

УДК 531.39

EDN: XWUGIS DOI: 10.31429/vestnik-23-2-36-53

## Безоперационные методы нахождения симметрий и теоретико-экспериментальный метод для получения фундаментальных решений дифференциальных уравнений в частных производных для пластин. Часть IV

П. Г. Великанов  

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ,  
ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111, Россия

✉ Великанов Петр Геннадьевич; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: [pvelikanov@mail.ru](mailto:pvelikanov@mail.ru)

**Аннотация.** В настоящее время существует достаточно много численных методов, но, к сожалению, методу граничных элементов (МГЭ) и его модификациям уделяется непростительно мало внимания, хотя полученные с его помощью результаты характеризуются высокой степенью точности. В связи с этим представляется актуальным дальнейшее развитие МГЭ для решения задач, основанных на применении предварительно вычисленных точных фундаментальных решений. В данной статье (часть IV), являющейся логическим продолжением ранее опубликованных статей (части I–III), с помощью метода нахождения симметрий линейных неоднородных дифференциальных уравнений (а также с помощью операции свертки, используя фильтрующее свойство обобщенной  $\delta$ -функции Дирака), а также с помощью теоретико-экспериментального метода, удалось определить фундаментальное решение для изотропной пластины произвольной постоянной жесткости. Решение с помощью предложенных методов привело к идентичным ранее найденным фундаментальным решениям для той же задачи, полученным с помощью других методов (например, операционного метода — комплексного интегрального преобразования Фурье и др.), но метод нахождения симметрий, а особенно теоретико-экспериментальный метод, потребовали для достижения поставленной цели меньших усилий. Построение фундаментальных решений с помощью симметрий особенно эффективно как для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, так и для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Для последних, как известно, традиционный метод интегральных преобразований (операционное исчисление) неприменим. Показано, что метод нахождения симметрий позволил существенно упростить методику вычисления фундаментальных решений без необходимости предварительного глубокого изучения математической теории обобщенных функций и без привлечения аппарата операционного исчисления. Отмеченная теория и аппарат, к сожалению, до сих пор часто воспринимаются исследователями как трудные для понимания, что порой ограничивает область применения МГЭ. С помощью полученного фундаментального решения задачи изгиба изотропных пластин непрямым методом граничных элементов были решены тестовые задачи расчета, подтвердившие высокую точность полученных результатов.

**Ключевые слова:** групповой анализ, симметрии дифференциальных уравнений, теоретико-экспериментальный метод, фундаментальные решения, обобщенные функции, изотропные пластины.

**Финансирование.** Исследование не имело спонсорской поддержки.

**Цитирование:** Великанов П. Г. Безоперационные методы нахождения симметрий и теоретико-экспериментальный метод для получения фундаментальных решений дифференциальных уравнений в частных производных для пластин. Часть IV // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2026. Т. 23, № 2. С. 36–53. EDN: XWUGIS. DOI: 10.31429/vestnik-23-2-36-53

Поступила 15 февраля 2026 г. После доработки 15 мая 2026 г. Принято 2 июня 2026 г. Публикация 24 июня 2026 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2026. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## A Non-Operational Methods for Finding Symmetries and a Theoretical-experimental method to Obtain Fundamental Solutions of Partial Differential Equations for Plates. Part IV

P. G. Velikanov  

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, 10, K. Marx st., Kazan, 420111, Russia

✉ Peter G. Velikanov; ORCID 0000-0003-0845-2880; e-mail: [pvelikanov@mail.ru](mailto:pvelikanov@mail.ru)

**Abstract.** Currently, there are quite a lot of numerical methods, but, unfortunately, the boundary element method (BEM) and its modifications are given inexcusably little attention, although the results obtained by it are characterized by a high degree of accuracy. In this regard, it seems relevant to further develop the BEM to solve problems based on the application of precomputed exact fundamental solutions. In this article (part IV), which is a logical continuation of previously published articles (parts I–III), using the method of finding symmetries of linear inhomogeneous differential equations, as well as using the convolution operation, using the filtering property of the generalized Dirac  $\delta$ -function, it was possible to determine the fundamental solution for an isotropic plate of arbitrary constant stiffness. The solution using the proposed method led to identical fundamental solutions found earlier for the same problem, obtained using other methods (for example, the operational method — the complex integral Fourier transform, etc.), but the method of finding symmetries required less effort to achieve the goal. The construction of fundamental solutions using symmetries is particularly effective for both differential equations with constant coefficients and differential equations with variable coefficients. For the latter, as is well known, the traditional method of integral transformations (operational calculus) is not applicable. It is shown that the method of finding symmetries made it possible to significantly simplify the methodology for calculating fundamental solutions without the need for a preliminary in-depth study of the mathematical theory of generalized functions and without involving the apparatus of operational calculus. Unfortunately, the mentioned theory and apparatus are still often perceived by researchers as difficult to understand, which sometimes limits the scope of the BEM. Using the obtained fundamental solution to the problem of bending isotropic plates using the indirect boundary element method, test calculation problems were solved, confirming the high accuracy of the results obtained.

**Keywords:** group analysis, symmetries of differential equations, theoretical-experimental method, fundamental solutions, generalized functions, isotropic plates.

**Funding.** The study did not have sponsorship.

**Cite as:** Velikanov, P. G., A non-operational methods for finding symmetries and a theoretical-experimental method to obtain fundamental solutions of partial differential equations for plates. Part IV. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2026, vol. 23, no. 2, pp. 36–53. DOI: 10.31429/vestnik-23-2-36-53

Received 15 February 2026. Revised 15 May 2026. Accepted 2 June 2026. Published 24 June 2026.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2026. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CCBY\) license](#).

## Введение

Исследование групповых свойств дифференциальных уравнений связано с именем выдающегося математика Софуса Ли. Благодаря ему, была создана теория групп непрерывных преобразований, возникшая на стыке нескольких математических дисциплин — алгебры, дифференциальной геометрии и теории дифференциальных уравнений. Дальнейшее развитие теории групп непрерывных преобразований связано с работами создавшего всемирно известную научную школу академика Л.В. Овсянникова и его учеников.

Групповой анализ дифференциальных уравнений получил широкое распространение при исследовании уравнений, возникающих в различных областях механики, физики и др. По групповому анализу имеется обширная литература, как считающаяся классической — монографии Л.В. Овсянникова, Н.Г. Чеботарева, Л.П. Эйзенхарта, так и монографии более позднего и современного времен — Н.Х. Ибрагимова, П. Олвера, В.И. Фушича, В.М Штеленя, Н.И. Серова, В.К. Андреева, О.В. Капцова, В.В. Пухначева, А.А. Родионова, А.В. Аксенова и др. Допускаемая исходными уравнениями группа преобразований, используется для построения частных точных решений. Широко применяемые в механике сплошной среды решения, обычно находящиеся с использованием анализа размерностей (Л.И. Седов), являются инвариантными решениями относительно преобразований растяжения зависимых и независимых переменных. Более того, центральное утверждение анализа размерностей ( $\pi$ -теорема) также может быть доказано на основе использования групп непрерывных преобразований (Н.Г. Чеботарев).

Известно, что фундаментальные решения классических линейных дифференциальных уравнений механики, физики и др. обычно являются инвариантными решениями. В свою

очередь, фундаментальные решения требуют использования аппарата теории обобщенных функций, что потребовало обобщения теории локальных групп преобразований в пространстве обобщенных функций.

Широко известен, разработанный Саченковым А.В. теоретико-экспериментальный метод, суть которого состоит в следующем: на основе анализа уравнений, описывающих рассматриваемое явление, устанавливаются искомые структурные зависимости с точностью до констант или функций, которые характеризуют особенности поведения конструкции, при этом для определения констант или функций проводится эксперимент, заменяющий собой громоздкую и сложную процедуру теоретического решения. Являясь теоретико-экспериментальным методом, этот метод позволяет с приемлемой количественной точностью решать многие сложные задачи, например, теории пластин и оболочек, иногда не поддающиеся решению другими известными методами. В предложенной же статье данный метод используется для получения фундаментального решения задачи изгиба изотропной пластины.

