

УДК 531.39

EDN: UAFQPR DOI: 10.31429/vestnik-23-1-73-85

## Моделирование возбуждения плоских упругих волн в слоистых анизотропных материалах поверхностными и встроенными пьезопреобразователями

П. А. Нец  , А. А. Евдокимов 

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Нец Полина Алексеевна; ORCID 0009-0003-7414-6395; e-mail: [polina.nec@mail.ru](mailto:polina.nec@mail.ru)

*Аннотация.* В работе рассматривается задача моделирования процессов возбуждения и распространения бегущих упругих волн в многослойном анизотропном волноводе пленочным пьезопреобразователем, расположенным на поверхности волновода или интегрированным между его слоями. Для ее решения в случае плоской деформации развивается гибридный численно-аналитический подход, основанный на сопряжении конечно-элементного решения в ограниченной области, содержащей пьезоактуатор, с представлениями волновых полей в однородных частях многослойного волновода в виде суперпозиции нормальных мод. Приводятся результаты численной верификации разработанной компьютерной модели и примеры ее использования для параметрического анализа волновой динамики слоистого композитного материала с перекрестной схемой укладки трансверсально-изотропных слоев, демонстрирующие влияние глубины размещения пьезопреобразователя на распределение энергии между отдельными нормальными модами.

*Ключевые слова:* бегущие упругие волны, слоистый анизотропный волновод, поверхностные и встроенные пьезопреобразователи, гибридная вычислительная схема.

*Финансирование.* Работа выполнена при поддержке государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FZEN-2024-0003).

*Цитирование:* Нец П. А., Евдокимов А. А. Моделирование возбуждения плоских упругих волн в слоистых анизотропных материалах поверхностными и встроенными пьезопреобразователями // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2026. Т. 23, № 1. С. 73–85. EDN: UAFQPR. DOI: 10.31429/vestnik-23-1-73-85

Поступила 14 февраля 2026 г. После доработки 7 марта 2026 г. Принято 17 марта 2026 г. Публикация 23 марта 2026 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2026. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## Modeling the Excitation of Plane Elastic Waves in Layered Anisotropic Materials by Surface-Bonded and Embedded Piezoelectric Actuators

P. A. Nets  , A. A. Evdokimov 

Kuban State University, 149 Stavropolskaya Str., Krasnodar, 350040, Russia

✉ Polina A. Nets; ORCID 0009-0003-7414-6395; e-mail: [polina.nec@mail.ru](mailto:polina.nec@mail.ru)

*Abstract.* The paper addresses the problem of modeling the excitation and propagation of elastic guided waves in a multilayered anisotropic waveguide by a thin-film piezoelectric transducer located on its surface or embedded between sublayers. To solve this problem under plane strain conditions, a hybrid numerical-analytical approach is advanced, which is based on coupling a finite-element solution in a bounded domain containing the piezoelectric actuator with normal mode expansion representations for the wavefields in the homogeneous parts of the multilayered waveguide. Results of numerical verification of the developed computational model are presented, along with examples of its application to parametric analysis of wave dynamics in a layered composite material with a cross-ply stacking sequence of transversely isotropic layers. The results demonstrate the influence of the piezoelectric actuator depth on the distribution of energy among individual normal modes.

*Keywords:* elastic guided waves, layered anisotropic waveguide, surface-mounted and integrated piezotransducers, hybrid numerical scheme.

*Funding.* The work has been supported by the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Project No. FZEN-2024-0003).

Cite as: Nets, P. A., Evdokimov, A. A., Modeling the excitation of plane elastic waves in layered anisotropic materials by surface-bonded and embedded piezoelectric actuators. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2026, vol. 23, no. 1, pp. 73–85. DOI: 10.31429/vestnik-23-1-73-85  
Received 14 February 2026. Revised 7 March 2026. Accepted 17 March 2026. Published 23 March 2026.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2026. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

## Введение

Задачи, связанные с моделированием процесса возбуждения упругих волн в слоистом анизотропном волноводе источниками колебаний, расположенными как на его поверхности, так и на некотором заглублении относительно его вертикального сечения, возникают для широкого круга приложений, например, в области ультразвукового неразрушающего контроля и волнового мониторинга состояния протяженных тонкостенных конструкций [1, 2] или современной сенсорики, использующей в качестве физической основы волны Рэлея–Лэмба [3].

В случае, когда в качестве поверхностного или встроенного в слоистый волновод источника колебаний рассматривается пленочный пьезопреобразователь, распространенным подходом к компьютерному моделированию соответствующих волновых процессов является использование стандартного метода конечных элементов (МКЭ) или его модификаций, оптимизированных для численного решения волновых задач в протяженных областях [4, 5]. Такие МКЭ-расчеты, как правило, носят вспомогательный характер и ориентированы на конкретные экспериментальные образцы, а для анализа на их основе волновой структуры решения, например, оценки вклада отдельных нормальных мод в общее волновое поле требуется дополнительная обработка расчетных данных [6], сложность которой для слоистых анизотропных материалов существенно возрастает.

Получить явное представление для волновой структуры решения в дальней от источника колебаний зоне, а также сократить затраты на расчет волновых полей в однородных протяженных областях, прилегающих к области приложения нагрузки, позволяют гибридные вычислительные подходы [7–10]. В их основе лежит использование МКЭ-аппроксимации для области, содержащей неоднородность (в том числе в виде поверхностного или встроенного пьезопреобразователя), которая стыкуется с интегральными или асимптотическими представлениями для нормальных мод в оставшихся однородных частях волновода.

В настоящей работе для моделирования и численного анализа (в случае плоской деформации) процесса возбуждения упругих колебаний в многослойном анизотропном материале пьезопреобразователем, расположенными на поверхности волновода или интегрированными между его слоями, развивается гибридный численно-аналитический подход, предложенный в работе [10]. Его особенностью является представление поля смещений в ограниченной области волновода, содержащей пьезоактуатор, в таком виде, который позволяет для его сеточной аппроксимации использовать стандартные проприетарные или открытые МКЭ-пакеты, что существенно упрощает соответствующую программную реализацию.

Далее в тексте статьи дается описание ключевых аспектов модификации такого гибридного подхода на случай многослойного анизотропного волновода, а также приводятся результаты численной верификации. Рассматривается его применение для решения задачи о возбуждении упругих колебаний в слоистом композитном материале (СКМ), составленном из одинаковых трансверсально-изотропных слоев-препрегов с перекрестной схемой укладки, поверхностными или встроенным пьезопреобразователем. Приводятся результаты численного анализа, иллюстрирующие влияние глубины размещения пьезоактуатора относительно толщины материала на распределение закачиваемой в волновод энергии между фундаментальными и высшими нормальными модами.

