

УДК 532.546:551.345

EDN: IYXJMQ DOI: 10.31429/vestnik-23-2-21-35

Математическое моделирование связанного теплопереноса с фазовыми переходами в гетерогенных пористых грунтах: механизм коллапса коэффициента диффузии влаги при промерзании

Е. М. Аврахам  

Кубанский государственный аграрный университет им. И.Т. Трубилина, ул. Калинина, 13, Краснодар, 350044, Россия

✉ Аврахам Елена Михайловна; ORCID 0009-0009-0305-3742; SPIN 4269-2438; e-mail: av.el3@yandex.com

Аннотация. В работе представлена математическая модель связанного теплопереноса с фазовыми переходами вода–лёд–пар в гетерогенных пористых грунтах. Модель основана на системе уравнений Ричардса, диффузии водяного пара и теплопереноса, связанных через температурно-зависимую влагопроводность, описываемую законом Козени–Кармана, и термодинамическое равновесие фаз, задаваемое соотношением Клапейрона–ван Генухтена. Целью исследования является выявление физического механизма подавления влагопереноса при промерзании и количественная характеристика резкого снижения его интенсивности. Получено аналитическое выражение для коэффициента диффузии почвенной влаги, определяющего скорость перераспределения влаги и связывающего влагопроводность грунта с его удельной влагоёмкостью. Показано, что поведение системы может быть описано в компактной безразмерной форме с управляющим параметром, разделяющим два предельных режима подавления влагопереноса: кинематический, обусловленный геометрической блокировкой порового пространства льдом, и термодинамический, связанный с фазовой инерцией системы вследствие латентной теплоты фазового перехода. Установлено, что при прохождении фронта замерзания происходит резкое падение коэффициента диффузии влаги, вызванный одновременным уменьшением влагопроводности и многократным ростом эффективной влагоёмкости среды. Определены характерный масштаб снижения коэффициента диффузии и критическая температура, соответствующая переходу между кинематическим и термодинамическим режимами подавления влагопереноса. Полученные результаты раскрывают физический механизм критического подавления влагопереноса в замерзающих пористых средах и могут быть использованы при разработке моделей теплового переноса в мерзлых грунтах, прогнозировании процессов сезонного промерзания почв, а также при инженерных расчётах устойчивости грунтовых оснований и инфраструктуры в условиях холодного климата.

Статья подготовлена на основе англоязычного препринта, ранее опубликованного на платформе EarthArXiv (без процедуры рецензирования). Данная статья является его переработанной и существенно расширенной версией: дополнен раздел верификации модели (включая валидацию по натурным данным), проведено сопоставление с современными моделями криолитозоны, а также переработано обсуждение практических приложений.

Ключевые слова: пористая среда, теплоперенос, фазовые переходы вода–лёд, фильтрация влаги, мерзлые грунты, перколяция, коэффициент диффузии.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.



Цитирование: Аврахам Е. М. Математическое моделирование связанного теплопереноса с фазовыми переходами в гетерогенных пористых грунтах: механизм коллапса коэффициента диффузии влаги при промерзании // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2026. Т. 23, № 2. С. 21–35. EDN: IYXJMQ. DOI: 10.31429/vestnik-23-2-21-35

Поступила 9 марта 2026 г. После доработки 30 мая 2026 г. Принято 14 июня 2026 г. Публикация 24 июня 2026 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2026. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Mathematical Modeling of Coupled Heat and Mass Transfer with Phase Transitions in Heterogeneous Porous Soils: Mechanism of Soil Water Diffusivity Collapse During Freezing

Е. М. Avraham  

Kuban State Agrarian University named after I.T. Trubilin, 13 Kalinina St., Krasnodar, 350044, Russia

✉ Elena M. Avraham; ORCID 0009-0009-0305-3742; e-mail: av.el3@yandex.com

Abstract. A mathematical model of coupled heat and mass transfer with water–ice–vapor phase transitions in heterogeneous porous soils is presented. The model comprises the Richards equation, the water vapor diffusion equation, and the heat transfer equation, coupled through a temperature-dependent hydraulic conductivity governed by the Kozeny–Carman relation and thermodynamic phase equilibrium described by the Clapeyron–van Genuchten framework. The study aims to identify the physical mechanism responsible for the suppression of moisture transport during soil freezing and to quantitatively characterize the sharp reduction in the soil moisture diffusion coefficient. An analytical expression for the soil moisture diffusion coefficient is derived, linking the hydraulic conductivity to the specific moisture capacity and determining the rate of moisture redistribution in the soil. The analytical result admits a compact dimensionless form controlled by a single governing parameter that separates two physically distinct limiting regimes of moisture transport degradation: a kinematic regime dominated by geometric pore blockage due to ice formation, and a thermodynamic regime governed by phase inertia associated with the latent heat of the phase transition. Numerical simulations using the finite element method reveal a sharp collapse of the soil moisture diffusion coefficient upon passage of the freezing front, driven by the simultaneous reduction of hydraulic conductivity and a manifold increase in effective moisture capacity. The characteristic magnitude of the collapse and the critical temperature marking the transition between the two regimes are determined analytically. The results elucidate the physical mechanism of critical moisture transport suppression in freezing porous media and provide a physically based parameterization applicable to thermo-hydrological models of frozen soils, prediction of seasonal freezing processes, and engineering assessment of soil foundation stability under cold-climate conditions.