Классическими работами, где дается подробное описание понятий о ФР, являются работы Соболева С.А., Шварца Л., Гельфанда И.М. и Шилова Г.Е., Владимирова В.С. и Жаринова В.В., Шевченко В.П. [1–4] и др. о математической теории обобщенных функций.

В данной статье (часть IV), являющейся логическим продолжением ранее опубликованных статей (части I–III) [5–7], с помощью метода нахождения симметрий линейных неоднородных дифференциальных уравнений, а также с помощью операции свертки, используя фильтрующее свойство обобщенной  $\delta$ -функции Дирака, удалось определить фундаментальное решение для изотропной пластины произвольной постоянной жесткости. Решение с помощью предложенных методов привело к идентичным ранее найденным фундаментальным решениям для той же задачи, полученным с помощью других методов (например, операционного метода — комплексного интегрального преобразования Фурье и др. [8–29]), но метод нахождения симметрий, а особенно теоретико-экспериментальный метод, потребовали для достижения поставленной цели меньших усилий.

В работе [30] был предложен метод нахождения симметрий линейных неоднородных дифференциальных уравнений с  $\delta$ -функцией в правой части, приведен алгоритм построения инвариантных фундаментальных решений. Отметим, что в этой работе для нахождения симметрий уравнений с  $\delta$ -функцией в правой части использовались конечные преобразования.

## 1. Нахождение ФР линейных дифференциальных уравнений в частных производных с $\delta$ -функцией Дирака в правой части

Пусть дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных  $p$ -го порядка:

$$L_0 w \equiv \sum_{|\alpha|=0}^p A_\alpha(x) D^\alpha w = f(x), \quad x \in R^m. \quad (1.1)$$

Здесь приняты стандартные обозначения:  $L_0$  — исходный линейный дифференциальный оператор в частных производных;  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  — мультииндекс с целочисленными неотрицательными компонентами,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m, \quad D^\alpha \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)^{\alpha_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x^m} \right)^{\alpha_m}.$$

ФР  $G(x - \xi, y - \eta)$  дифференциального уравнения (1.1), например, для задач изгиба пластин определяется из выражения вида [1–26]:

$$L_0 G(x - \xi, y - \eta) = \delta(x - \xi, y - \eta), \quad (1.2)$$

где  $\delta(x - \xi, y - \eta)$  — двумерная обобщенная  $\delta$ -функция Дирака.

Как показано в [3], для уравнений с постоянными коэффициентами ФР всегда существуют. Более того, ФР не единственны, они определяются с точностью до слагаемого (решения), являющегося произвольным решением однородного уравнения  $L_0 G(x - \xi, y - \eta) = 0$  и, кроме того,

являются обобщенными функциями. Из (1.2) видно, что ФР  $G(x - \xi, y - \eta)$  зависит только от свойств дифференциального оператора  $L_0$ . Без ограничения общности далее будем считать, что  $\xi = \eta = 0$ , то есть далее будем считать, что сосредоточенная нагрузка, моделируемая двумерной обобщенной  $\delta$ -функцией Дирака, приложена в начале системы координат.

Для проверки правильности найденного ФР дифференциального уравнения используют две методики: или с помощью формулы дифференцирования обобщенных функций [8]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_G + (-1)^{i-1} \sigma(x_1, \dots, x_n) \int_{\Gamma} \varphi dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n,$$

где  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_G$  — обычная производная от функции  $\varphi$ ,  $\Gamma$  — граница области  $G$  (один из контуров, внутри которого находится особенность), или с помощью проверки равновесия пластины, ограниченной кривой, при действии на нее единичной нагрузки [8, 16]. В конечном итоге обе этих методики эквивалентны и приводят к идентичным результатам.

Известно, что сами по себе методики получения ФР, например, с помощью алгоритмов интегрального преобразования Фурье и др., с помощью метода последовательного (перестановочного) интегрирования и многих других [1–26] зачастую сложны, поэтому там, где это возможно, была поставлена задача свести поиск ФР ни к операции интегрирования, как было неоднократно проделано ранее другими методами [1–26], а к методу нахождения симметрий линейных неоднородных дифференциальных уравнений с  $\delta$ -функцией в правой части и к теоретико-экспериментальному методу.

Чтобы оценить сложность получения ФР, например, с помощью алгоритмов интегрального преобразования Фурье перечислю его основные этапы: применение к каждому из уравнений систем двумерного интегрального преобразования Фурье; получение трансформант из систем алгебраических уравнений, например, с помощью метода Крамера и др. точным (прямым) методом; использование формулы обращения двумерного интегрального преобразования Фурье; в зависимости от полюсов подынтегральной функции и их кратности могут быть применены соответствующие формулы из теории вычетов для введенной в рассмотрение обобщенной функции  $\theta(\eta)$  и правил ее дифференцирования с последующим приведением интегралов к табличному виду, если такие вообще существуют. Понятно, что вышеописанная классическая методика, использующая операционное исчисление, порой кажется излишне сложной и громоздкой.

## 2. Определение ФР с помощью нахождения их симметрий

В [31] показано, что однородное уравнение (1.1) может допускать операторы симметрии только следующего вида:

$$X = \sum_{i=1}^m \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}; \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} = 0.$$

Алгебра Ли операторов симметрии уравнения (1.1) как векторное пространство представимо в виде суммы двух подалгебр: подалгебры, состоящей из операторов вида

$$X = \sum_{i=1}^m \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \zeta(x) u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (2.1)$$

и бесконечномерной подалгебры, порожденной операторами

$$X = \varphi(x) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (2.2)$$

где  $\varphi(x)$  — произвольное решение уравнения (1.1). Отметим, что операторы (2.2) являются операторами симметрии уравнения (1.2).

Симметриями уравнения (1.2) будем называть преобразования, которые переводят любое решение уравнения (1.2) в его решение. При этом предполагается, что  $x = x_0$  является неподвижной точкой.

Симметрии позволяют оставить инвариантным вид уравнения (1.2). Обозначим через  $X_p$  продолжение порядка  $p$  оператора (2.1).

Чтобы оператор вида (2.1) являлся оператором симметрии уравнения (1.1), необходимо и достаточно, чтобы существовала функция  $\lambda = \lambda(x)$ , удовлетворяющая тождеству

$$X_p(Lu) \equiv \lambda(x) Lu \quad (2.3)$$

для любой функции  $u = u(x)$  из области определения уравнения (1.1).

В [30] утверждается, что алгебра Ли операторов симметрии уравнения (1.2) является подалгеброй алгебры Ли операторов симметрии уравнения (1.1), выделяемой соотношениями

$$\xi^i(x_0) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.4)$$

$$\lambda(x_0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \xi^i(x_0)}{\partial x_0^i} = 0. \quad (2.5)$$

Симметриями фундаментальных решений (или симметриями уравнения (1.2)) будем называть симметрии уравнения (1.1), удовлетворяющие соотношениям (2.4), (2.5).