## 1. Общая постановка рассматриваемых задач

Рассматриваются плоские установившиеся гармонические колебания  $\mathbf{u}e^{-i\omega t}$  (далее гармонический множитель  $e^{-i\omega t}$  опускается), а все результаты приводятся для комплексных

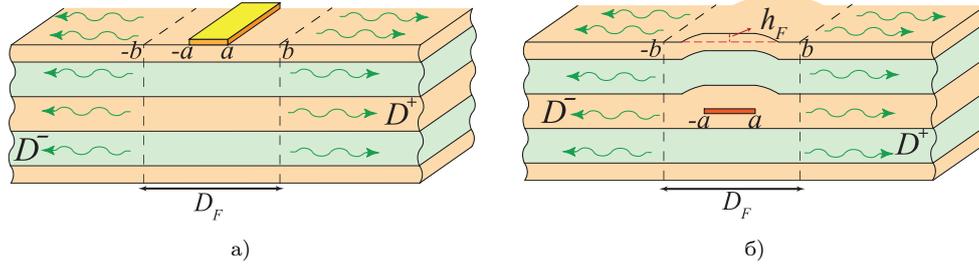


Рис. 1. Геометрия рассматриваемых задач: а) поверхностный пьезоэлемент, б) волновод со встроенным пьезоэлементом

Fig. 1. Geometry of the problems under consideration: a) surface piezoelectric element, б) waveguide with built-in piezoelectric element

амплитуд соответствующих величин) многослойного волновода  $D$  толщины  $H$ , состоящего из  $M$  анизотропных слоев (рис. 1)

$$D_m : |x| < \infty, \quad z_{m+1} \leq z \leq z_m, \quad z_1 = 0, \quad z_{M+1} = -H,$$

$$D = \bigcup_{m=1}^M D_m, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Толщина каждого из слоев  $D_m$ ,  $m = 1, \dots, M$  определяется как  $h_m = z_m - z_{m+1}$ , при этом общая толщина пакета равна  $H = \sum_{m=0}^M h_m$ . Источником колебаний служит пленочный пьезопреобразователь, занимающий прямоугольную область  $\Omega = \{(x, z) : |x| < a, z_{p,1} < z < z_{p,2}\}$ ,  $h_p = z_{p,2} - z_{p,1}$ , который может располагаться как на поверхности волновода ( $z_{p,1} = z_1 = 0$ ) (рис. 1а), так и между его слоями (рис. 1б). Последний случай соответствует перспективным методам интеграции сенсорных элементов между слоями композитного материала непосредственно в процессе его изготовления, имеющими большое значения для развития современных систем активного ультразвукового мониторинга состояния тонкостенных композитных конструкций [11]. Такие встроенные пьезоактуаторы в незначительной степени влияют на прочностные свойства получаемого композита, внешние слои которого обеспечивают при этом их защиту от воздействий внешних факторов [12, 13]. Многочисленные экспериментальные исследования показывают принципиальную возможность использования таких встроенных сенсорных пленочных пьезопреобразователей для возбуждения и регистрации бегущих упругих волн [14].

В рамках линейной теории упругости компоненты вектора смещений  $\mathbf{u} = (u_x, u_z) = (u, w)$  удовлетворяют уравнениям движения

$$c_{ijkl}u_{l,jk} - \rho\omega^2u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

в которых плотность  $\rho$  и упругие модули  $c_{ijkl}$  являются кусочно-постоянными функциями поперечной координаты  $z$ , то есть они постоянны внутри каждого из слоев  $D_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ . В тензорной записи предполагается суммирование по одинаковым индексам, а запятой, как обычно, обозначается производная по соответствующей координате:  $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$ .

Внешние границы волновода, задаваемые плоскостями  $z = 0$  и  $z = -H$ , свободны от напряжений за исключением отрезка  $S = \Omega \cap D$ , по которому пьезоактуатор контактирует с областью  $D$  в случае его поверхностного расположения:

$$\tau|_{x \in \mathbb{R} \setminus S, z=0} = 0, \quad \tau|_{x \in \mathbb{R}, z=-H} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь  $\tau = \{\tau_{xz}, \sigma_{zz}\}$  вектор напряжений на горизонтальной линии  $z = \text{const}$ . Отдельные слои волновода  $D_m$ ,  $m = 1, \dots, M$  жесткого сцеплены между собой:

$$[\mathbf{u}]_m = 0, \quad [\tau]_m = 0, \quad m = 2, 3, \dots, M. \quad (1.3)$$

Квадратными скобками обозначен скачок функции на межслойных интерфейсах  $z = z_m$ :

$$[f]_m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f(z_m - \varepsilon) - f(z_m + \varepsilon)).$$

Контакт между пьезоэлементом и подложкой в случае поверхностного расположения источника колебаний, а также между пьезоактуатором и прилегающими к нему слоями волновода в случае интегрированного преобразователя предполагается идеальным, то есть соответствующие компоненты векторов смещений и напряжений на всех границах контакта считаются непрерывными, аналогично уравнениям (1.3). При этом в модели учитывается, что размещение пьезоэлемента внутри композитного материала приводит к локализованному росту его толщины на величину  $h_F$ , приближенно равную толщине самого актуатора:  $h_F = h_p$  (рис. 16).

Динамическое поведение пьезопреобразователя рассматривается в рамках линейной пьезоупругости [15]; математическая постановка связной электромеханической задачи в случае поверхностного актуатора дана, например, в работе [16]. При этом для встроенного пьезоэлемента она не претерпевает существенных изменений. В обоих случаях расположения актуатора относительно толщины волновода его боковые границы предполагаются свободными от электрических смещений, нижнее его ребро  $z = z_{p,1}$  заземленным, а на верхнем — задан электрический потенциал  $V(f)$ , где  $f = \omega/2\pi$  — размерная частота, измеряемая в Гц.

## 2. Гибридная численно-аналитическая схема для моделирования возбуждения упругих колебаний пьезоэлементом

Для моделирования волновой динамики системы «поверхностный (встроенный) пьезоэлемент — многослойный анизотропный волновод» (рис. 1) была обобщена разработанная ранее гибридная численно-аналитическая схема [10, 17]. В её основе лежит сопряжение локальной конечно-элементной модели для участка волновода  $D_F : |x| \leq b, -H < z < 0$ , включающего пьезоэлемент ( $b > a$ ), реализованной при помощи МКЭ-пакета COMSOL Multiphysics 5.6, с аналитическим представлением волновых полей в виде разложения по нормальным модам в оставшихся однородных по  $x$  частях волновода  $D^\pm : |x| \geq b, -H < z < 0$ .

