УДК 539.3 EDN: VDTBCO DOI: 10.31429/vestnik-23-1-86-96

Об одном подходе к решению интегрального уравнения задачи о трещине в слоистой среде

И. С. Телятников ✉

Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, пр-кт Чехова, 41, Ростов-на-Дону, 344006, Россия

✉ Телятников Илья Сергеевич; ORCID 0000-0001-8500-2133; SPIN 5501-1491; e-mail: ilux_t@list.ru

Аннотация. В работе рассмотрен метод решения интегральных уравнений задач о возбуждении гармонических колебаний в пакете слоев со свободной верхней гранью и жестко соединенной с недеформируемым основанием нижней, вызванных вибрацией берегов трещины конечных размеров. Для решения интегрального уравнения после преобразования его интегрального оператора использован метод фиктивного поглощения. Представлены результаты модельных расчетов для интегрального уравнения осесимметричной задачи о вибрации интерфейсной трещины отрыва в двухслойном упругом пакете. Развитые методы решения интегральных уравнений статических задач и задач для сред с поглощением, а также сильно вязких сред с неизменными во времени свойствами могут служить для построения вспомогательных решений, используемых в методе фиктивного поглощения. При этом точность получаемых в результате применения метода фиктивного поглощения приближенных решений определяется точностью решений статических задач.

Ключевые слова: пакет слоев, круглая плоская трещина, метод блочного элемента, интегральное уравнение, метод фиктивного поглощения.

Финансирование. Работа выполнена в рамках ГЗ ЮНЦ РАН (00-25-13, № государственной регистрации 125011200152-6).

Цитирование: Телятников И. С. Об одном подходе к решению интегрального уравнения задачи о трещине в слоистой среде // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2026. Т. 23, № 1. С. 86–96. EDN: VDTBCO. DOI: 10.31429/vestnik-23-1-86-96

Поступила 10 февраля 2026 г. После доработки 12 марта 2026 г. Принято 17 марта 2026 г. Публикация 23 марта 2026 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

On an Approach to Solving the Integral Equation of a Crack Problem in a Layered Medium

I. S. Telyatnikov ✉

Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Prospekt Chekhova, 41, Rostov-on-Don, 344006, Russia

✉ Ilya S. Telyatnikov; ORCID 0000-0001-8500-2133; e-mail: ilux_t@list.ru

Abstract. One of the areas of research in mixed elasticity theory is the construction of mathematical models of the dynamics of defects in elastic media and the solution of problems describing these models. These include problems involving the vibrations of layered media with cracks. A layer or layered medium with a crack or system of cracks serves as a model for various natural structures, such as geological ones, as well as structural elements. Seismology is a traditional application of such models. This paper examines a method for solving problems of integral equations involving the excitation of harmonic vibrations in a package of layers with a free upper face and a lower face rigidly connected to a rigid base, caused by vibration of the faces of a finite-sized crack. To solve the integral equations after transforming their integral operator, the authors used the fictitious absorption method. The paper presents the results of model calculations for an axisymmetric problem formulated by an integral equation involving the vibration of an interface tensile crack in a two-layer elastic medium. Developed methods for solving static and problems for absorbing media, as well as highly viscous media with time-invariant properties, can be used to construct auxiliary solutions employed in the method of fictitious perturbations. The accuracy of the approximate solutions obtained by applying the method of fictitious perturbations is determined by the accuracy of the solutions to the static problems.

Keywords: layer package, circular planar crack, block element method, integral equation, fictitious absorption method.

Funding. The work was carried out within the framework of the State Assignment of the Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (00-25-13, state registration number 125011200152-6).

Cite as: Telyatnikov, I. S., On an approach to solving the integral equation of a crack problem in a layered medium. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2026, vol. 23, no. 1, pp. 86–96. DOI: 10.31429/vestnik-23-1-86-96

Received 10 February 2026. Revised 12 March 2026. Accepted 17 March 2026. Published 23 March 2026.

The author declare no competing interests.

Введение

Одно из направлений в исследованиях смешанных задач теории упругости – построение математических моделей динамики дефектов в упругой среде и решение описывающих эти модели задач. К числу таких относятся и задачи о колебаниях слоистой среды с трещинами.

Слой или слоистая среда с трещиной или системой трещин служат моделями различных природных структур, например, геологических, а также конструкционных элементов. Одной из областей приложения такого рода моделей традиционно является сейсмология. Присутствие структур резонансного типа в литосферных структурах обычно обосновывается результатами наблюдений в обсерваторских экспериментах и интерпретации геолого-геофизических материалов [1]. При этом реальное расположение дефектов и их размерные характеристики могут весьма разнообразны [2].

В работе рассматривается совокупность изотропных слоев с трещиной в одной из интерфейсных плоскостей. Модель изотропного материала по-прежнему представляет собой важное приближение, так как многие материалы, в частности имеющие поликристаллическое строение, демонстрируют макроскопически квазиизотропное поведение [3], кроме того, подбором механических и геометрических параметров слоев и условиями их сцепления слоистая среда может достаточно хорошо соответствовать реальным структурам.

Исследованию динамики трещин посвящено много работ [4–8 и др.], монографии [4, 5] содержат обширные обзоры методов решения статических и динамических задач для тел с трещинами, большая часть которых использует численные методы решения сингулярных интегральных уравнений, полученных в результате применения интегральных преобразований.