**Пример.** Рассмотрим двумерное бигармоническое дифференциальное уравнение

$$\Delta \Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0. \quad (2.6)$$

Фундаментальные решения двумерного бигармонического уравнения удовлетворяют уравнению (фактически это дифференциальное уравнение, из которого можно найти ФР  $u$  задачи изгиба изотропной пластины единичной жесткости (далее будет рассмотрен общий случай и будет найдено ФР  $G$  для произвольной постоянной жесткости))

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \delta(x, y). \quad (2.7)$$

Конечномерная часть базиса алгебры Ли операторов симметрии уравнения (2.6) представима в виде

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}; \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}; \quad X_4 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_5 &= (x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y} + 2xu \frac{\partial}{\partial u}; \quad X_6 = 2xy \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2) \frac{\partial}{\partial y} + 2yu \frac{\partial}{\partial u}; \quad X_7 = u \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

Теперь можно найти операторы симметрии для уравнения (2.7), для чего запишем общий вид оператора симметрии для уравнения (2.6),

$$X = \sum a_i X_i, \quad i = \overline{1, 7}$$

или

$$\begin{aligned} X &= (a_1 + a_3x + a_4y + a_5(x^2 - y^2) + 2a_6xy) \frac{\partial}{\partial x} + (a_2 + a_3y - a_4x + 2a_5xy + a_6(y^2 - x^2)) \frac{\partial}{\partial y} + \\ &\quad + (2a_5x + 2a_6y + a_7) u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (2.8) \end{aligned}$$

где  $a_i$  ( $i = \overline{1, 7}$ ) — произвольные постоянные. Оператору симметрии (2.8) соответствует функция  $\lambda(x, y)$

$$\lambda = a_7 - 4a_3 - 6a_5x - 6a_6y.$$

Тогда с помощью ранее приведенного утверждения из [29] находим

$$a_1 = a_2 = 0; \quad a_7 - 2a_3 = 0.$$

Уравнение (2.7) допускает алгебру Ли операторов симметрии с базисом в конечномерной части:

$$\begin{aligned} Y_1 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2u \frac{\partial}{\partial u}; \\ Y_2 &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}; \\ Y_3 &= (x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y} + 2xu \frac{\partial}{\partial u}; \\ Y_4 &= 2xy \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2) \frac{\partial}{\partial y} + 2yu \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

В результате фундаментальное решение бигармонического уравнения (2.7) примет вид

$$u(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)}{16\pi} \ln(x^2 + y^2). \quad (2.9)$$

Фактически для бигармонического дифференциального уравнения (2.7) с правой частью в виде обобщенной  $\delta$ -функции Дирака с помощью вышеописанной методики было найдено ФР  $u$  (2.9) задачи изгиба изотропной пластины единичной жесткости. Далее необходимо обобщить приведенный результат на общий случай — найти ФР  $\mathbf{G}$  для произвольной постоянной жесткости.

Пусть дана система  $N$  линейных дифференциальных уравнений в частных производных (или одно линейное дифференциальное уравнение в частных производных)

$$L_0 \mathbf{U}(x, y) = \mathbf{F}(x, y), \quad (2.10)$$

где  $L_0 = [L_{lm}(\partial/\partial x, \partial/\partial y)]$  — исходный линейный дифференциальный оператор в частных производных,  $l, m = \overline{1, N}$ ;  $\mathbf{U}(x, y) = [u_l(x, y)]^T$  — векторная функция, подлежащая определению;  $\mathbf{F}(x, y) = [f_l(x, y)]^T$  — заданная векторная функция правых частей;  $l, m = \overline{1, N}$ .

Решение системы (1.1)  $\mathbf{U}(x, y)$  представимо в виде свертки

$$\mathbf{U}(x, y) = L_0^{-1} \mathbf{F}(x, y) = \mathbf{G} * \mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{G}(x - \xi, y - \eta) \mathbf{F}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad \xi, \eta \in \Omega,$$

где  $L_0^{-1}$  — интегральный оператор, ядром которого является матрица фундаментального решения (ФР)  $G(x - \xi, y - \eta)$  системы линейных дифференциальных уравнений;  $\Omega$  — область определения дифференциального оператора  $L_0$ .

Таким образом, чтобы найти ФР линейного дифференциального уравнения в частных производных (для произвольной постоянной жесткости изотропной пластины) вида

$$\frac{\partial^4 G}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 G}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 G}{\partial y^4} = \frac{\delta(x, y)}{D} \quad (2.11)$$

необходимо вычислить свертку, используя фильтрующее свойство обобщенной двумерной  $\delta$ -функции Дирака

$$\begin{aligned} G(x, y) &= L_0^{-1} \frac{\delta(x, y)}{D} = \frac{1}{D} L_0^{-1} \delta(x, y) = u * \frac{\delta(x, y)}{D} = \frac{1}{D} u * \delta(x, y) = \\ &= \int_{\Omega} u(x - \xi, y - \eta) \frac{\delta(\xi, \eta)}{D} d\xi d\eta = \int_{\Omega} u(x - \xi, y - \eta) \frac{\delta(\xi, \eta)}{D} d\xi d\eta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{D} \int_{\Omega} u(x - \xi, y - \eta) \delta(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\
 &= \frac{1}{D} \int_{\Omega} \frac{\left((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\right)}{16\pi} \ln \left((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\right) \delta(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\
 &= \frac{(x^2 + y^2)}{16\pi D} \ln(x^2 + y^2) = \frac{r^2}{8\pi D} \ln(r). \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Полученный результат для ФР линейного дифференциального уравнения в частных производных (для изотропной пластины произвольной постоянной жесткости) идентичен ранее найденным ФР для той же задачи, полученным с помощью других методов (например, операционного метода — комплексного интегрального преобразования Фурье и др.).

### 3. Определение ФР с помощью теоретико-экспериментального метода

Рассмотрим методику получения фундаментального решения с помощью теоретико-экспериментального метода (ТЭМ) для дифференциального уравнения слабого изгиба тонкой изотропной линейно-упругой пластины, которая имеет вид

$$L_0 w \equiv D \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = p_z(x, y).$$

Здесь

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

— гармонический дифференциальный оператор Лапласа;

$$\nabla^2 \nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

— бигармонический дифференциальный оператор;  $w$  — прогиб точки срединной поверхности пластины;  $p_z$  — интенсивность нормального давления, действующего на пластину;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  — изгибная (цилиндрическая) жесткость пластины;  $\nu$  — коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации);  $h$  — толщина пластины.

Уравнение слабого изгиба изотропной пластины можно привести к виду

$$L_0 w \equiv D \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = p_z(x, y) \Rightarrow \nabla^2 \nabla^2 \bar{w}(x, y) = q^*(x, y), \quad (3.1)$$

где

$$q^*(x, y) = \frac{p_z(x, y) \sqrt{12(1-\nu^2)}}{Dh}, \quad \bar{w}(x, y) = \frac{w(x, y) \sqrt{12(1-\nu^2)}}{h}.$$

Для решения задачи об изгибе изотропных неограниченных пластин (подверженных также действию единичной сосредоточенной нагрузки — а это и есть задача по поиску фундаментального решения) имеет смысл рассматривать изгиб круговой изотропной пластины в полярных координатах, связанных с декартовыми соотношениями:

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta.$$

Преобразуем уравнение (3.1) с помощью подстановок

$$\rho = ra; \quad \bar{w} = \bar{w}_0 q^* a^4, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

где  $a$  — радиус пластины.

В результате получим следующее преобразованное уравнение:

$$\nabla_1^2 \nabla_1^2 \bar{w}_0(r, \theta) = 1, \quad (3.2)$$

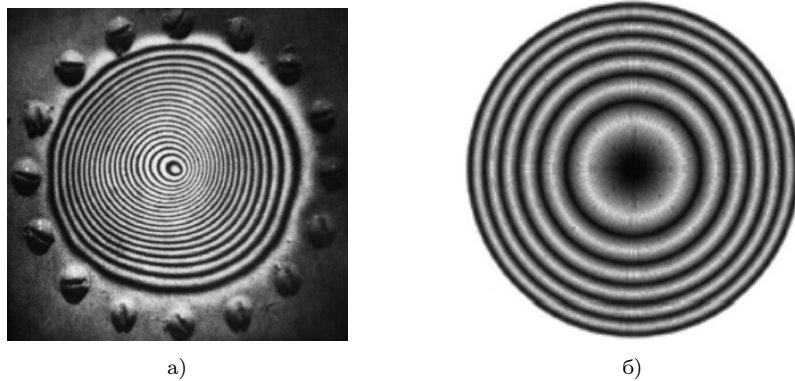


Рис. 1. а) Голографическая интерферограмма деформации пластины под действием сосредоточенной силы; б) Деформации пластины под действием сосредоточенной силы с помощью численного эксперимента в конечно-элементном пакете Nastran

*Fig. 1. a) Holographic interferogram of plate deformation under the action of a concentrated force; б) Plate deformation under the action of a concentrated force using a numerical experiment in the Nastran finite element package*

где

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Для круговых изотропных пластин под действием несимметричной нагрузки решение уравнения (3.2) будет иметь вид

$$\bar{w}_0(r, \theta) = \psi(r, \theta),$$

а для симметричной нагрузки  $\bar{w}_0(r) = \psi(r)$ .