Общее решение  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  для всего волновода  $D = D_F \cup D^\pm$  представимо в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}_N(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}_N^-(\mathbf{x}), & x \leq -b, \\ \mathbf{u}_N^F(\mathbf{x}), & |x| \leq b, \\ \mathbf{u}_N^+(\mathbf{x}), & x \geq b, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{u}_N^F$  — МКЭ решение в области  $D_F$ , а поля  $\mathbf{u}_N^\pm$  ищутся в виде суперпозиции нормальных мод:

$$\mathbf{u}_N^\pm = \sum_{n=1}^N c_n^\pm \mathbf{a}_n^\pm(z) e^{\pm i\zeta_n(x \mp a)}. \quad (2.2)$$

В соотношениях (2.2)  $c_n^\pm$  — неизвестные коэффициенты, которые определяют амплитуду бегущих упругих волн, распространяющихся влево (знак «-») и вправо (знак «+») от пьезоэлемента;  $\mathbf{a}_n^\pm(z) = \{a_{n,x}^\pm, a_{n,z}^\pm\}$  и  $\zeta_n$  — собственные формы и волновые числа нормальных мод с номером  $n$ . Параметр  $N = N_R + N_I$  определяет количество удерживаемых в разложении (2.2) слагаемых, соответствующих  $N_R$  нормальным модам с вещественными волновыми числами  $\zeta_n$ , распространяющимся без затухания от источника колебаний, и  $N_I$  экспоненциально затухающим бегущим волнам, у которых  $|\text{Im} \zeta_n| > 0$ . При этом конкретное значение  $N_I$  определяется шириной расчетной области  $b$  и допустимыми вычислительными затратами на построение набора МКЭ-решений.

Волновое поле  $\mathbf{u}_N^F$  строится в виде разложения по базисным конечноэлементным решениям  $\mathbf{u}_n^{F\pm}$ :

$$\mathbf{u}_N^F(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0^F(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^N [c_n^+ \mathbf{u}_n^{F+}(\mathbf{x}) + c_n^- \mathbf{u}_n^{F-}(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in D_F. \quad (2.3)$$

Вектор-функция  $\mathbf{u}_0^F$  соответствует рассматриваемой связанной электромеханической задаче и описывает приток волновой энергии от поверхностного или встроенного пьезоактуатора, расположенного внутри области  $D_F$ , в волновод. Неизвестные коэффициенты  $c_n^\pm$  те же, что и в разложении (2.2). Функции  $\mathbf{u}_n^{F\pm}$  удовлетворяют уравнению (1.1) в области  $D_F$ , граничным условиям на верхней и нижней поверхностях волновода (1.2), а также всем внутренним условиям на межслойных интерфейсах (1.3). На вертикальных отрезках, вдоль которых область  $D_F$  стыкуется с полубесконечными областями  $D^\pm$ , граничные условия задаются в соответствии со свойством обобщенной ортогональности нормальных мод для упругих волноводов [18]:

$$(a_{m,x}, b_{n,x}) - (b_{m,z}, a_{n,z}) = 0, \quad m \neq n,$$

$$(f, g) = \int_{-H}^0 f(z)g(z) dz. \quad (2.4)$$

В данном соотношении  $m$  и  $n$  – номера нормальных мод, вектор  $\mathbf{b}_n$  соответствует вектору напряжений для бегущей волны с номером  $n$ , действующих на площадку с нормалью ориентированной вдоль горизонтальной оси:  $\mathbf{b}_n = \boldsymbol{\sigma}_{n,x} = \{\sigma_{n,xx}, \tau_{n,xz}\}$ . Функции  $a_{n,x}$  и  $a_{n,z}$  совпадают с аналогичными из представлений (2.2).

В соответствии с соотношением (2.4) на боковых границах  $x = \pm b$ ,  $-H < z < 0$  можно задать два варианта граничных условий для МКЭ-решений, входящих в правую часть представления (2.3). В первом случае они формулируются относительно горизонтальной и касательной компонент векторов смещений и напряжений соответственно, то есть

$$x = -b : \begin{pmatrix} u_0^F \\ \tau_{0,xz}^F \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} u_n^{F+} \\ \tau_{n,xz}^{F+} \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} u_n^{F-} \\ \tau_{n,xz}^{F-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n,x}^- \\ b_{n,z}^- \end{pmatrix} e^{i\zeta_n \Delta x},$$

$$x = b : \begin{pmatrix} u_0^F \\ \tau_{0,xz}^F \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} u_n^{F+} \\ \tau_{n,xz}^{F+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n,x}^+ \\ b_{n,z}^+ \end{pmatrix} e^{i\zeta_n \Delta x}, \quad \begin{pmatrix} u_n^{F-} \\ \tau_{n,xz}^{F-} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\Delta x = b - a. \quad (2.5)$$

Во втором варианте используются нормальная компонента напряжений  $\sigma_n^F$  и вертикальная компонента перемещений  $w_n^F$ :

$$x = -b : \begin{pmatrix} \sigma_{0,xx}^F \\ w_0^F \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} \sigma_{n,xx}^{F+} \\ w_n^{F+} \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} \sigma_{n,xx}^{F-} \\ w_n^{F-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n,x}^- \\ a_{n,z}^- \end{pmatrix} e^{i\zeta_n \Delta x},$$

$$x = b : \begin{pmatrix} \sigma_{0,xx}^F \\ w_0^F \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} \sigma_{n,xx}^F \\ w_n^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n,x}^+ \\ a_{n,z}^+ \end{pmatrix} e^{i\zeta_n \Delta x}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_{n,xx}^{F-} \\ w_n^{F-} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.6)$$

В случае граничных условий (2.5) обеспечивается непрерывность первой компоненты  $u_N$  вектора перемещений  $\mathbf{u}_N$  и второй компоненты  $\tau_{N,xz}$  вектора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}_{N,x}$  на внутренних искусственных границах  $x = \pm b$ . При использовании граничных условий (2.6), напротив, явно задается непрерывность компонент  $w_N$  и  $\sigma_{N,xx}$ . В случае однослойного волновода принципиальной разницы между обоими вариантами граничных условий нет. Однако для многослойного композита условия (2.6) могут обеспечить более высокую точность получаемого численного решения при том же объеме вычислительных затрат. Связано это с тем, что нормальная компонента напряжений  $\sigma_{N,xx}$  в случае, когда упругие свойства соседних слоев  $D_m$  и  $D_{m+1}$ ,  $m = 1, \dots, M - 1$  различны, терпит разрыв при переходе через границу  $z = z_m$ . Поскольку вычисления напряжений с использованием стандартных МКЭ-пакетов, в которых реализована КЭ-аппроксимация в классе функций  $C_0$ , могут приводить к численным артефактам, более рациональным представляется явно задать условия непрерывности для той компоненты вектора напряжений, которая носит разрывный характер по переменной  $z$ , нежели чем удовлетворять их в интегральном смысле в рамках соотношений (2.4).