The manuscript is based on an English-language preprint previously posted on EarthArXiv. The submitted Russian version is substantially revised, expanded, and translated. Full disclosure is provided in the manuscript.

Keywords: porous media, moisture filtration, frozen soil, coupled heat and mass transfer, soil water diffusivity, phase transition, soil freezing, percolation theory.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Avraham, E. M., Mathematical modeling of coupled heat and mass transfer with phase transitions in heterogeneous porous soils: mechanism of soil water diffusivity collapse during freezing. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2026, vol. 23, no. 2, pp. 21–35. DOI: 10.31429/vestnik-23-2-21-35

Received 9 March 2026. Revised 30 May 2026. Accepted 14 June 2026. Published 24 June 2026.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2026. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Примечание

Статья подготовлена на основе англоязычного препринта, ранее опубликованного на платформе EarthArXiv [1] (без процедуры рецензирования). Данная статья является его переработанной и существенно расширенной версией: дополнен раздел верификации модели (включая валидацию по натурным данным), проведено сопоставление с современными моделями криолитозоны, а также переработано обсуждение практических приложений.

Введение

Процессы промерзания и оттаивания грунтов играют ключевую роль в формировании гидрологического режима, устойчивости инженерных сооружений и динамики криолитозоны в условиях изменяющегося климата. В области отрицательных температур перенос влаги и тепла становится существенно связанной задачей вследствие фазовых переходов вода–лёд–пар, сопровождающихся перераспределением порового пространства, выделением и поглощением скрытой теплоты, а также резким изменением гидравлической проводимости. Экспериментальные исследования показывают, что при прохождении фронта замерзания фильтрационные свойства грунтов могут снижаться на несколько порядков величины. Однако физическая природа этого коллапса остаётся предметом дискуссии: в существующих моделях он либо задаётся эмпирическими импедансными функциями, либо возникает как численный эффект в

рамках полностью связанной термогидродинамической постановки. Отсутствие компактного аналитического описания, позволяющего разделить геометрические и термодинамические механизмы деградации проводимости, существенно затрудняет интерпретацию результатов моделирования и построение параметрически обоснованных упрощённых моделей для задач мерзлотной гидрологии и геотехники.

Теоретические основы связанного переноса тепла и влаги в пористых средах были заложены в классической работе [2], где было предложено первое механистическое описание термически индуцированных потоков жидкости и пара. Уравнение Ричардса, широко используемое для описания движения влаги в ненасыщенных почвах, было впоследствии распространено на условия промерзания и связано с уравнением теплопереноса с учётом латентной теплоты. Существенный вклад в развитие этой постановки внесли авторы работы [2], реализовавшие связанную термогидравлическую модель в программном комплексе HYDRUS, где модифицированное уравнение Ричардса сочетается с уравнением теплопереноса и описанием фазовых переходов. Данная формулировка была успешно верифицирована на лабораторных экспериментах и в настоящее время составляет основу большинства численных исследований переноса влаги и тепла в промерзающих почвах.

Ключевым элементом моделей тепло-влажностного переноса в мерзлых грунтах является параметризация кривой замерзания, связывающей температуру и содержание жидкой воды. Ранние подходы основываются на эмпирических степенных зависимостях, однако более поздние работы показали, что кривая замерзания может быть получена как прямой термодинамический аналог кривой водоудержания через равновесие Клапейрона. Такой подход обеспечивает согласованное описание процессов иссушения и промерзания и стал стандартом в современных моделях поверхности суши и мерзлотной гидрологии.