Для нахождения функции  $\psi$  строится график ее зависимости по экспериментальным данным. Чтобы построить график достаточно провести надежный эксперимент с одним образцом.

Аналогичным образом можно было бы рассмотреть вопрос о действии сосредоточенной нагрузки в центре или в любом другом месте пластины. В этом случае все приведенные выше рассуждения остаются в силе лишь множитель  $q^*a^4$  заменяется на  $(q^*/p_z)a^2P$ , где  $P$  — сосредоточенная нагрузка, которая затем моделируется обобщенной  $\delta$ -функцией Дирака.

В результате проведенных с помощью ТЭМ действий фундаментальное решение  $G$  ищется в виде

$$w(r) = G(r) = A\psi(r) = Ar^2 \ln r.$$

Далее коэффициент  $A$  определяется из эксперимента, например, по известному прогибу в центре пластины или из численного эксперимента с помощью широко распространенных программных продуктов или справочников (рис. 1).

По найденной константе  $A$  (в сравнении с точным значением  $A = 1/(2\pi D)$ ) далее можем оценить точность экспериментально или численно полученных дискретных значений для определения ФР. Если же найденную константу  $A$  сравнить не с чем, то с помощью ранее приведенной формулы дифференцирования обобщенных функций можно найти ее точное значение  $A$  и, таким образом, получить окончательное представление для ФР.

#### 4. Непрямой метод граничных элементов (метод компенсирующих нагрузок) при изгибе пластин

Рассмотрим тонкую линейно-упругую пластину, срединная поверхность которой занимает область  $\Omega^+$ , ограниченную гладким кусочно-ляпуновским контуром  $\Gamma$  (рис. 2). Дополним область  $\Omega^+$  областью  $\Omega^-$  до бесконечной области. По контуру  $\Gamma$  к бесконечной пластине приложим компенсирующие нагрузки  $q(\zeta)$ ,  $m(\zeta)$ . Нагрузки  $q(\zeta)$  и  $m(\zeta)$  — распределенные

по контуру  $\Gamma$  усилие, нормальное к поверхности пластины, и момент вокруг касательной к контуру  $\Gamma$  соответственно.

Решение задачи изгиба многосвязной пластины рассматривается как сумма основного (частного) и компенсирующего решений [16]

$$w(t) = w^r(t) + \sum_{i=1}^M \left[ \int_{\Gamma_i} G(t, \zeta) q^i(\zeta) - \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n_1} m^i(\zeta) ds(\zeta) \right], \quad (4.1)$$

где

$$w^r(t) = \int_{\Omega^+} G(t, \zeta) p_z(\zeta) d\Omega(\zeta) + \sum_{i=1}^n G(t, \zeta_i) P_i(\zeta_i).$$

Здесь  $t(x, y)$  — точка внутренней области  $\Omega^+$ ;  $\zeta(\xi, \eta)$  — точка контура  $\Gamma$ ;  $G(t, \zeta)$  — фундаментальные решения задачи изгиба изотропной пластины;  $p_z(\zeta)$  — интенсивность нормального давления, действующего на пластину;  $P_i$  — модуль сосредоточенной силы, приложенной в точке  $\zeta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Основное решение определяет деформацию бесконечной пластины от заданных нагрузок; компенсирующее решение определяет действие на бесконечную пластину системы сил, распределенных по контуру (компенсирующих нагрузок), за счет действия которых выполняются краевые условия на контуре пластины. Сумма основного и компенсирующего решения должна удовлетворять дифференциальному уравнению изгиба изотропной пластины.

На контуре пластины рассмотрим следующие граничные условия:

$$w = 0, \quad w_{,n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{— жесткая заделка,} \quad (4.2)$$

$$w = 0, \quad M_n = 0 \quad \text{— шарнирное опирание,} \quad (4.3)$$

$$V_n = k_1 w, \quad M_n = k_2 w_{,n} \quad \text{— упругое закрепление.} \quad (4.4)$$

Здесь  $M_n$ ,  $V_n$  — изгибающий момент и обобщенная поперечная сила на контуре  $\Gamma$ ;  $k_1$ ,  $k_2$  — постоянные, определяющие упругие свойства закрепления (при  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$  получим граничные условия свободного края).

Усилия и моменты на контуре пластины в глобальной декартовой системе координат  $X$ ,  $Y$  определяются по формулам [16]

$$M_n = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + M_{xy} \sin 2\alpha; \quad M_\tau = M_x \sin^2 \alpha + M_y \cos^2 \alpha - M_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$M_{n\tau} = -\frac{M_x - M_y}{2} \sin 2\alpha + M_{xy} \cos 2\alpha; \quad Q_n = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha; \quad V_n = Q_n + \frac{\partial M_{n\tau}}{\partial s},$$

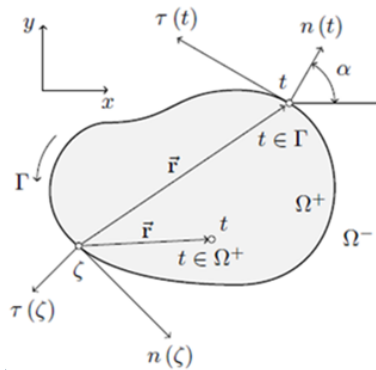


Рис. 2. Тонкая линейно-упругая пластина

Fig. 2. Thin linear elastic plate

где для задачи изгиба изотропной пластины соотношения примут вид

$$\begin{aligned} M_x &= -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}); \quad M_y = -D(w_{,yy} + \nu w_{,xx}); \quad M_{xy} = -D(1 - \nu)w_{,xy}; \\ Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w = -D(w_{,xxx} + w_{,xyy}); \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w = -D(w_{,yyy} + w_{,xxy}). \end{aligned}$$

Для изотропной пластины моменты и усилия на контуре пластины можно также определить в локальной системе координат  $\mathbf{n}, \tau$ , построенной в точке  $t(x, y)$  контура, где записываются граничные условия. При этом ось  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к контуру в этой точке; а ось  $\tau$  — касательная к контуру в этой точке.

Усилия и моменты в локальной системе координат для задачи изгиба изотропной пластины определяются по формулам

$$\begin{aligned} M_n &= -D(\Delta w - (1 - \nu)w_{,\tau\tau}); \quad M_\tau = -D(\Delta w - (1 - \nu)w_{,nn}); \\ M_{n\tau} &= -D(1 - \nu)w_{,n\tau}; \quad Q_n = -D\Delta w_{,n}; \quad V_n = Q_n + \frac{\partial M_{n\tau}}{\partial s}, \end{aligned}$$

где  $\Delta = \partial^2/\partial n^2 + \partial^2/\partial \tau^2$  — оператор Лапласа в локальной системе координат.

При определении производной по дуговой координате контура  $\partial M_{n\tau}/\partial s$  следует учитывать, что  $\alpha = \alpha(s)$ ;  $\kappa = \partial\alpha/\partial s = \pm 1/\rho'$  — кривизна контура в рассматриваемой точке (алгебраическая величина),  $\rho'$  — радиус кривизны контура в данной точке. В результате выражение для обобщенной поперечной силы запишем в виде

$$\begin{aligned} V_n &= -D \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \Delta w + (1 - \nu) \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial \tau^2} - \kappa [2w_{,xy} \sin 2\alpha + (w_{,xx} - w_{,yy}) \cos 2\alpha] \right] \right\} = \\ &= -D \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \Delta w + (1 - \nu) \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial \tau^2} - \kappa \left( \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Компенсирющие нагрузки определяются из граничных условий (4.2)–(4.4) на контуре пластины, которые записываются на контуре  $\Gamma$  для области  $\Omega^+$ .