Условия непрерывности для оставшихся компонент векторов смещений и напряжений, не входящих в граничные условия (2.5) или (2.6), например, для  $u_N$  и  $\tau_{N,xz}$  во втором случае, используются для определения неизвестных коэффициентов  $c_n^\pm$ . Для указанных компонент эти условия могут быть представлены в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^N c_n^- a_{n,x}^-(z) e^{i\zeta_n r} = u_0^F(-b, z) + t \sum_{n=1}^N [c_n^+ u_n^{F+}(-b, z) + c_n^- u_n^{F-}(-b, z)], \quad (2.7)$$

$$\sum_{n=1}^N c_n^- b_{n,z}^-(z) e^{i\zeta_n r} = \tau_{0,xz}^F(-b, z) + \sum_{n=1}^N [c_n^+ \tau_{n,xz}^{F+}(-b, z) + c_n^- \tau_{n,xz}^{F-}(-b, z)], \quad (2.8)$$

$$\sum_{n=1}^N c_n^+ a_{n,x}^+(z) e^{i\zeta_n r} = u_0^F(b, z) + \sum_{n=1}^N [c_n^+ u_n^{F+}(b, z) + c_n^- u_n^{F-}(b, z)], \quad (2.9)$$

$$\sum_{n=1}^N c_n^+ b_{n,z}^+(z) e^{i\zeta_n r} = \tau_{0,xz}^F(b, z) + \sum_{n=1}^N [c_n^+ \tau_{n,xz}^{F+}(b, z) + c_n^- \tau_{n,xz}^{F-}(b, z)]. \quad (2.10)$$

В случае граничных условий для МКЭ-задач (2.5) соотношения для  $w_N$  и  $\sigma_{N,xx}$  запишутся аналогично представлениям (2.7)–(2.10).

Для дискретизации соотношений (2.7)–(2.10) использовался метод Галеркина. Функции  $b_{n,x}^\mp$  выступали в качестве проекторов для уравнений (2.7) и (2.9), а компоненты смещений собственных форм нормальных мод  $a_{n,z}^\mp$  соответственно для (2.8) и (2.10). Такой выбор проекторов обусловлен условиями ортогональности нормальных мод (2.4). Вычисляя соответствующие скалярные произведения, а также вычитая из (2.7) и (2.9) соотношения (2.8) и (2.10), можно получить систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $c_n^\pm$ :

$$\mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{f}. \quad (2.11)$$

Матрица  $\mathbf{A}$  состоит из диагональной части  $\mathbf{C}$  и заполненной части  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} = \text{diag}(d_1^-, d_2^-, \dots, d_N^-, d_1^+, d_2^+, \dots, d_N^+),$$

$$d_m^\pm = - [ (a_{m,x}^\pm, b_{m,x}^\pm) - (b_{m,z}^\pm, a_{m,z}^\pm) ] e^{i\zeta_m r},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1^- & B_1^+ \\ B_2^- & B_2^+ \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} b_{1,nm}^\pm &= (u_{m,x}^\pm, b_{n,x}^\pm) - (\tau_{m,xz}^{F\pm}, a_{n,z}^\pm), \quad x = -b, \\ b_{2,nm}^\pm &= (u_{m,x}^\pm, b_{n,x}^\pm) - (\tau_{m,xz}^{F\pm}, a_{n,z}^\pm), \quad x = b. \end{aligned}$$

Правая часть системы (2.11) имеет вид

$$\mathbf{f} = (f_1^{F-}, \dots, f_N^{F-}, f_1^{F+}, \dots, f_N^{F+})^T, \quad f_n^{F\pm} = (u_0^F, b_{n,x}^\pm) - (\tau_{0,xz}^F, a_{n,z}^\pm), \quad x = \pm b.$$

### 3. Численная валидация гибридной схемы

Для проверки корректности компьютерной реализации обобщенной на случай многослойного анизотропного волновода гибридной схемы и оценки эффективности использования разных типов граничных условия (2.5) или (2.5) при построении базисных МКЭ-решений в (2.3) рассматривалась задача о возбуждении плоских колебаний заданной поверхностной нагрузкой в трехслойном композитном образце с перекрестной схемой укладки  $[0, 90, 0]$  однонаправленных трансверсально-изотропных слоев-препрегов (рис. 2). Предполагается, что ориентация волокон в верхнем и нижнем слоях совпадает с направлением горизонтальной оси. Поскольку исходная задача рассматривается в плоской постановке, что допустимо для такого класса материалов в случае, если нормальные моды распространяются вдоль одной из главных осей композита, то упругие свойства каждого из слоев могут быть описаны четырьмя независимыми упругими модулями. Соответствующие элементы матрицы жесткости в нотации Фойгта, а также значения плотности и толщины слоев приведены в табл. 1.

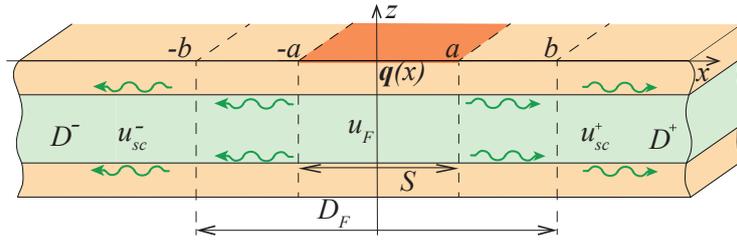


Рис. 2. Геометрия модельной задачи

Fig. 2. Geometry of the model problem

Таблица 1. Параметры материала

Table 1. Material parameters

Ориентация слоя	Номер слоя	$h_m$ , мм	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$C_{11}$ , ГПа	$C_{13}$ , ГПа	$C_{33}$ , ГПа	$C_{55}$ , ГПа
0°	1	0,575	1,522	122,4	4,13	11,5	4,85
90°	2	1,15	1,522	11,5	6,47	11,5	2,51
0°	3	0,575	1,522	122,4	4,13	11,5	4,85

В качестве источника колебаний рассматривается приложенная к верхней границе волновода  $z = 0$  равномерно распределенная вдоль отрезка  $S : |x| < a$  нагрузка  $\mathbf{q}(x) = \{q_x, q_z\} \equiv 1$ . Первое из соотношений в граничных условиях (1.2) примет вид

$$\tau|_{z=0} = \begin{cases} \mathbf{q}(x), & x \in S, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus S. \end{cases}$$

Численное решение краевой задачи (1.1)–(1.3) в такой постановке может быть построено с использованием полуаналитического интегрального подхода [19, 20] и рассматривается далее в качестве эталонного:

$$\mathbf{u}_{IA} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad \mathbf{Q}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 \sin(\alpha a) / \alpha \\ 2 \sin(\alpha a) / \alpha \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Здесь  $\mathbf{K}(\alpha, z)$  и  $\mathbf{Q}(\alpha)$  — Фурье-символы матрица Грина для рассматриваемого волновода и вектор-функции  $\mathbf{q}(x)$  соответственно, контур интегрирования  $\Gamma$  обходит вещественные полюса  $\zeta_n$ ,  $n = 1, \dots, N_R$  элементов матрицы  $\mathbf{K}$  в соответствии с принципом предельного поглощения [21]. Для вычисления интеграла в соотношении (3.1) использовались адаптивные квадратуры Гаусса–Кронрода, обеспечивавшие относительную погрешность интегрирования, равную  $10^{-6}$ .