Использованный в работе метод блочного элемента (МБЭ) дает возможность получать интегральные уравнения (ИУ) смешанных задач, в том числе задач теории трещин для плоского и пространственного случаев, следуя единому алгоритму. В свою очередь для решения ИУ выбран метод фиктивного поглощения (МФП), предложенный в работах В.А. Бабешко [8, 9]. Существенные результаты по развитию МФП получены также в [10–12 и др.]. Полуаналитический МФП дает возможность исследовать особенности решений ИУ и учитывать их при разработке численных алгоритмов.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача о возбуждении гармонических колебаний в пакете слоев со свободной верхней границей, вызванных вибрацией берегов трещины конечных размеров. Трещина моделируется математическим разрезом, возможность контакта берегов которого в модели не учитывается. Этого можно достичь путем предварительного статического нагружения берегов. Модель, учитывающая возможность возникновения контактной зоны, рассматривалась в работе [13], где представлен подход решения проблемы взаимного проникновения берегов трещины, зона которой в сравнении с длиной трещины обычно незначительна [14].

Рабочей системой координат будем считать неподвижную декартову систему координат x_1, x_2, x_3, где плоскость $x_3 = 0$ параллельна поверхности пакета слоев ($-H \leqslant x_3 \leqslant 0$, $-\infty \leqslant x_1, x_2 \leqslant \infty$), ось $x_3 = 0$ направлена вертикально вверх. Для установившихся колебаний задача рассматривается относительно комплексных амплитуд соответствующих функций.

Временной множитель $e^{-i\omega t}$ и прямое указание на зависимость величин от круговой частоты далее всюду опущены. Для каждого из слоев с характеристиками λ_j, μ_j и плотностью ρ_j, задаваемого как $\{-\infty \leqslant x_1, x_2 \leqslant \infty; h_n \leqslant z \leqslant h_{n+1}; n = \overline{1, N}\}$, $h_1 = -H$, предполагаем, что вектор перемещений $\mathbf{u}_j = \{u_{jn}\}$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений движения линейной теории упругости в безразмерных амплитудных параметрах [3]:

$$(\lambda_j + \mu_j) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{u}_j) + \mu_j \Delta \mathbf{u}_j = -\omega^2 \rho_j \mathbf{u}_j, \quad j = \overline{1, N}. \tag{1.1}$$

Для векторов амплитуд смещений и напряжений будем также использовать обозначения $\mathbf{u}_j^{\pm}$, $\boldsymbol{\tau}_j^{\pm}$, которые вводятся следующим образом:

$$\mathbf{u}_j^- (x_1, x_2) = \lim_{x_3 \to h_j - 0} \mathbf{u}_j (x_1, x_2, x_3), \quad \mathbf{u}_j^+ (x_1, x_2) = \lim_{x_3 \to h_j + 0} \mathbf{u}_j (x_1, x_2, x_3),$$

$$\boldsymbol{\tau}_j^- (x_1, x_2) = \lim_{x_3 \to h_j - 0} \boldsymbol{\tau}_j (x_1, x_2, x_3), \quad \boldsymbol{\tau}_j^+ (x_1, x_2) = \lim_{x_3 \to h_j + 0} \boldsymbol{\tau}_j (x_1, x_2, x_3).$$

На поверхности упругой среды можно сформулировать граничные условия

$$x_3 = h_{N+1} : \boldsymbol{\tau}_{N+1} \equiv \boldsymbol{\tau}_{N+1}^- = \mathbf{0}, \quad \infty < x_1, x_2 < \infty.$$

Из различных типов граничных условий на нижней грани пакета примем условия жесткого механического соединения:

$$x_3 = h_1 : \mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_1^+ = \mathbf{0}, \quad \infty < x_1, x_2 < \infty.$$

Будем полагать, что трещина, занимающая область Ω и моделируемая тонким разрезом, расположена в плоскости $x_3 = h_k$. На разрезе имеют место разрывные граничные условия:

$$x_3 = h_k : \quad \boldsymbol{\tau}_k = \boldsymbol{\tau}_k^- = \boldsymbol{\tau}_k^+, \ (x_1, x_2) \in \Omega_k, \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{u}_k^+ - \mathbf{u}_k^- = \mathbf{0}, \ (x_1, x_2) \notin \Omega_k.$$

В качестве условия излучения применяется принцип предельного поглощения [9, 10].

Помимо математической постановки задачи, необходимо указать класс функций, в которых отыскивается решение, что будет сделано далее.

Для построения системы ИУ рассматриваемой задачи использован МБЭ [15]. Методы построения символов ИУ и матриц-символов СИУ задач для слоистых структур с единичными и множественными трещинами и методы их решения отражены в работах [16–22 и др.]. Для одной трещины в плоскости $x_3 = h_k$ СИУ принимает вид

$$\mathcal{K}_{kn} (\Omega) \mathbf{u}^* = \boldsymbol{\tau}_k, \quad x_3 = h_k, \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \tag{1.2}$$

Неизвестным является вектор скачка перемещений на берегах трещины. Интегральный оператор в (1.2) представляется

$$\mathcal{K}_{nk} (\Omega) \mathbf{u}^* = \iint_{\Omega} \mathbf{k}_{nk} (x_1 - \xi_1, \, x_2 - \xi_2) \, \mathbf{u}^* (\xi_1, \xi_2) \, \mathrm{d}\xi_1 \, \mathrm{d}\xi_2, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{k}_{nk} (x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} \mathbf{K}_{nk} (\alpha_1, \alpha_2) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} \, \mathrm{d}\alpha_1 \, \mathrm{d}\alpha_2. \tag{1.4}$$

Выбор контуров интегрирования σ_j $(j = 1, 2)$ диктуется принципом предельного поглощения [9, 10].