Известно, что выражение (4.1) в точности удовлетворяет дифференциальным уравнениям задачи изгиба изотропной пластины. Чтобы (4.1) было решением краевой задачи, необходимо из системы сингулярных интегральных уравнений, которая получается при подстановке (4.1) в краевые условия (4.2)–(4.4) на контуре пластины, определить компенсирующие нагрузки  $q(\zeta)$ ,  $m(\zeta)$ . При этом нужно совершить предельный переход точки  $t(x, y)$  из внутренней области  $\Omega^+$  на границу  $\Gamma$ . Тогда ядра интегральных уравнений будут определены во всех точках контура, за исключением точки, где  $t(x, y) = \zeta(\xi, \eta)$ . В этой точке ядра потенциалов будут иметь особенности.

В области  $\Omega^+$  изгибающие и крутящий моменты, а также поперечные силы для изотропной пластины, лежащей на упругом основании, по известным компенсирующим нагрузкам  $q(\zeta)$ ,  $m(\zeta)$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} M_x(t) &= -D \int_{\Gamma} \left[ \left( \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) q(\zeta) - \left( \frac{\partial^3 G}{\partial x^2 \partial n_1} + \nu \frac{\partial^3 G}{\partial y^2 \partial n_1} \right) m(\zeta) \right] ds(\zeta) + M_x^r(t); \\ M_y(t) &= -D \int_{\Gamma} \left[ \left( \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) q(\zeta) - \left( \frac{\partial^3 G}{\partial y^2 \partial n_1} + \nu \frac{\partial^3 G}{\partial x^2 \partial n_1} \right) m(\zeta) \right] ds(\zeta) + M_y^r(t); \\ M_{xy}(t) &= -D(1 - \nu) \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} q(\zeta) - \frac{\partial^3 G}{\partial x \partial y \partial n_1} m(\zeta) \right] ds(\zeta) + M_{xy}^r(t); \\ Q_x(t) &= -D \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial \Delta G}{\partial x} q(\zeta) - \frac{\partial^2 \Delta G}{\partial x \partial n_1} m(\zeta) \right] ds(\zeta) + Q_x^r(t); \end{aligned}$$

$$Q_y(t) = -D \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial \Delta G}{\partial y} q(\zeta) - \frac{\partial^2 \Delta G}{\partial y \partial n_1} m(\zeta) \right] ds(\zeta) + Q_y^r(t),$$

где

$$\begin{aligned} M_x^r(t) &= -D \left( \frac{\partial^2 w^r(t)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w^r(t)}{\partial y^2} \right); \quad M_y^r(t) = -D \left( \frac{\partial^2 w^r(t)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w^r(t)}{\partial x^2} \right); \\ M_{xy}^r(t) &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w^r(t)}{\partial x \partial y}; \\ Q_x^r(t) &= -D_0 \left( \frac{\partial^3 w^r(t)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w^r(t)}{\partial x \partial y^2} \right); \quad Q_y^r(t) = -D_0 \left( \frac{\partial^3 w^r(t)}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w^r(t)}{\partial y^3} \right). \end{aligned}$$

## 5. Определение ядер потенциалов, входящих в интегральные уравнения изгиба изотропных пластин, и интегральные уравнения изгиба изотропной пластины

Для формирования разрешающей системы интегральных уравнений метода компенсирующих нагрузок и при определении перемещений и напряжений в пластине необходимы аналитические выражения ядер потенциалов, которые получаются при подстановке (4.1) в краевые условия (4.2)–(4.4).

С учетом предельных значений потенциалов по методике [16], а также результатов дифференцирования фундаментального решения задачи изгиба пластины запишем сингулярные интегральные уравнения, из решения которых определяются компенсирующие нагрузки  $q(\zeta)$ ,  $m(\zeta)$  для различных граничных условий. При этом предельные значения потенциалов берутся в области  $\Omega^+$ .

1) Жесткая заделка

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} G(t, \zeta) q(\zeta) ds(\zeta) - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n_1} m(\zeta) ds(\zeta) + w^r(t) &= 0, \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n} q(\zeta) ds(\zeta) - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial n \partial n_1} m(\zeta) ds(\zeta) + \frac{\partial w^r(t)}{\partial n} &= 0, \end{aligned}$$

2) Шарнирное закрепление

$$\int_{\Gamma} G(t, \zeta) q(\zeta) ds(\zeta) - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n_1} m(\zeta) ds(\zeta) + w^r(t) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m(t) - D_0 \int_{\Gamma} \left[ \Delta G(t, \zeta) - (1-\nu) \frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2} \right] q(\zeta) ds(\zeta) + \\ + D_0 \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial \Delta G(t, \zeta)}{\partial n_1} - (1-\nu) \frac{\partial^3 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2 \partial n_1} \right] m(\zeta) ds(\zeta) + M_n^r(t) &= 0, \end{aligned}$$

3) Свободный край

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m(t) - D_0 \int_{\Gamma} \left[ \Delta G(t, \zeta) - (1-\nu) \frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2} \right] q(\zeta) ds(\zeta) + \\ + D_0 \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial \Delta G(t, \zeta)}{\partial n_1} - (1-\nu) \frac{\partial^3 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2 \partial n_1} \right] m(\zeta) ds(\zeta) + M_n^r(t) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}q(t) - D_0 \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial \Delta G(t, \zeta)}{\partial n} + (1 - \nu) \left[ \frac{\partial^3 G(t, \zeta)}{\partial n \partial \tau^2} - \kappa(t) \left( \frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2} \right) \right] \right] q(\zeta) ds(\zeta) + \\ & + D_0 \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial^2 \Delta G(t, \zeta)}{\partial n \partial n_1} + (1 - \nu) \left[ \frac{\partial^4 G(t, \zeta)}{\partial n \partial \tau^2 \partial n_1} - \kappa(t) \left( \frac{\partial^3 G(t, \zeta)}{\partial n^2 \partial n_1} - \frac{\partial^3 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2 \partial n_1} \right) \right] \right] m(\zeta) ds(\zeta) + \\ & + V_n^r(t) = 0, \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} M_n^r(t) &= -D_0 [w_{,nn}^r(t) + \nu w_{,\tau\tau}^r(t)]; \\ V_n^r(t) &= -D_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \Delta w^r(t) + (1 - \nu) \left[ \frac{\partial^3 w^r(t)}{\partial n \partial \tau^2} - \kappa(t) \left( \frac{\partial^2 w^r(t)}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 w^r(t)}{\partial \tau^2} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

Функции плотностей  $q(\zeta)$  и  $m(\zeta)$  удовлетворяют условию Гельдера

$$|q(t) - q(\zeta)| \leq C |t - \zeta|^\alpha;$$

$$|m(t) - m(\zeta)| \leq C |t - \zeta|^\alpha,$$

где  $C = \text{const} > 0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ .

Внеинтегральные члены  $q(t)/2$ ,  $m(t)/2$  в интегральных уравнениях получаются на основе анализа предельных значений потенциалов [16].

## 6. Численная реализация

Для формирования и численного решения системы сингулярных интегральных уравнений контур  $\Gamma$ , ограничивающий область  $\Omega^+$ , занимаемую пластиной, разбивается на граничные элементы, которые являются отрезками прямых линий или дугами окружностей или эллипсов, т.е. контур  $\Gamma$  аппроксимируется контуром  $\Gamma^N = \sum_{j=1}^N \Gamma_j$  и  $\Gamma^N \rightarrow \Gamma$  при  $N \rightarrow \infty$  или  $\max_j |\Gamma_j| \rightarrow 0$ ,

где  $N$  — количество элементов контура  $\Gamma^N$ . В пределах элемента компенсирующие нагрузки  $q(\zeta)$ ,  $m(\zeta)$  считаются постоянными. Точки коллокации берутся в узлах, которые располагаются в серединах элементов  $\Gamma_j$ .

