russian)] EDN: [PIQZAL](https://www.edn.net/PIQZAL) DOI: [10.22449/0233-7584-2019-6-621-632](https://doi.org/10.22449/0233-7584-2019-6-621-632)
10. Кочергин, В.С., Определение поля концентрации пассивной примеси по начальным данным на основе решения сопряженных задач. *Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа*, 2011, вып. 25, т. 2, с. 370–376. [Kochergin, V.S., Determination of the concentration field of a passive impurity from initial data based on the solution of conjugate problems. *Ekologicheskaya bezopasnost' pribrezhnoy i shel'fovoy zon i kompleksnoe ispol'zovanie resursov shel'fa = Environmental safety of coastal and shelf zones and integrated use of shelf resources*, 2011, iss. 25, vol. 2, pp. 370–376. (in Russian)]
11. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Вариационные процедуры идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2021, т. 18, № 3, с. 14–18. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Variational procedures for identifying input parameters of a passive pollutant transport model. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2021, vol. 18, no. 3, pp. 14–18. (in Russian)] EDN: [LVLLXX](https://www.edn.net/LVLLXX) DOI: [10.31429/vestnik-18-3-41-45](https://doi.org/10.31429/vestnik-18-3-41-45)
12. Страхов, В.Н., Метод фильтрации систем линейных алгебраических уравнений — основа для решения линейных задач гравиметрии и магнитометрии. *Докл. АН СССР*, 1991, т. 320, № 3, с. 595–599. [Strakhov, V.N., Method of filtering systems of linear algebraic equations — basis for solving linear problems of gravimetry and magnetometry. *Doklady USSR Academy of Sciences*, 1991, vol. 320, no. 3, pp. 595–599. (in Russian)]
13. Горский, В.Г., *Планирование кинетических экспериментов*. Москва, Наука, 1984. [Gorsky, V.G., *Planirovanie kineticheskikh eksperimentov = Planning of Kinetic Experiments*. Moscow, Nauka, 1984. (in Russian)]
14. Ермаков, С.М., Жиглявский, А.А., *Математическая теория оптимального эксперимента*. Москва, Наука, 1987. [Ermakov, S.M., Zhiglyavsky, A.A., *Matematicheskaya teoriya optimal'nogo eksperimenta = Mathematical theory of optimal experiment*. Moscow, Nauka, 1987. (in Russian)]
15. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Использование решения сопряженных задач при идентификации входных параметров модели переноса и планировании эксперимента. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2017, № 2, с. 42–47. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Using the solution of conjugate problems in identifying input parameters of the transport model and planning an experiment. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2017, no. 2, pp. 42–47. (in Russian)] EDN: [ZHXFNL](https://www.edn.net/ZHXFNL)