2. Интегральное уравнение для круглой трещины отрыва

Будем далее рассматривать осесимметричную задачу о гармонических колебаниях упругого пакета слоев, вызванных вибрацией круглой плоской трещины радиуса a, расположенной в плоскости $x_3 = h_k$, параллельной недеформированным границам пакета, к краям которой приложена гармоническая вертикально направленная нагрузка. Будем также считать, что $h_k = 0$.

Для трещины отрыва СИУ (1.3) сводится к ИУ

$$\mathcal{K} u_3^* \equiv \iint\limits_{\Omega} k\left(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2\right) u_3^*\left(\xi_1, \xi_2\right) \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta = \tau_3\left(x_1, x_2\right), \quad \left(x_1, x_2\right) \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$k\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\sigma_1} \int\limits_{\sigma_2} K\left(\alpha_1, \alpha_2\right) \exp\left(-\mathrm{i}\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right)\right) \mathrm{d}\alpha_1 \, \mathrm{d}\alpha_2. \tag{2.2}$$

Здесь символ ядра интегрального оператора представляет собой функцию $K_{nk}\left(\alpha_1, \alpha_2\right) \equiv K\left(\alpha\right)$ $\left(\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)$ четную мероморфную, которая может иметь конечное число действительных полюсов p_k и нулей z_k $(k = \overline{1, N})$, возрастающее с увеличением частоты колебаний, и счетное множество комплексных p_k, z_k $(k = \overline{N+1, \infty})$. Структура и свойства функции символа ядра представлены в [16, 20]. Она имеет асимптотическое поведение $K\left(\alpha\right) = C\left|\alpha\right|\left[1 + O\left(\alpha^{-1}\right)\right]$, $\left|\alpha\right| \to \infty$, а ядро интегрального оператора $\mathcal{K}$ представляется обобщенной функцией.

В случае осевой симметрии задачи, т.е. при условии, что функции $u^*\left(x_1, x_2\right)$ и $\tau_3\left(x_1, x_2\right)$ представимы в форме

$$u_3^*\left(x_1, x_2\right) = u^*\left(r\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i} n\varphi}, \quad \tau_3\left(x_1, x_2\right) = \tau\left(r\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i} n\varphi}, \text{ где } r^2 = x_1^2 + x_2^2, \tag{2.3}$$

в полярных координатах $\alpha_1 = \alpha \cos\zeta$, $\alpha_2 = \alpha \sin\zeta$ ядро преобразуется

$$k\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\sigma} K\left(\alpha\right) \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s\left(\alpha\sqrt{\left(x_1 - \xi_1\right)^2 + \left(x_2 - \xi_2\right)^2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}s\left(\zeta - \psi - \pi/2\right)} \alpha \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\zeta =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} K\left(\alpha\right) \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s\left(\alpha r\right) J_s\left(\alpha\rho\right) \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}s\left(\varphi - \psi\right)} \mathrm{d}\alpha. \tag{2.4}$$

Контур интегрирования σ— правая часть контура σ_1, $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $\xi_1 = \rho\cos\psi$, $\xi_2 = \rho\sin\psi$, $J_s\left(\alpha r\right)$ — функция Бесселя первого рода порядка s.

Внося ядро (2.4) и функции из представления (2.3) в ИУ (2.1), для вертикального раскрытия трещины в случае нормально приложенной нагрузки приходим к интегральному уравнению вида

$$\int\limits_0^a k\left(r, \rho\right) u^*\left(\rho\right) \rho \, \mathrm{d}\rho = \tau\left(r\right), \quad 0 \leqslant r \leqslant a, \tag{2.5}$$

$$k\left(r, \rho\right) = \int\limits_{\sigma} K\left(\alpha\right) J_n\left(\alpha r\right) J_n\left(\alpha\rho\right) \alpha \, \mathrm{d}\alpha. \tag{2.6}$$

Отличительная особенность ИУ относительно скачка перемещений на берегах трещины — растущий характер символов ядер на бесконечности. Во многих работах для преодоления этой сложности авторы прибегают к преобразованию интегрального оператора. Например, в работе [18] такое преобразование осуществляется путем выноса дифференциального оператора $\Delta - \Lambda^2$, $\Lambda = \mathrm{const}$, Δ — оператор Лапласа. Для устранения неоднозначности формулируются дополнительные условия, край трещины считается закрепленным, т.е. скачок перемещений на границе трещины полагается равным нулю.

3. Преобразование интегрального оператора уравнения

В уравнении (2.5) правую часть, функцию $\tau(r)$, $r \in [0, a]$, можно представить в виде ряда Фурье–Бесселя [23]

$$\tau(r) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j J_\nu\left(\frac{\gamma_j r}{a}\right), \quad \nu > -1, \quad b_j = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(\gamma_j)} \int\limits_0^a r\tau(r) J_\nu\left(\frac{\gamma_j r}{a}\right) \mathrm{d}r,$$

γ_j — положительные нули уравнения $J_\nu(x) = 0$, расположенные в порядке возрастания.