Для решения систем сингулярных интегральных уравнений применяется метод механических квадратур [10]. При удовлетворении граничным условиям в узлах, после вычисления интегралов, решение задачи сводится к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N q(\zeta_j) G_{ij} - \sum_{j=1}^N m(\zeta_j) H_{ij} + A_i &= 0, \quad i = \overline{1, N}, \\ \sum_{j=1}^N q(\zeta_j) R_{ij} - \sum_{j=1}^N m(\zeta_j) M_{ij} + B_i &= 0, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

где коэффициенты  $G_{ij}$ ,  $H_{ij}$ ,  $R_{ij}$ ,  $M_{ij}$  в зависимости от вида граничных условий принимают соответствующие выражения и представляют собой интегралы по элементу  $\Gamma_j$ ;  $A_i$ ,  $B_i$  — правые части системы уравнений, принимающие соответствующие выражения в зависимости от граничных условий;  $q(\zeta_j) = q_j$ ,  $m(\zeta_j) = m_j$  — искомые значения компенсирующих нагрузок, принимающие постоянные значения в пределах каждого элемента  $\Gamma_j$ . Система состоит из  $2N$  уравнений с  $2N$  неизвестными, т.е. является замкнутой и имеет единственное решение.

Интегралы  $G_{ij}$ ,  $H_{ij}$ ,  $R_{ij}$ ,  $M_{ij}$  при  $i \neq j$  не имеют особенностей и вычисляются по восьми-узловой квадратурной формуле Гаусса. При  $i = j$  ядра интегралов имеют особенности типа  $\ln r$ ,  $1/r$ ,  $1/r^2$  при  $r \rightarrow 0$  и, кроме того, необходимо учесть внеинтегральные члены уравнений. Такие сингулярные интегралы по  $\Gamma_j$  вычисляются аналитически.

## 7. Вычисление сингулярных интегралов по элементам контура

Рассмотрим для примера аналитическое вычисление интегралов от фундаментального решения и его производных по прямолинейным элементам контура, где подынтегральные функции могут иметь особенности при  $x \rightarrow \xi$ ,  $y \rightarrow \eta$ . Считаем, что компенсирующие нагрузки в пределах этих элементов постоянны, поэтому они входят в интегральные уравнения в виде множителей перед интегралами от фундаментального решения и его производных.

Пусть  $\Gamma_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) — один из элементов контура  $\Gamma$ , представляющий собой отрезок прямой (рис. 3), соединяющей точки  $(x_A, y_A)$  и  $(x_B, y_B)$ , а  $t(x, y)$  — середина отрезка  $\Gamma_j$ :  $x = (x_A + x_B)/2$ ;  $y = (y_A + y_B)/2$ .

Введем координату  $t_0$ , определяющую положение точки  $\zeta(\xi, \eta)$  на  $\Gamma_j$ :

$$\xi = \frac{(x_A + x_B)}{2} + \frac{(x_B - x_A)}{2}t_0; \quad \eta = \frac{(y_A + y_B)}{2} + \frac{(y_B - y_A)}{2}t_0,$$

где  $t_0 \in [-1; +1]$ .

Расстояние между точками  $t$  и  $\zeta$  равно

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = \frac{|t_0|}{2} \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \frac{|t_0|}{2} \delta,$$

где  $\delta$  — длина отрезка  $\Gamma_j$ .

Фундаментальное решение и его производные зависят от аргументов  $x - \xi$ ,  $y - \eta$ , которые определяются выражениями

$$x - \xi = -\frac{(x_B - x_A)}{2}t_0; \quad y - \eta = -\frac{(y_B - y_A)}{2}t_0.$$

Выразим элемент длины  $ds$  через координату  $t_0$

$$ds = \sqrt{(\xi'_{t_0})^2 + (\eta'_{t_0})^2} dt_0 = \sqrt{\left(\frac{(x_B - x_A)}{2}\right)^2 + \left(\frac{(y_B - y_A)}{2}\right)^2} dt_0 = \frac{\delta}{2} dt_0.$$

Таким образом все подынтегральные выражения от фундаментального решения и его производных зависят лишь от  $t_0$  и сингулярные интегралы от них могут быть легко вычислены.

## 8. Результаты решения некоторых задач

### 8.1. Пример 1

На рис. 4 показана жестко закрепленная по контуру эллиптическая изотропная пластина с коэффициентом  $\beta = a/b = 2$ . На пластину действует постоянная равномерно распределенная поперечная нагрузка  $p_z = 1$  (МПа). Физические параметры:  $h = 0,01$  (м),  $E = 2 \cdot 10^5$  (МПа),  $\nu = 0,3$ . При численном решении контур разбивался на 40 элементов, а частное решение принято в виде  $w^r(t) = \frac{p_z(x^4 + y^4)}{48D}$ . На рис. 5 приведены результаты решения поставленной

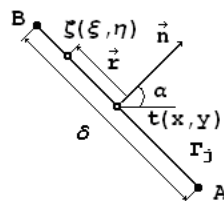


Рис. 3. Прямолинейный граничный элемент

Fig. 3. Rectilinear boundary element

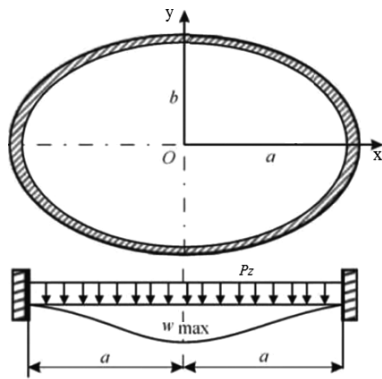


Рис. 4. Эллиптическая пластина для расчета

Fig. 4. Elliptical plate for calculation

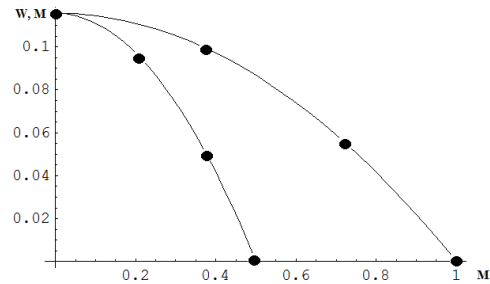


Рис. 5. Распределения прогибов  $w$  по осям координат пластины

Fig. 5. Distributions of deflections  $w$  along the coordinate axes of the plate

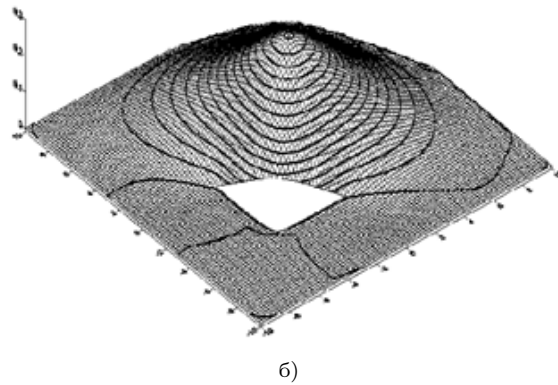
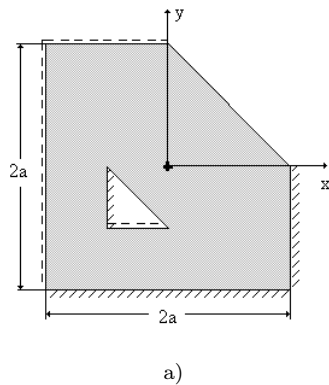


Рис. 6. Двусвязная пластина сложной формы под действием термомеханического нагружения: а) расчетная область; б) поверхность распределения прогиба  $w$  с линиями уровня

Fig. 6. A doubly connected plate of complex shape under thermomechanical loading: а) computational domain; б) deflection distribution surface  $w$  with level lines

задачи — графики распределения прогибов  $w$  по осям координат пластины. Точки соответствуют численному решению НМГЭ, а непрерывные линии — точному решению задачи, которое ищется в виде

$$w(x, y) = w_0 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

где

$$w_0 = \frac{p_z}{8D \left( \frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} \right)}.$$

Как видно, в пределах точности графиков результаты решений совпадают.