В качестве параметра, характеризующего отклонение решения, получаемого с использованием гибридного подхода, от эталонного рассматривалась следующая величина:

$$\varepsilon = \frac{1}{2H} \int_{-H}^0 \frac{|\mathbf{u}_{IA}(-b, z) - \mathbf{u}_N(-b, z)|}{|\mathbf{u}_{IA}(-b, z)|} + \frac{|\mathbf{u}_{IA}(b, z) - \mathbf{u}_N(b, z)|}{|\mathbf{u}_{IA}(b, z)|} dz.$$

Влияние выбора граничных условий (2.5) или (2.6) на боковых границах  $x = \pm b$  области  $D_F$  при построении базисных МКЭ-решений на погрешность  $\varepsilon$  иллюстрируется на рис. 3 и 4. В обоих случаях  $a = 1$  мм,  $b = 4$  мм,  $f = 0,2$  МГц, при построении МКЭ-решений использовалась сетка из треугольных КЭ с максимальным характерным размером, равным 0,5 мм, что обеспечивает дискретизацию каждого из слоев не менее, чем двумя элементами по толщине. При малом числе слагаемых  $N$ , удерживаемых в представлениях (2.2) и (2.3) (для данной частоты колебаний  $N_R = 2$ ), а также низком порядке полиномов в базисной функции КЭ различие незначительно. Более того, граничные условия вида (2.5) дают лучшие численные

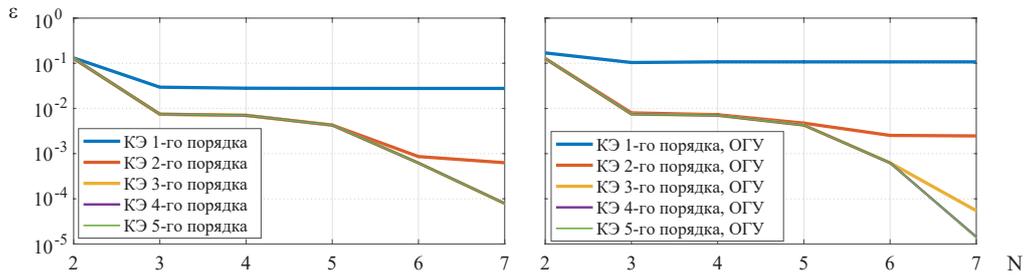


Рис. 3. Относительная ошибка  $\varepsilon$  в зависимости от числа учитываемых в разложении мод  $N$ . Расчеты выполнялись на одной и той же конечно-элементной сетке, но с различным порядком элементов, при частоте  $f = 200$  кГц и числе сплайнов 2000 на единицу длины

Fig. 3. Relative error  $\varepsilon$  depending on the number of modes  $N$  considered in the expansion. The calculations were performed on the same finite element mesh, but with different element orders, at a frequency  $f = 200$  kHz and a spline count of 2000 per unit length

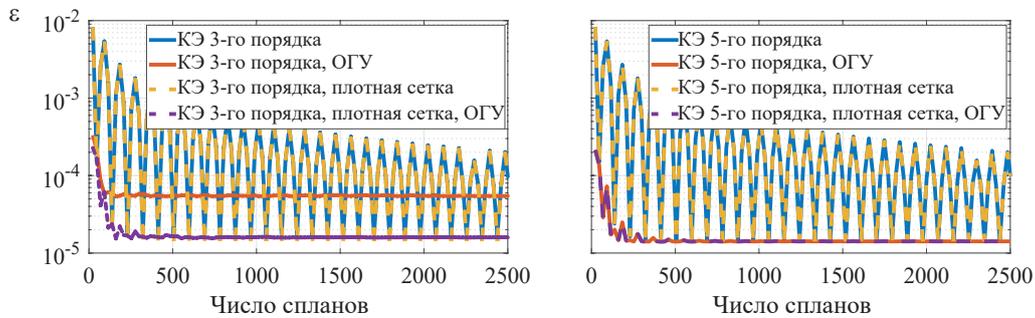


Рис. 4. Относительная ошибка  $\varepsilon$  при различных числах сплайнов на вертикальных участках  $x = \pm b$  (рис. 2). Для сплошных и штриховых линий использовались одинаковая сетка и порядок конечных элементов. Для штриховых линий выбрана более плотная сетка. Расчеты выполнены на частоте  $f = 200$  кГц

Fig. 4. Relative error  $\varepsilon$  for different spline numbers on vertical sections  $x = \pm b$  (Fig. 2). The same mesh and finite element order were used for solid and dashed lines. A denser mesh was chosen for dashed lines. Calculations were performed at a frequency of  $f = 200$  kHz

результаты для некоторых комбинаций параметров (рис. 3). Однако с увеличением порядка полиномов и числа удерживаемых нормальных мод с комплексными волновыми числами граничные условия (2.6) обеспечивают более точные результаты по сравнению с условиями (2.5). Более наглядно эта особенность проявляется на рис. 4 при сравнении расчетов, выполненных с различным числом точек, выгружаемых из МКЭ-решений для вычисления интегралов при построении элементов матрицы системы (2.11). Видно, что при выборе граничных условий (2.6) гибридная схема дает более устойчивые результаты и гораздо быстрее сходится к некоторому постоянному значению погрешности, которое зависит от других параметров (в частности,  $N$  и  $b$ ).

Для проверки возможности использования гибридной схемы на высоких частотах колебаний, при которых в волноводе возбуждается большее количество незатухающих нормальных мод ( $N_R > 2$ ), сопоставление с  $u_{1A}$  осуществлялось в диапазоне частот до  $f = 1$  МГц (рис. 5б). Соответствующие дисперсионные кривые (частотные зависимости вещественных волновых чисел) для трехслойного волновода приведены на рис. 5а. Поскольку решение рассматриваемой задачи, вообще говоря, может быть получено и без использования гибридной схемы в рамках встроенных возможностей COMSOL Multiphysics для моделирования открытых волноводов — так называемых идеально согласованных слоев (МКЭ-ИСС), примыкающих справа и слева к расчетной области и обеспечивающих учет оттока волновой энергии на бесконечность

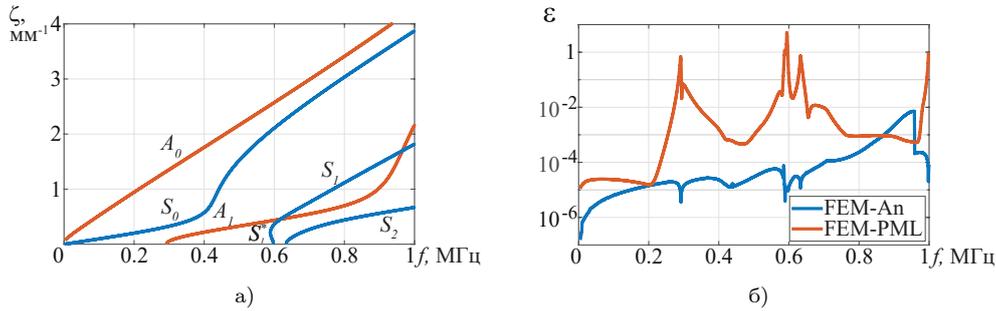


Рис. 5. а) дисперсионные кривые для тестового трехслойного волновода, б) относительная погрешность  $\varepsilon$  как функция частоты  $f$  для гибридной схемы (сплошная линия) и МКЭ-ИСС (пунктирная линия)

Fig. 5. а) dispersion curves for the test three-layer waveguide, б) relative error  $\varepsilon$  as a function of frequency  $f$  for the hybrid circuit (solid line) and FEM-ISS (dashed line)

от источника колебаний, то результаты расчетов интегральной невязки МКЭ-ИСС также приводятся на рис. 56.