Далее в качестве правой части ИУ с ядром (2.6) будем рассматривать функцию Бесселя первого рода

$$\int\limits_0^a k(r, \rho)\, u^*(\rho)\, \rho\, \mathrm{d}\rho = J_n(\eta r), \quad 0 \leqslant r \leqslant a, \quad \operatorname{Im} \eta = 0, \quad \eta > 0. \tag{3.1}$$

Для преобразования ядра ИУ (3.1), воспользуемся известным приемом из работы [18], вынесем из обеих частей (3.1) дифференциальный оператор $-A_n + l^2$, где

$$A_n = -\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{n^2}{r^2}\right),$$

l — произвольная постоянная. Приходим к интегральному уравнению, в котором символ ядра убывает на бесконечности ($|\alpha| \to \infty$)

$$\int\limits_0^a k_1(r, \rho)\, u^*(\rho)\, \rho\, \mathrm{d}\rho = \int\limits_0^a J_n(\eta\rho)\, \rho \int\limits_0^\infty \frac{J_n(\alpha\rho)\, J_n(\alpha r)}{\alpha^2 + l^2} \alpha\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\rho + \vartheta(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant a, \tag{3.2}$$

$$k_1(r, \rho) = \int\limits_\Gamma K_1(\alpha)\, J_n(\alpha\rho)\, J_n(\alpha r)\, \alpha\, \mathrm{d}\alpha,$$

$$K_1(\alpha) = \frac{K(\alpha)}{\alpha^2 + l^2}. \tag{3.3}$$

Здесь $\vartheta(r)$ — решение модифицированного уравнения Бесселя вида

$$\frac{\mathrm{d}^2\vartheta(r)}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\vartheta(r)}{\mathrm{d}r} - \left(\frac{n^2}{r^2} + l^2\right)\vartheta(r) = 0.$$

Легко убедиться, что решение этого уравнения представляет собой линейную комбинацию модифицированных функций Бесселя первого и второго рода [24]

$$\vartheta(r) = C_0 I_n(lr) + D_0 K_n(lr).$$

Постоянную D_0 следует положить равной нулю, так как функция Макдональда не ограничена в нуле, тогда $\vartheta(r) = C_0 I_n(lr)$, $C_0 = \mathrm{const}$ подлежит определению.

Возникшая неоднозначность в решении исходной задачи устраняется введением дополнительных условий, определяемых физическим смыслом. В данном случае решение ИУ (3.2) ищется в классе интегрируемых функций $u^*(r) \in \mathbf{L}_b(0, a)$ $(b > 1)$, которые обращаются в ноль на границе области трещины

$$u^*(a) = 0. \tag{3.4}$$

Рассмотрим отдельно правую часть ИУ (3.2). Разделим область интегрирования $\rho \in [0, a]$ на две: $\rho \in [0, r]$ и $\rho \in [r, a]$. Введем обозначение для несобственных интегралов

$$Y_{1,2} = \int\limits_0^\infty \frac{J_n(\alpha\rho)\, J_n(\alpha r)}{\alpha^2 + l^2} \alpha\, \mathrm{d}\alpha.$$

Здесь индекс 1 соответствует интервалу $r > \rho$, а 2 — $r < \rho$. Используя связь между функциями Бесселя и Ханкеля [24], и их свойства

$$J_n(-z) = (-1)^n J_n(z), \quad H_n^{(1)}(-z) = -(-1)^{-n} H_n^{(2)}(z),$$

развернем контур интегрирования на всю действительную ось и вычислим интегралы по вычетам [25], в результате получим

$$Y_1 = \frac{\mathrm{i}\pi}{2} J_n(\mathrm{i}l\rho) H_n^{(1)}(\mathrm{i}lr), \quad Y_2 = \frac{\mathrm{i}\pi}{2} J_n(\mathrm{i}lr) H_n^{(1)}(\mathrm{i}l\rho).$$

Используя свойства цилиндрических функций [24], правую часть (3.2) можно преобразовать так, чтобы ИУ приняло вид

$$\int_0^a k_1(r,\rho) u^*(\rho) \rho \, \mathrm{d}\rho = K_n(lr) \int_0^r J_n(\eta\rho) I_n(l\rho) \rho \, \mathrm{d}\rho +$$
$$+ I_n(lr) \left[C_0 + \int_r^a J_n(\eta\rho) K_n(l\rho) \rho \, \mathrm{d}\rho \right], \quad 0 \leqslant r \leqslant a, \quad (3.5)$$

где C_0 определяется из условия (3.4).