## 8.2. Пример 2

Двусвязная пластина сложной формы с различными граничными условиями на отдельных участках находится под действием термомеханического нагружения (сосредоточенной силы  $P$ , приложенной начале координат и линейного по толщине температурного поля) (рис. 6а). Параметры пластины и поля следующие:  $h = 0,01$  (м),  $a = 0,1$  (м),  $E = 2 \cdot 10^5$  (МПа),  $\nu = 0,3$ ,  $P = 5000$  (Н),  $\Delta T = 100$  (град),  $\alpha_t = 0,125 \cdot 10^{-4}$  (град $^{-1}$ ). На рис. 6б приведена поверхность распределения прогиба  $w$  с линиями уровня.

## Заключение

В статье успешно реализована попытка с помощью метода нахождения симметрий линейных неоднородных дифференциальных уравнений с  $\delta$ -функцией Дирака в правой части, а также с помощью операции свертки, используя фильтрующее свойство обобщенной  $\delta$ -функции Дирака, определить фундаментальное решение для изотропной пластины произвольной постоянной жесткости. Решение с помощью метода симметрий и теоретико-экспериментального метода привело к идентичным ранее найденным ФР для той же задачи, полученным с помощью других методов (например, операционного метода — комплексного интегрального преобразования Фурье и др.), но предложенные новые методы нахождения фундаментальных решений потребовали для достижения поставленной цели меньших усилий.

Построение фундаментальных решений с помощью симметрий особенно эффективно как для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, так и для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Для последних, как известно, традиционный метод интегральных преобразований (операционное исчисление) неприменим.

С помощью полученного фундаментального решения задачи изгиба изотропных пластин непрямым методом граничных элементов были решены тестовые задачи расчета, подтвердившие высокую точность полученных результатов.

## Литература [References]

1. Гельфанд, И.М., Шиллов, Г.Е., *Обобщенные функции и действия над ними*. Москва, Добросвет, 2000. [Gelfand, I.M., Shilov, G.E., *Obobshchennye funktsii i deystviya nad nimi = Generalized functions and actions on them*. Moscow, Dobrosvet, 2000. (in Russian)]
2. Шиллов, Г.Е., *Математический анализ. Второй специальный курс*. Москва, Изд-во МГУ, 1984. [Shilov, G.E., *Matematicheskii analiz. Vtoroy spetsial'nyy kurs = Mathematical analysis. The second special course*. Moscow, Publishing House of Moscow State University, 1984. (in Russian)]
3. Владимиров, В.С., Жаринов, В.В., *Уравнения математической физики*. Москва, Физико-математическая литература, 2000. [Vladimirov, V.S., Zharinov, V.V., *Uravneniya matematicheskoy fiziki = Equations of mathematical physics*. Moscow, Physical and mathematical literature, 2000. (in Russian)]
4. Шевченко, В.П., *Интегральные преобразования в теории пластин и оболочек*. Донецк, Донецкий государственный университет, 1977. [Shevchenko, V.P., *Integral transformations in the theory of plates and shells*. Donetsk, Donetsk State University, 1977. (in Russian)]
5. Великанов, П.Г., Альтернативные методы получения фундаментальных решений дифференциальных уравнений с частными производными для изотропных материалов. Часть I. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 4, с. 6–22. [Velikanov, P.G., Alternative methods for obtaining fundamental solutions of partial differential equations for isotropic materials. Part I. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 4, pp. 6–22. (in Russian)] EDN: DMWKQC DOI: [10.31429/vestnik-21-4-6-22](https://doi.org/10.31429/vestnik-21-4-6-22)
6. Великанов, П.Г., Альтернативные методы получения фундаментальных решений дифференциальных уравнений и систем в частных производных для изо- и ортотропных материалов. Часть II. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2025, т. 22, № 2, с. 15–30. [Velikanov, P.G., Alternative methods for obtaining fundamental solutions of differential equations and partial differential systems for isotropic and orthotropic materials. Part II. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chshernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 2, pp. 15–30. (in Russian)] EDN: SBDBCP DOI: [10.31429/vestnik-22-2-15-30](https://doi.org/10.31429/vestnik-22-2-15-30)
7. Великанов, П.Г., Операционный и безоперационный методы получения фундаментальных решений дифференциальных уравнений в частных производных для нанопластин. Часть III. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2026, т. 23, № 1, с. 8–21. [Velikanov, P.G., Operational and non-operational methods for obtaining fundamental solutions of partial differential equations for nanoplates. Part III. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2026, vol. 23, no. 1, pp. 8–21. (in Russian)] EDN: EZIXCE DOI: [10.31429/vestnik-23-1-8-21](https://doi.org/10.31429/vestnik-23-1-8-21)

8. Хермандер, Л., *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье*. Москва, Мир, 1986. [Hermander, L., *Analiz lineynykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 1. Teoriya raspredeleniy i analiz Fur'e* = *Analysis of linear partial differential operators. Vol. 1. Theory of distributions and Fourier analysis*. Moscow, Mir, 1986. (in Russian)]
9. Shanz, M., Antes, H., A boundary integral formulation for the dynamic behavior of a Timoshenko beam. *Electronic Journal of Boundary Elements*, 2002, vol. BETEQ 2001, no. 3, pp. 348–359.
10. Артюхин, Ю.П., Грибов, А.П., *Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов*. Казань, ФЭН, 2002. [Artyukhin, Yu.P., Gribov, A.P., *Reshenie zadach nelineynogo deformirovaniya plastin i pologikh obolochek metodom granichnykh elementov* = *Solving problems of nonlinear deformation of plates and flat shells by the method of boundary elements*. Kazan, Feng, 2002. 199 p. (in Russian)]
11. Грибов, А.П., Великанов, П.Г., Применение преобразования Фурье для получения фундаментального решения задачи изгиба ортотропной пластины. В *Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Всероссийской научной конференции*, 2004, ч. 3, с. 67–71. [Gribov, A.P., Velikanov, P.G., Application of the Fourier transform to obtain a fundamental solution to the problem of orthotropic plate bending. In *Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi: Trudy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii* = *Mathematical modeling and boundary value problems: Proceedings of the All-Russian Scientific Conference*, 2004, pt. 3, pp. 67–71. (in Russian)]
12. Великанов, П.Г., Исследование термомеханического изгиба длинной пологой цилиндрической панели методом граничных интегральных уравнений. В *Труды 3-го Международного форума «Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки»*. Ч. 3. Самара, Изд-во СамГТУ, 2007, с. 15–19. [Velikanov, P.G., Investigation of thermomechanical bending of a long flat cylindrical panel by the method of boundary integral equations. *Trudy 3-go Mezhdunarodnogo foruma "Aktual'nye problemy sovremennoy nauki. Estestvennye nauki"*. Ch. 3 = *Proc. of the 3rd International Forum "Actual problems of modern Science. Natural Sciences"*. Pt. 3. Samara, Publishing House of SamSTU, 2007, pp. 15–19. (in Russian)]
13. Великанов, П.Г., Метод граничных интегральных уравнений для решения задач изгиба изотропных пластин, лежащих на сложном двухпараметрическом упругом основании. *Известия Саратовского университета. Серия «Математика. Механика. Информатика»*, 2008, т. 8, вып. 1, с. 36–42. [Velikanov, P.G., The method of boundary integral equations for solving bending problems of isotropic plates lying on a complex two-parameter elastic base. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Seriya "Matematika. Mekhanika. Informatika"* = *Proceedings of the Saratov University. Series "Mathematics. Mechanics. Informatics"*, 2008, vol. 8. iss. 1, pp. 36–42. (in Russian)]
14. Великанов, П.Г., Куканов, Н.И., Халитова, Д.М., Нелинейное деформирование цилиндрической панели ступенчато-переменной жесткости на упругом основании методом граничных элементов. В *Всероссийская научная конференция с международным участием. Актуальные проблемы механики сплошной среды – 2020*, 2020, с. 111–115. [Velikanov, P.G., Kukanov, N.I., Khalitova, D.M., Nonlinear deformation of a cylindrical panel of step-variable stiffness on an elastic base by the method of boundary elements. In *Vserossiyskaya nauchnaya konferentsiya s mezhdunarodnym uchastiem. Aktual'nye problemy mekhaniki sploshnoy sredy – 2020* = *All-Russian scientific conference with international participation "Actual problems of continuum mechanics – 2020"*, 2020, pp. 111–115. (in Russian)]
15. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Куканов, Н.И., Изгиб анизотропной пластины методом граничных элементов. *Актуальные проблемы механики сплошных сред*, 2020, с. 105–111. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Kukanov, N.I., Anisotropic plate bending by the boundary elements method. *Aktual'nye problemy mekhaniki sploshnykh sred* = *Actual problems of continuum mechanics*, 2020, pp. 105–111. (in Russian)]
16. Великанов, П.Г., Куканов, Н.И., Халитова, Д.М., Использование непрямого метода граничных элементов для расчета изотропных пластин на упругом основании Винклера и Пастернака-Власова. *Вестник Самарского университета. Естественная серия*, 2021, т. 27, № 2, с. 33–47. [Velikanov, P.G., Kukanov, N.I., Khalitova, D.M., The use of the indirect boundary element method for the calculation of isotropic plates on an elastic base of Winkler and Pasternak-Vlasov. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* = *Bulletin of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 33–47. (in Russian)]
17. Великанов, П.Г., Халитова, Д.М., Решение задач нелинейного деформирования анизотропных пластин и оболочек методом граничных элементов. *Вестник Самарского университета. Естественная серия*, 2021, т. 27, № 2, с. 48–61. [Velikanov, P.G., Khalitova, D.M., Solving problems