Для обоих методов (гибридная схема и МКЭ-ИСС) использовалась такая же расчетная сетка, как в примерах выше, и одинаковый, четвертый порядок базисных функций конечных элементов. Оба подхода демонстрируют хорошую согласованность с эталонным решением (относительная ошибка  $\varepsilon < 10^{-2}$ ) почти для всех рассматриваемых частот. В то же время для метода МКЭ-ИСС в диапазоне обратных мод и окрестностях частот отсечки, как и ожидалось, погрешность  $\varepsilon$  существенно возрастает и может превосходить единицу. В свою очередь точность результатов, получаемых с использованием гибридной схемы, снижается в диапазоне частот от 0,86 до 0,96 МГц. В конце данного интервала при  $f = 0,96$  МГц наблюдается скачок, который связан с увеличением числа слагаемых  $N$  в разложении (2.2). В проведенных расчетах величина  $N$  была ограничена условием  $|\text{Im } \zeta_n| \leq 1,5$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  для всего рассматриваемого частотного диапазона. Для повышения точности вычисления  $\mathbf{u}_N$ , можно увеличить верхний предел для мнимой части волновых чисел  $\zeta_n$ , соответствующих нормальным модам, удерживаемым в разложении (2.2) и/или расширить область  $D_F$  (в выполненных расчетах  $b = 4$  мм), что безусловно приведет к росту вычислительных затрат.

#### 4. Влияние глубины залегания пьезоэлемента на возбуждаемые бегущие упругие волны

В качестве примера использования разработанной модификации гибридного метода рассматривается задача о возбуждении плоских упругих колебаний вдоль главной осей симметрии, совпадающей с направлением горизонтальной оси  $Ox$ , в восьмислойном ( $M = 8$ ) композитном материале со схемой укладки трансверсально-изотропных препрегов  $[(0^\circ, 90^\circ)_s]_2$ . Толщина пластины  $H = 2,3$  мм, плотность и упругие модули отдельных слоев такие же, как для материалов препрегов из табл. 1, толщина каждого отдельного слоя  $h_m = H/8 = 0,2875$  мм,  $m = 1, \dots, 8$ . В качестве источника колебаний рассматривался пьезоэлемент толщиной  $h_p = 0,1$  мм и шириной  $a = 5$  мм из материала PZT-5Н [22] ( $V(f) = 70$  В), установленный на поверхности композита или встроенный внутри него между различными слоями. Схематичное изображение рассматриваемой задачи представлено на рис. 16. Анализируется влияние расположения пленочного пьезодатчика по толщине волновода на распределение волновой энергии, переносимой отдельными модами. Суммарный поток энергии от источника колебаний через боковое сечение волновода вычислялся по формуле [19]

$$E^\pm = -\frac{\omega}{2} \text{Im} \left[ \int_{-H}^0 (\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) dz \right],$$

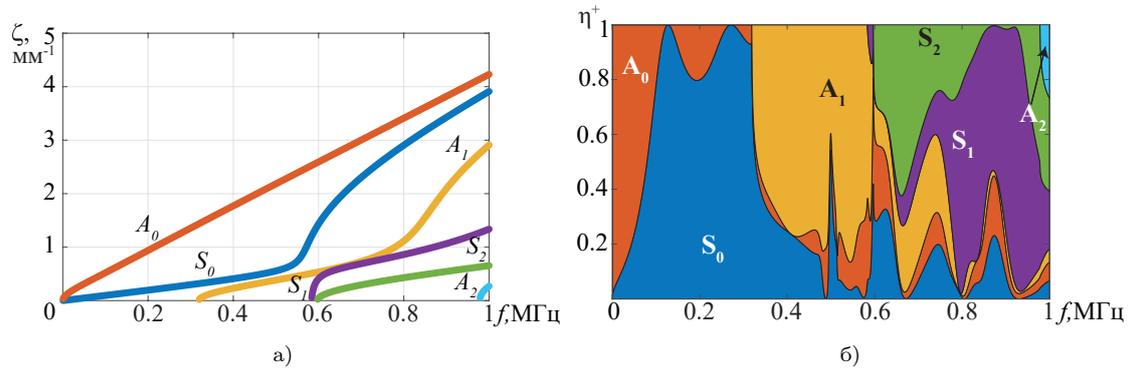


Рис. 6. а) частотные зависимости волновых чисел фундаментальных и высших нормальных мод, б) распределение энергии по модам для волновода с поверхностным пьезоэлементом

Fig. 6. a) frequency dependences of wave numbers of fundamental and higher normal modes, б) energy distribution by modes for a waveguide with a surface piezoelectric element

где  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  — вектор смещений (2.1);  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  — вектор напряжений на площадке с нормалью, сонаправленной с осью  $Ox$  (знак «+») и действующей в противоположном направлении (знак «-»). Для расчета потока энергии, переносимой отдельной нормальной модой, использовалось аналогичное соотношение

$$E_n^\pm = -\frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \left[ \int_{-H}^0 (\mathbf{u}_n, \boldsymbol{\sigma}_n) dz \right], \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

где  $N$  — количество нормальных мод, удерживаемых в представлении (2.2) на данной частоте. Вклад каждой моды по отдельности определялся по формуле

$$\eta_n^\pm = \frac{E_n^\pm}{E^\pm}.$$

В силу симметрии задачи относительно оси  $O_z$  можно рассматривать только одну из долей  $\eta_n^+$  или  $\eta_n^-$ .

Предварительно для рассматриваемого волновода были построены частотные зависимости волновых чисел. Соответствующие дисперсионные кривые приведены на рис. 6а. График долей энергии каждой нормальной моды для волновода с поверхностным пьезоэлементом представлен рис. 6б. Рассматриваемый диапазон частот можно условно разбить на несколько отрезков, в каждом из которых преобладает та или иная нормальная мода: так, в области низких частот почти вся энергия, поступающая от актуатора в подложку, переносится фундаментальной антисимметричной волной  $A_0$ , затем —  $S_0$ , и далее по мере появления высших нормальных мод, каждая из них в определенном диапазоне частот становится доминирующей.