Значения интегралов правой части (3.5) легко вычисляются с использованием таблиц [26], в результате чего приходим к ИУ с комбинацией функций Бесселя $J_n(\eta r)$ и $I_n(lr)$ в правой части

$$\int_0^a k_1(r,\rho) u^*(\rho) \rho \, \mathrm{d}\rho = \frac{J_n(\eta r)}{\eta^2 + l^2} +$$
$$+ I_n(lr) \left[C_0 + \frac{a}{\eta^2 + l^2} \left(\eta J_{n+1}(\eta a) K_n(la) - l J_n(\eta a) K_{n+1}(la) \right) \right]. \quad (3.6)$$

В частном случае, когда $n = 0$, $\eta = 0$, т.е. $\tau(r) \equiv 1$, получим ИУ с правой частью

$$\frac{1}{l^2} + \frac{C_0 l - a K_1(la)}{l} I_0(lr).$$

В силу линейности ИУ (3.6), отдельно построим его решение $u_{1\eta}$ для правой стороны в виде функции Бесселя $J_n(\eta r)$ и u_{1l} — для модифицированной функции Бесселя $I_n(lr)$ (функции Инфельда), тогда

$$u^*(r) = \frac{u_\eta(r)}{\eta^2 + l^2} + u_l(r) \left[C_0 + \frac{a}{\eta^2 + l^2} \left(\eta J_{n+1}(\eta a) K_n(la) - l J_n(\eta a) K_{n+1}(la) \right) \right]. \quad (3.7)$$

4. Построение вспомогательных решений ИУ для сред с сильным затуханием

Для нахождения решений ИУ первого рода с помощью МФП используются вспомогательные решения соответствующих статических задач (задач для сред с затуханием). При построении решений вспомогательных задач для интегральных операторов $\mathcal{K}_0$, обладающих сильным затуханием, можно выбрать произвольную функцию символа ядра ИУ, не имеющую особенностей на вещественной оси, асимптотическое поведение которой на бесконечности совпадает с асимптотическим поведением $K_1(\alpha)$ (3.3). Для ИУ контактных задач с такой асимптотикой в [9, 10, 27] выбирается функция

$$K_0(\alpha) = \frac{C}{\sqrt{\alpha^2 + B^2}}, \quad B > 0. \quad (4.1)$$

Эта функция легко факторизуется в виде произведения относительно действительной оси

$$K_0(\alpha) = K_0^+ K_0^- \equiv \frac{1}{\sqrt{\alpha + \mathrm{i}B}} \frac{1}{\sqrt{\alpha - \mathrm{i}B}}.$$

Для построения решения (3.6) с помощью МФП сначала следует получить решение интегральных уравнений

$$\int_0^a k_0(r,\rho)\, t_\eta(\rho)\, \rho\, \mathrm{d}\rho = J_n(\eta r), \quad 0 \leqslant r \leqslant a, \tag{4.2}$$

$$\int_0^a k_0(r,\rho)\, t_l(\rho)\, \rho\, \mathrm{d}\rho = I_n(lr), \quad 0 \leqslant r \leqslant a \tag{4.3}$$

с символом ядра (4.1).

Способ построения решения (4.2) описан в [27]. С учетом большого значения параметра B (сильное затухание) его можно представить в форме

$$t_\eta(r) = J_n(\eta r)\, K_0^{-1} + \\ + \sqrt{\frac{a}{2\pi(a^2 - r^2)}} \left[H_n^{(1)}(\eta a)\sqrt{B + \mathrm{i}\eta} + H_n^{(2)}(\eta a)\sqrt{B - \mathrm{i}\eta}\right] b_0(\eta) \exp(-B(a - r)). \tag{4.4}$$

Здесь первое слагаемое соответствует так называемой вырожденной составляющей решения, описывающей поведение решения во внутренних точках области, а второе описывает поведение вблизи границы области. При удалении от границы экспоненциальный множитель обеспечивает его быстрое убывание.

Построим решение ИУ (4.3). Сделав замену $r = a - t$, $\rho = a - \tau$, его можно привести к виду

$$\int_0^\infty t_l(a - \tau) \int_\Gamma \frac{\exp(-\mathrm{i}\alpha(t - \tau))}{\alpha^2 + B^2}\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\tau = 2\pi\sqrt{a - t}\, I_n(l(a - t)).$$

При больших аргументах справедлива формула [24]

$$I_\nu(z) \approx \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}} \left[1 - \frac{\mu - 1}{8z} + \frac{(\mu - 1)(\mu - 9)}{2!\,(8z)^2} - \ldots\right], \quad \mu = 4\nu^2, \quad |\arg z| < \pi/2.$$

Воспользовавшись этой формулой, ИУ можно записать

$$\int_0^\infty t_l(a - \tau) \int_\Gamma \frac{\exp(-\mathrm{i}\alpha(t - \tau))}{\alpha^2 + B^2}\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\tau = \frac{\exp(l(a - t))}{\sqrt{2\pi l}}.$$

Обозначим $t_{2l}(a - t)\sqrt{a - t} = q_{2l}(a - t)$. Тогда далее необходимо получить представление решения для ИУ плоской задачи с правой частью $\exp(lx)$

$$\mathcal{K}_0 q = \int_{-a}^a k_0(x - \xi) q(\xi)\, \mathrm{d}\xi = \exp(lx).$$

Используя тот же метод, что и в [27], решение ИУ плоской задачи получим в форме

$$q(x) = \sqrt{\frac{B - l}{\pi(a + x)}} \exp(-al - B(a + x)) + \sqrt{\frac{B + l}{\pi(a - x)}} \exp(al - B(a - x)) + \\ + \exp(lx)\sqrt{B^2 - l^2}\left[\operatorname{erf}\sqrt{(B - l)(a - x)} + \operatorname{erf}\sqrt{(B + l)(a + x)} - 1\right].$$