- of nonlinear deformation of anisotropic plates and shells by the boundary element method. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Bulletin of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 48–61. (in Russian)]
18. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Общая теория ортотропных оболочек. Часть I. *Вестник Самарского университета. Естественная серия*, 2022, т. 28, № 1–2, с. 46–54. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., General theory of orthotropic shells. Part I. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Bulletin of Samara University. Natural Science series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 46–54. (in Russian)]
  19. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Общая теория ортотропных оболочек. Часть II. *Вестник Самарского университета. Естественная серия*, 2022, т. 28, № 3–4, с. 40–52. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., General theory of orthotropic shells. Part II. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Bulletin of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 40–52. (in Russian)]
  20. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Математические аналогии для решения задач прочности, устойчивости и колебаний ортотропных пластин и оболочек. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 3, с. 47–54. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Mathematical analogies for solving problems of strength, stability and vibrations of orthotropic plates and shells. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 3, pp. 47–54. (in Russian)] EDN: JYGZJI DOI: [10.31429/vestnik-19-3-47-54](https://doi.org/10.31429/vestnik-19-3-47-54)
  21. Великанова, Н.П., Великанов, П.Г., Проверка утверждения академика Новожилова Г.В. о влиянии погрешности в определении напряжений на величину погрешности в определении ресурса на примере основных деталей двигателя. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2022, т. 19, № 4, с. 48–56. [Velikanova, N.P., Velikanov, P.G., Verification of the statement of academician Novozhilov G.V. on the influence of the error in determining stresses on the magnitude of the error in determining the resource on the example of the main engine parts. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 4, pp. 48–56. (in Russian)] EDN: JZYKZX DOI: [10.31429/vestnik-19-4-48-56](https://doi.org/10.31429/vestnik-19-4-48-56)
  22. Velikanov, P., Solution of contact problems of anisotropic plates bending on an elastic base using the compensating loads method. *E3S Web of Conferences*, 2023, vol. 402 (International Scientific Siberian Transport Forum – TransSiberia 2023), art. 11010. DOI: [10.1051/e3sconf/202340211010](https://doi.org/10.1051/e3sconf/202340211010)
  23. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследования по динамике рамных конструкций. *Геосистемы переходных зон*, 2023, т. 7, № 2, с. 180–195. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Research on the dynamics of frame structures. *Geosistemy perekhodnykh zon = Geosystems of transition zones*, 2023, vol. 7, no. 2, pp. 180–195. (in Russian)]
  24. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследование по динамике многоэтажных зданий. *Геосистемы переходных зон*, 2023, т. 7, № 3, с. 304–315. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Research on the dynamics of multi-storey buildings. *Geosistemy perekhodnykh zon = Geosystems of transition zones*, 2023, vol. 7, no. 3, pp. 304–315. (in Russian)]
  25. Великанов, П.Г., Математические аналогии и аналогии для решения задач методом граничных элементов. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 1, с. 6–20. [Velikanov, P.G., Mathematical analogies and analogies for solving problems by the boundary element method. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 1, pp. 6–20. (in Russian)] EDN: WRVRQN DOI: [10.31429/vestnik-21-1-6-20](https://doi.org/10.31429/vestnik-21-1-6-20)
  26. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследование композитов в виде слоистых ортотропных оболочек. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 2, с. 23–34. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P., Investigation of composites in the form of layered orthotropic shells. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 2, pp. 23–34. (in Russian)] EDN: YPNJFT DOI: [10.31429/vestnik-21-2-23-34](https://doi.org/10.31429/vestnik-21-2-23-34)
  27. Великанов, П.Г., Артюхин, Ю.П., Исследование композитов с помощью уравнений общей теории ортотропных оболочек в комплексной форме. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2024, т. 21, № 3, с. 6–15. [Velikanov, P.G., Artyukhin, Yu.P.,

Investigation of composites using the equations of the general theory of orthotropic shells in a complex form. *Ekologicheskyy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* = *Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2024, vol. 21, no. 3, pp. 6–15. (in Russian)] EDN: [ERCRUG](#) DOI: [10.31429/vestnik-21-3-6-15](#)

28. Артюхин, Ю.П., Гурьянов, Н.Г., Котляр, Л.М., *Система Математика 4.0 и ее приложения в механике*. Казань, Казанское математическое общество, Изд-во КамПИ, 2002. [Artyukhin, Y.P., Guryanov, N.G., Kotlyar, L.M., *Sistema Matematika 4.0 i ee prilozheniya v mekhanike* = *The Mathematics 4.0 system and its applications in mechanics*. Kazan, Kazan Mathematical Society, Publishing House of CamPI, 2002. (in Russian)]
29. Великанов, П.Г., *Основы работы в системе Mathematica*. Казань, Изд-во Казанского гос. техн. ун-та, 2010. [Velikanov, P.G., *Osnovy raboty v sisteme Mathematica* = *Fundamentals of work in the Mathematics system*. Kazan, Publishing House of Kazan State Technical University, 2010. (in Russian)]
30. Аксенов, А.В., Симметрии фундаментальных решений уравнений с частными производными. В *Симметрии дифференциальных уравнений*. Москва, 2009, с. 6–35. [Aksenov, A.V., Symmetries of fundamental solutions of partial differential equations. In *Simmetrii differentsial'nykh uravneniy* = *Symmetries of differential equations*. Moscow, 2009. pp. 6–35. (in Russian)]
31. Bluman, G., Simplifying the form of Lie groups admitted by a given differential equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1990, vol. 145, iss. 1, pp. 52–62.