На рис. 7 графики распределения энергии по отдельным нормальным модам представлены для встроенного в волновод пьезоэлемента, расположенного под первым (рис. 7а), вторым (рис. 7б), третьим (рис. 7в) и четвертым (рис. 7г) (посередине волновода) слоями. Видно, что для первых двух случаев на низких частотах большая часть энергии по-прежнему переносится фундаментальной антисимметричной модой  $A_0$ , и в целом характер поведения  $\eta_n^+$  для первых трех нормальных мод в частном диапазоне до появления высших симметричных волн (приблизительно до  $f = 0,6$  МГц) аналогичен случаю поверхностного пьезоэлемента. При  $f > 0,6$  МГц распределение волновой энергии между фундаментальными и высшими нормальными модами для случая актуатора, расположенного под первым или третьем слоями, качественно близко. В то же время для пьезоэлемента, встроенного между вторым и третьим слоями, мода  $S_2$  фактически не возбуждается во всем рассматриваемом частотном диапазоне. При расположении встраиваемого пьезоэлемента посередине волновода, как и ожидалось,

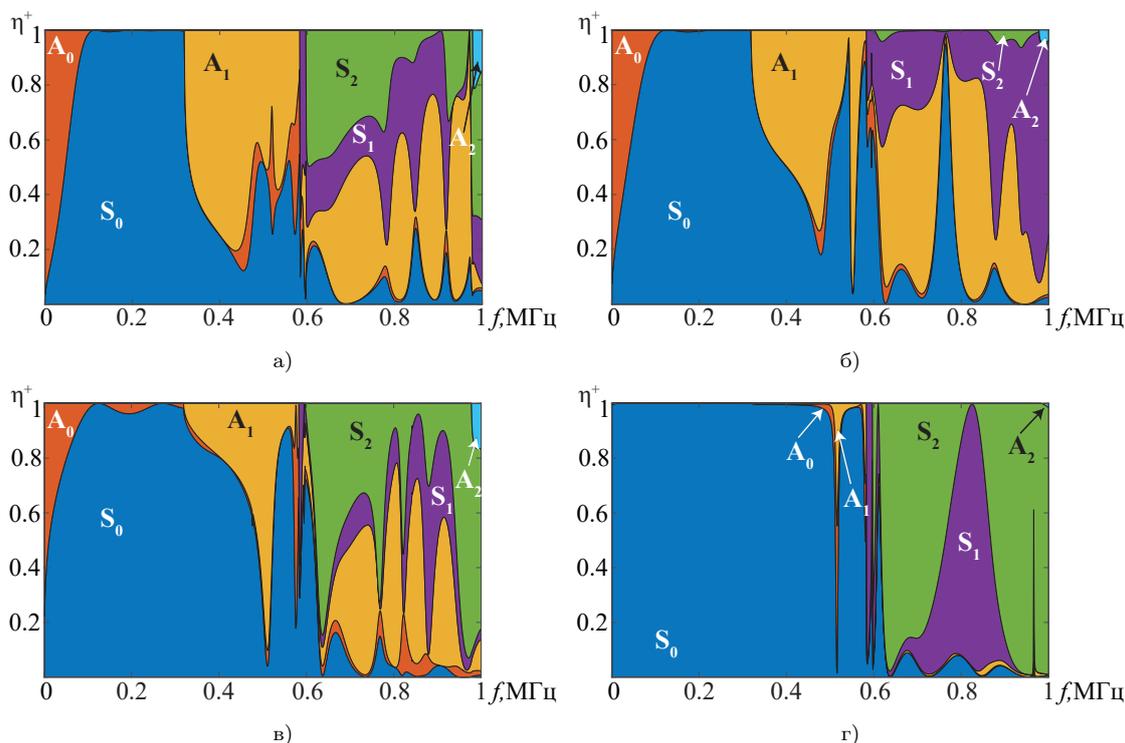


Рис. 7. Распределение энергии по модам для волновода  $[(0^\circ, 90^\circ)_s]_2$  с встроенным пьезоэлементом: а) под 1-м слоем, б) под 2-м слоем, в) под 3-м слоем, г) под 4-м слоем

Fig. 7. Energy distribution by modes for a  $[(0^\circ, 90^\circ)_s]_2$  waveguide with a built-in piezoelectric element: а) under the 1st layer, б) under the 2nd layer, в) under the 3rd layer, г) under the 4th layer

возбуждение антисимметричных волн практически не происходит. Наличие отдельных частотных диапазонов, где моды  $A_0$  и  $A_1$  переносят некоторое количество волновой энергии, можно объяснить локальным отсутствием симметрии относительно срединной линии волновода в области над актуатором (рис. 16).

## Заключение

Рассматриваемая в настоящей статье вычислительная схема, позволяющая в случае плоской деформации моделировать процессы возбуждения бегущих упругих волн в многослойном анизотропном волноводе расположенными на его поверхности и встроенными в него пьезопреобразователями, является прямым обобщением гибридного сеточно-аналитического подхода, предложенного в работе [10]. Ключевой ее особенностью является такая формулировка вспомогательных МКЭ-задач, для области конечных размеров, содержащей источник колебаний, которая позволяет для их решения использовать стандартные МКЭ-пакеты, не прибегая к самостоятельной программной реализации данного сеточного метода.

Корректность компьютерной реализации гибридной схемы подтверждается для тестовых задач сопоставлением с результатами расчетов на основе полуаналитического интегрального подхода и стандартного МКЭ с использованием идеально согласованных слоев для моделирования бесконечно протяженного волновода. Кроме того, на основе численных примеров дается обоснование выбора оптимальных граничных условий при решении вспомогательных МКЭ-задач.

Полученные на основе гибридной схемы результаты компьютерного моделирования особенностей возбуждения бегущих упругих волн в слоистом композитном материале, составленном из одинаковых трансверсально-изотропных слоев-препрегов с перекрестной схемой укладки,

поверхностными или встроенным пьезопреобразователем показывают, что глубина размещения пьезоактуатора относительно толщины материала оказывает существенное влияние на распределение закачиваемой в волновод энергии между фундаментальными и высшими нормальными модами. Так, в случае срединного расположения пленочного пьезопреобразователя, наблюдается почти полное подавление антисимметричных мод. Последнее обстоятельство должно, например, учитываться при проектировании интегрированных в композитный материал систем ультразвукового мониторинга с точки зрения обеспечения их функционала по поиску дефектов типа расслоений, к которым в широком диапазоне частот чувствительной оказывается только фундаментальная антисимметричная волна [23].

Авторы статьи благодарят профессора, д-ра физ.-мат. наук Глушкова Е.В. и профессора, д-ра физ.-мат. наук Глушкову Н.В. за наставление и поддержку.