Пусть $x = a - t$, $\xi = a - \tau$, при $a \to \infty$, будем иметь

$$q_{2l}(t) \sim \frac{\exp(al - Bt)}{\pi\sqrt{2alt}}\sqrt{B+l} \approx \sqrt{\frac{a}{\pi t}}\exp(-Bt)\, I_n(al)\sqrt{B+l}.$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, получим

$$t_{2l}(r) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} I_n(al)\sqrt{B+l}\frac{\exp(-B(a-r))}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Решение же ИУ (4.3) примет вид

$$t_l(r) = I_n(lr)\, K_0^{-1}(il) + \sqrt{\frac{2a}{\pi}} I_n(al)\sqrt{B+l}\frac{\exp(-B(a-r))}{\sqrt{a^2 - r^2}}. \tag{4.5}$$

5. Решение ИУ динамической задачи с помощью МФП

Алгоритм МФП изложен в целом ряде работ [8–12, 16, 17, 19] и далее в подробностях не приводится. В работах [12, 16, 17, 19] метод применяется к ИУ задач о вибрации трещин, причем в [19] решено ИУ плоской задачи о трещине, где преобразование интегрального оператора производится на этапе построения вспомогательного решения ИУ статической задачи.

Известная схема МФП предполагает представление каждой составляющей искомого решения $u^*(r) = u_{1\eta}(r) + u_{1l}(r)$ (3.6), $u^*(r) \in \mathbf{L}_b(0, a)$, $b > 1$, в форме

$$u_{1\beta}(r) = p(r) + \varphi(r), \quad \beta = \eta, l. \tag{5.1}$$

Функции правой части представления (5.1) должны обладать следующими свойствами:

$$\mathrm{V}_{Bn}\varphi(r) = \mathrm{V}_{Bn}u_{1\beta}(r), \quad \alpha^2 = p_k^2, \quad k = \overline{1, N}, \quad \mathrm{V}_{Bn}p(r) = 0, \quad \alpha^2 = p_k^2, \quad k = \overline{1, N}, \tag{5.2}$$

где

$$\mathrm{V}_{Bn}f = \int_0^a f(r)\, J_n(\alpha r)\, r\, \mathrm{d}r.$$

В большинстве работ, использующих МФП, в качестве функции $\varphi(r)$ выбирается линейная комбинация дельта-функций Дирака с непересекающимися носителями, принадлежащими $(0, a)$ вида

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{N} C_k \delta(r - r_k), \quad 0 < r_k < a.$$

Здесь так же, как и в [12, 17], принят следующий вид:

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{N} C_k N_{m_k} G_k(A_n)\, \delta(r - a),$$

$$G_k(\alpha^2) = (\alpha^2 - p_1^2)\ldots(\alpha^2 - p_{k-1}^2)(\alpha^2 - p_{k+1}^2)\ldots(\alpha^2 - p_N^2),$$

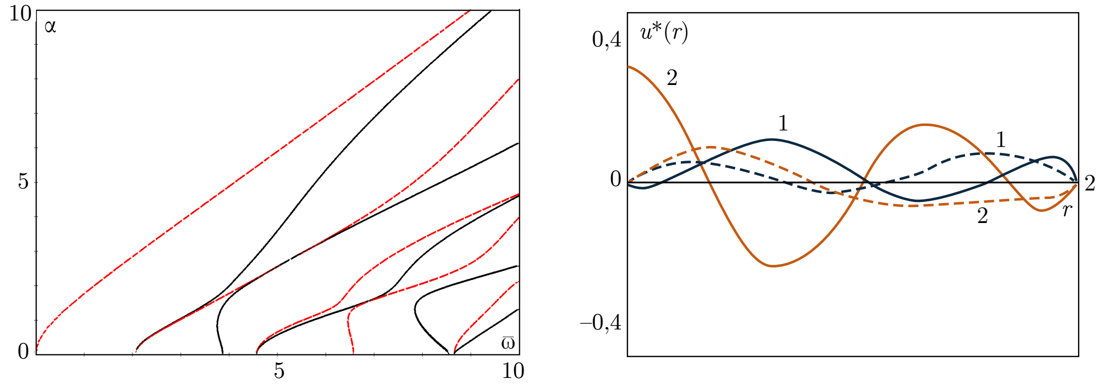
а C_k — постоянные, подлежащие определению в ходе построения решения,

$$N_m f = r^{-n}\left(\frac{\mathrm{d}}{r\,\mathrm{d}r}\right)^m r^{n+m} f(r)$$

для случая $m_k = 0$.

Далее, введя новую неизвестную в соответствии с алгоритмом МФП

$$t(r) = V_{Bn}^{-1}\Pi(\alpha, N)\, \mathrm{V}_{Bn}p(r), \quad \mathrm{V}_{Bn}^{-1}F = \int_0^\infty F(\alpha)\, J_n(\alpha r)\, \alpha\, \mathrm{d}\alpha, \quad \Pi(\alpha, N) = E_N(\alpha^2)\, Q_N^{-1}(\alpha^2),$$



а) б)

Рис. 1. Поведение нулей и полюсов элементов $K(\alpha)$ (а), составляющие раскрытия трещины (б)

Fig. 1. Behavior of the zeros and poles of the elements $K(\alpha)$ (a), components of the crack opening (б)

где

$$E_N\left(\alpha^2\right) = \prod_{k=1}^{N}\left(\alpha^2 - z_k^2\right), \quad Q_N\left(\alpha^2\right) = \prod_{k=1}^{N}\left(\alpha^2 - p_k^2\right), \quad p_k, z_k \in \mathbb{R},$$

приходим к решению ИУ с регулярным убывающим символом ядра. Например, для $u_{1\eta}(r)$ вновь введенная неизвестная удовлетворяет ИУ

$$\mathcal{K}_0 t = J_n(\eta r) - \mathcal{K}_0 \mathrm{V}_2^{-1} \Pi(\alpha, N)\, \mathrm{V}_2 \varphi.$$

Для нахождения решений таких уравнений используются построенные вспомогательные $t_\eta(r)$ из (4.4) и $t_l(r)$ из (4.5).

На рис. 1 отображены результаты модельных расчетов: кривые вещественных полюсов (сплошные линии) и нулей (пунктирные линии) (рис. 1а), а также реальная (сплошные линии) и мнимая (пунктирные линии) части скачка перемещений в области $[0,\, 2]$, занимаемой трещиной, к берегам которой приложена нагрузка $J_0(\eta r)$ (рис. 1б). Геометрические и механические характеристики пакета: $h_1 = 0{,}6$ — толщина нижнего слоя, $h_2 = 0{,}4$ — толщина верхнего слоя; $\rho_1 = \rho_2 = 1$; $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$; $\mu_1/\mu_2 = 0{,}4$. Безразмерные величины приведены к параметрам верхнего слоя, в качестве характерного линейного размера выбрана толщина пакета, безразмерная частота $\bar{\omega}^2 = \rho_2 \omega^2 a^2 \mu_2^{-1}$. Кривые 1 соответствуют $\eta = 1,\ 2 - \eta = 2$.

В модельных расчетах выбрано значение $B = 10$ в (4.1). Результаты вычислительных экспериментов показывают, что увеличение значения η (при неизменных остальных параметрах) сопровождается ростом вещественной и мнимой частей раскрытия трещины.

Заключение

В работе рассмотрен метод решения ИУ задач о возбуждении гармонических колебаний в пакете слоев со свободной верхней гранью и жестко соединенной с недеформируемым основанием нижней, вызванных вибрацией берегов трещины конечных размеров.

Для решения ИУ после преобразования его интегрального оператора использован метод фиктивного поглощения. Приведены результаты модельных расчетов для ИУ осесимметричной задачи о вибрации интерфейсной трещины отрыва в двухслойном упругом пакете.

Представленный метод применим для ИУ динамических задач в произвольных выпуклых областях. Обобщение метода на невыпуклые области представлено в работе [12]. Развитые методы решения ИУ статических задач и задач для сред с поглощением, а также сильно вязких сред с неизменными во времени свойствами могут служить для построения вспомогательных решений, используемых в МФП. При этом точность получаемых в результате применения МФП приближенных решений определяется точностью решений статических задач.

Литература [References]