### Литература [References]

1. Giurgiutiu, V., *Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors*. Elsevier Academic Press, Oxford, England, 2014.
2. Farrar, C.R., Worden, K., *Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors*. *Phil. Trans. R. Soc. A.*, 2006, vol. 365, pp. 303–315. DOI: [10.1098/rsta.2006.1928](https://doi.org/10.1098/rsta.2006.1928)
3. Yantchev, V., Katardjiev, I., Thin film Lamb wave resonators in frequency control and sensing applications: a review. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2013, vol. 23, iss. 4, pp. 043001. DOI: [10.1088/0960-1317/23/4/043001](https://doi.org/10.1088/0960-1317/23/4/043001)
4. Liu, W., Hong, J.W., Three-dimensional Lamb wave propagation excited by a phased piezoelectric array. *Smart Materials and Structures*, 2010, vol. 19, no. 8, pp. 085002 DOI: [10.1088/0964-1726/19/8/085002](https://doi.org/10.1088/0964-1726/19/8/085002)
5. Kudela, P., Zak, A., Krawczuk, M., Ostachowicz, W., Modelling of wave propagation in composite plates using the time domain spectral element method. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, vol. 302, iss. 4–5, pp. 728–745. DOI: [10.1016/j.jsv.2006.12.016](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.12.016)
6. Moreau, L., Castaings, M., Hosten, B., Predoisignals, M.V., An orthogonality relation-based technique for post-processing finite element predictions of waves scattering in solid waveguides. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2006, vol. 120, no. 2, pp. 611–620. DOI: [10.1121/1.2216563](https://doi.org/10.1121/1.2216563)
7. Golub, M., Shpak, A., Semi-analytical hybrid approach for the simulation of layered waveguide with a partially debonded piezoelectric structure. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, vol. 65, iss. 13, pp. 234–255. DOI: [10.1016/j.apm.2018.08.019](https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.08.019)
8. Benmeddour, F., Treysse, F., Laguerre, L., Numerical modeling of guided wave interaction with non-axisymmetric cracks in elastic cylinders. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, vol. 48, pp. 764–774. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2010.11.013](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.11.013)
9. Khanazaryan, A., Golub, M., Hybrid method for modelling anti-plane vibrations of layered waveguides with bonded composite joints. *Computational Continuum Mechanics*, 2023, vol. 16, iss. 1, pp. 101–114. DOI: [10.7242/1999-6691/2023.16.1.8](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.1.8)
10. Глушков, Е.В., Глушкова, Н.В., Евдокимов, А.А., Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах. *Акустический журнал*, 2018, т. 64, № 1, с. 3–12. [Glushkov, E., Glushkova, N., Evdokimov, A., Hybrid numerical-analytical scheme for calculating elastic wave diffraction in locally inhomogeneous waveguides. *Acoustical Physics*, 2018, vol. 64, no. 1, pp. 3-12. DOI: [10.1134/S1063771018010086](https://doi.org/10.1134/S1063771018010086) (in Russian)] DOI: [10.7868/S0320791918010082](https://doi.org/10.7868/S0320791918010082)
11. Ghasemi-Nejhad, M.N., Russ, R., Pourjalali, S., Manufacturing and testing of active composite panels with embedded piezoelectric sensors and actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2005, vol. 16, iss. 4, pp. 319–333. DOI: [10.1177/1045389X05050103](https://doi.org/10.1177/1045389X05050103)
12. Konka, H.P., Wahab, M.A., Lian, K., The effects of embedded piezoelectric fiber composite sensors on the structural integrity of glass-fiber-epoxy composite laminate. *Smart Materials and Structures*, 2011, vol. 21, iss. 1, pp. 1–9. DOI: [10.1088/0964-1726/21/1/015016](https://doi.org/10.1088/0964-1726/21/1/015016)
13. Lampani, L., Sarasini, F., Tirillo, J., Gaudenzi, P., Analysis of damage in composite laminates with embedded piezoelectric patches subjected to bending action. *Composite Structures*, 2018, vol. 202, pp. 935–942. DOI: [10.1016/j.compstruct.2018.04.073](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.04.073)
14. Tuloup, C., Harizi, W., Aboura, Z., Meyer, Y., Khellil, K., Lachat, R., On the use of in-situ piezoelectric sensors for the manufacturing and structural health monitoring of polymer-

- matrix composites: A literature review *Composite Structures*, 2019, vol. 215, iss. 9, pp. 127–149. DOI: [10.1016/j.compstruct.2019.02.046](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.02.046)
15. Auld, B.A., *Acoustic Fields and Waves in Solids. Vol. 1 & 2*. New York, Wiley, 1973.
  16. Варелджан, М.В., Двухэтапная вычислительная схема для моделирования возбуждения упругих колебаний в изотропном слое поверхностным пьезопреобразователем. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 1, с. 57–69. [Vareldzhan, M.V., Two-step Computational Scheme for Modeling the Excitation of Elastic Waves by an Ultrasonic Piezoelectric Transducer. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 1, pp. 57–69. (in Russian)] DOI: [10.31429/vestnik-21-1-57-69](https://doi.org/10.31429/vestnik-21-1-57-69)
  17. Glushkov, E.V., Glushkova, N.V., Evdokimov, A.A., Hybrid Numerical-Analytical Scheme for Locally Inhomogeneous Elastic Waveguides. *Proceedings of 14th World Congress on Computational Mechanics (WCCM) ECCOMAS Congress 2020, Paris, France, 11–15 January 2021*, 2020, vol. 700, pp. 1–12. DOI: [10.23967/wccm-eccomas.2020.173](https://doi.org/10.23967/wccm-eccomas.2020.173)
  18. Зильбергейт, А.С., Нуллер, Б.М., Обобщённая ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости. *ДАН*, 1997, т. 234, № 2, с. 333–335. [Silbergleit, A. S., Noller, B. M., Generalized orthogonality of homogeneous solutions in dynamic problems of elasticity theory. *Doklady Akademii nauk = Report of the Academy of Sciences*, 1997, vol. 234, no. 2, pp. 333–335. (in Russian)]
  19. Бабешко, В.А., Глушков, Е.В., Зинченко, Ж.Ф., *Динамика неоднородных линейно-упругих сред*. Москва, Наука, 1989. [Babeshko, V.A., Glushkov, E.V., Zinchenko, Zh.F. *Dinamika neodnorodnykh linejno-uprugih sred = Dynamics of inhomogeneous linear-elastic media*. Moscow, Nauka, 1989. (in Russian)]
  20. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических тел*. Москва, Наука, 1979. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., *Dinamicheskie smeshannye zadachiteorii uprugosti dlya neklassicheskikh tel = Dynamic mixed problems of the theory of elasticity for non-classical bodies*. Moscow, Nauka, 1979. (in Russian)]
  21. Свешников, А.Г., Принцип предельного поглощения для волновода. *ДАН*, 1951, т. 80, № 3, с. 341–344. [Sveshnikov, A. G., The principle of limiting absorption for a waveguide. *Doklady Akademii nauk = Report of the Academy of Sciences*, 1951, vol. 80, no. 3, pp. 341–344. (in Russian)]
  22. Sheeraz, M.A., Butt, Z., Khan, A.M., Mehmood, S., Ali, A., Azeem, M., Nasir, A., Imtiaz, T., Design and optimization of piezoelectric transducer (PZT-5H stack) *Journal of Electronic Materials*, 2019, vol. 48, no. 10, pp. 6487–6502. DOI: [10.1007/s11664-019-07453-7](https://doi.org/10.1007/s11664-019-07453-7)
  23. Ng, C.T., Veidt, M., Scattering of the fundamental anti-symmetric Lamb wave at delaminations in composite laminates *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011, vol. 129, no. 3, pp. 1288–1296. DOI: [10.1121/1.3533741](https://doi.org/10.1121/1.3533741)