1. Sobisevitch, A.L., Gridnev, D.G., Sobisevitch, L.E., Kanonidi, K.Kh., Instrumental equipment of geophysical observatory at north Caucasus. *Seismic Instruments*, 2008, vol. 44, iss. 1, pp. 12–25.
2. Садовский, М.А., Болховитинов, Л.Г., Писаренко, В.Ф., *Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс.* Москва, Наука, 1987. [Sadovsky, M.A., Bolkhovitinov, L.G., Pisarenko, V.F., *Deformirovanie geofizicheskoy sredy i seysmicheskiy protsess = Deformation of the geophysical environment and the seismic process.* Moscow, Nauka, 1987. (in Russian)]
3. Хан, Х., *Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения.* Москва, Мир, 1988. [Khan, X., *Teoriya uprugosti: Osnovy lineynoy teorii i ee primeneniya = Elasticity Theory: Fundamentals of Linear Theory and Its Applications.* Moscow, Mir, 1988. (in Russian)]
4. Андрейкив, А.Е., *Пространственные задачи теории трещин.* Киев, Наук. Думка, 1982. [Andreykiv, A.E., *Prostranstvennye zadachi teorii treshchin = Spatial Problems of Crack Theory.* Kyiv, Naukova Dumka, 1982. (in Russian)]
5. Панасюк, В.В., *Предельное равновесие хрупких тел с трещинами.* Киев, Наук. думка, 1968. [Panasyuk, V.V., *Predel'noe ravnovesie khrupkikh tel s treshchinami = Limit Equilibrium of Brittle Bodies with Cracks.* Kyiv, Naukova Dumka, 1968. (in Russian)]
6. Rangarajan, R., Chiaramonte, M.M., Hunsweck, M.J., Shen, Y., Lew, A.J. Simulating curvilinear crack propagation in two dimensions with universal meshes. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2015, vol. 102, iss. 3–4, pp. 632–670. DOI: 10.1002/nme.4731
7. Huang, Y., Gao, H., Intersonic crack propagation. Part II: Suddenly stopping crack. *J. Appl. Mech.*, 2002, vol. 69, pp. 76–80. DOI: 10.1115/1.1410936
8. Бабешко, В.А., Новый метод в теории пространственных динамических смешанных задач. *Докл. АН СССР*, 1978, т. 242, вып. 1, с. 62–65. [Babeshko, V.A., A new method in the theory of spatial dynamic mixed problems. *Doklady AN SSSR = Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1978, vol. 242, iss. 1, pp. 62—65. (in Russian)]
9. Бабешко, В.А., *Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости.* Москва, Наука, 1984. [Babeshko, V.A., *Obobshchennyy metod faktorizatsii v prostranstvennykh dinamicheskikh smeshannykh zadachakh teorii uprugosti = Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory.* Moscow, Nauka, 1984. (in Russian)]
10. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., Пряхина, О.Д., *Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах.* Москва, Научный мир, 1999. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., Pryakhina, O.D., *Dinamika massivnykh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemykh sredakh = Dynamics of massive bodies and resonance phenomena in deformable media.* Moscow, Nauchny Mir, 1999. (in Russian)]
11. Babeshko, V.A., Kalinchuk, V.V., The method of fictitious absorption in coupled mixed problems of the theory of elasticity and mathematical physics for a multilayered inhomogeneous half-space. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, vol. 66, iss. 2, pp. 275–281. DOI: 10.1016/S0021-8928(02)00034-5
12. Pavlova, A.V, Rubtsov, S.E., Telyatnikov, I.S., Modification of the fictitious absorption method. *Mechanics of Solids*, 2021, vol. 56, iss. 7, pp. 1416—1428. DOI: 10.3103/S0025654421070189
13. England, A.H., A crack between dissimilar media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1965, vol. 32, pp. 400—-402. DOI: 10.1115/1.3625813
14. Erdogan, F., Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plate with cracks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1963, vol. 30, pp. 232—237. DOI: doi.org/10.1115/1.3636517
15. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Topological method of solving boundary-value problems and block elements. *Doklady Physics*, 2013, vol. 58, iss. 4, pp. 152–155. DOI: 10.1134/S1028335813040083
16. Telyatnikov, I.S., Pavlova, A.V., On the problems of the theory of vibration strength "viruses" in seismology. *Geology and Geophysics of the South of Russia*, 2025, vol. 15, no. 2, pp. 116—127. DOI: 10.46698/VNC.2025.96.62.001
17. Telyatnikov, I.S., Pavlova, A.V., Fictitious absorption method in a dynamic problem for a layer weakened by a crack. *Advanced Structured Materials*, 2023, vol. 176, pp. 211–230. DOI: 10.1007/978-3-031-17073-7_14
18. Бабешко, В.А., Ткачев, Г.В., Вибрация круглой трещины при трехкомпонентной нагрузке. *Прикладная математика и механика*, 1980, т. 44, вып. 5, с. 857–865. [Babeshko, V.A., Tkachev, G.V., Vibration of a circular crack under a three-component load. *Prikladnaya matematika i mekhanika =*

Applied Mathematics and Mechanics, 1980, vol. 44, iss. 5, pp. 857–865. (in Russian)]

19. Кардовский, И.В., Пряхина, О.Д., Смирнова, А.В., Решение динамической задачи для трехслойной среды с трещинами. *Известия вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки*, 2004, № 3, с. 38–43. [Kardovsky, I.V., Pryakhina, O.D., Smirnova, A.V., Solution of a dynamic problem for a three-layer medium with cracks. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki = News of universities. North Caucasus region. Natural sciences*, 2004, no. 3, pp. 38–43. (in Russian)]
20. Pryakhina, O.D, Smirnova A.V., Integral equations of dynamic problems for multilayered media containing a system of cracks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2005, vol. 69, iss. 2, pp. 315–321. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2005.03.018
21. Lyapin, A.A., Sobisevich, A.L., Specific features of the dilatancy boundary layer formation in multilayer half-space with a deep cavity. *Doklady Earth Sciences*, 2000, vol. 372, pp. 712–715.
22. Бабешко, В.А., К проблеме исследования динамических свойств трещиноватых тел. *Докл. АН СССР*, 1989, т. 304, № 2, с. 318–321. [Babeshko, V.A., On the problem of studying the dynamic properties of fractured bodies. *Doklady AN SSSR = Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1989, vol. 304, no. 2, pp. 318–321. (in Russian)]
23. Magnus, W., Oberhettinger, F., Soni, R.P., *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1966.
24. Abramowitz, M., Stegun, I.A., *Handbook of Mathematical Functions*. Washington, U.S. Government Printing Office, 1972.
25. Лаврентьев, М.А., Шабат, Б.В., *Методы теории функций комплексного переменного*. Москва, Наука, 1973. [Lavrentiev, M.A., Shabat, B.V., *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo = Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable*. Moscow, Nauka, 1973. (in Russian)]
26. Прудников, А.П., Брычков, Ю.А., Маричев, О.И., *Интегралы и ряды. Специальные функции*. Москва, Физматлит, 2003. [Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., Marichev, O.I., *Integraly i ryady. Spetsial'nye funktsii = Integrals and Series. Special Functions*. Moscow, Fizmatlit, 2003. (in Russian)]
27. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. Москва, Наука, 1979. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., *Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical domains*. Moscow, Nauka, 1979. (in Russian)]