Существенная неопределённость в существующих моделях связана с описанием влияния льда на гидравлическую проводимость. Наиболее распространённый подход использует эмпирические функции ледяного импеданса, в которых проводимость уменьшается экспоненциально с ростом содержания льда. В частности, в работе [4] предложена зависимость вида $K_{\text{frozen}} = 10^{-\Omega\theta_i} K_{\text{thawed}}$, где Ω является эмпирическим параметром. Наряду с этим предлагались более физически обоснованные формулировки, учитывающие геометрию порового пространства и исключённый объём льда. Прямые измерения проницаемости промёрзших грунтов показали снижение гидравлической проводимости на 2–3 порядка величины, однако коэффициент диффузии почвенной влаги, учитывающий одновременно проводимость и ёмкостной член, практически не анализировался.

Дополнительную сложность представляет пространственная гетерогенность почв. Наблюдения показывают, что даже при отрицательных температурах часть порового пространства может оставаться гидравлически активной, формируя высокопроводимые пути переноса. Такие незамёрзшие каналы и макропоры способны определять распределение потоков воды в частично промёрзших грунтах. Однако большинство существующих моделей либо предполагают однородные свойства среды, либо учитывают гетерогенность только статистически, без явного пространственного описания.

Анализ литературы выявляет три взаимосвязанных ограничения существующих моделей тепло-влажностного переноса в промерзающих грунтах. Во-первых, влияние льда на перенос влаги в большинстве современных моделей описывается эмпирическими функциями ледяного импеданса с подгоночными параметрами [4], что снижает их предсказательную способность за пределами условий калибровки. Во-вторых, имеющиеся численные результаты документируют падение гидравлической проводимости промёрзших грунтов на 2–3 порядка величины, однако коэффициент диффузии почвенной влаги, объединяющий проводимость и ёмкостной отклик среды, систематически не анализировался; при этом именно он определяет скорость перераспределения влаги. В-третьих, отсутствует компактное аналитическое описание, в явном виде разделяющее геометрический (блокировка пор льдом) и термодинамический (фазовая инерция, обусловленная скрытой теплотой) механизмы подавления влагоненоса, что затрудняет физическую интерпретацию результатов численного моделирования и построение редуцированных параметризаций для крупномасштабных моделей криолитозоны.

Целью настоящей работы является количественное исследование механизмов деградации гидравлической подвижности влаги в гетерогенных грунтах при промерзании и выявление физического механизма коллапса коэффициента диффузии грунтовой влаги вблизи фронта замерзания. Для достижения поставленной цели ставились следующие задачи:

- разработать полностью связанную численную модель теплопереноса в гетерогенной пористой среде, описывающую совместный перенос воды, водяного пара и тепла с явным учётом фазового перехода вода–лёд.
- получить аналитическое выражение для эффективного коэффициента диффузии влаги замерзающего грунта с учётом двух ключевых механизмов — геометрической блокировки порового пространства льдом и роста эффективной влагоёмкости системы, обусловленного скрытой теплотой фазового перехода, — и представить его в компактной безразмерной форме.
- численно исследовать изменение коэффициента диффузии влаги при прохождении фронта замерзания и количественно охарактеризовать масштаб его снижения.
- разделить вклад двух физических механизмов подавления влагопереноса — уменьшения влагопроводности вследствие блокировки пор льдом и роста эффективной влагоёмкости среды из-за латентной теплоты фазового перехода.
- исследовать влияние пространственной гетерогенности параметров грунта на структуру влагопереноса и установить связь между потерей связности жидкой фазы в поровом пространстве и порогом перколяции.
- определить безразмерный управляющий параметр, характеризующий конкуренцию геометрического и термодинамического механизмов подавления влагопереноса, и установить условия перехода между соответствующими режимами.

1. Постановка задачи

Исследуемая область моделируется в виде двумерного вертикального сечения грунтового профиля

$$\Omega = [0, L]^2$$

Ось z направлена вертикально вверх: $z = 0$ соответствует нижней границе области, $z = L$ — поверхности грунта. Процесс тепло- и массопереноса с фазовыми переходами вода–лёд–пар в гетерогенной пористой грунтовой среде моделируется системой трёх связанных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с неизвестными: матричным потенциалом влаги $h(\mathbf{x}t)$, температурой $T(\mathbf{x}t)$ и плотностью водяного пара $\rho_v(\mathbf{x}t)$. Закон сохранения массы воды (жидкая и ледяная фазы) записывается в канонической форме уравнения Ричардса [5, 6]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\theta(h) + \frac{\rho_i}{\rho_w} \theta_{\text{ice}}(h, T) \right] + \nabla \mathbf{q}_w = \frac{S_v}{\rho_w} - S_{\text{root}} \quad (1.1)$$

где $\theta(h)$ — объёмное влагосодержание жидкой фазы, $\theta_{\text{ice}}(h, T)$ — объёмная доля льда, ρ_i и ρ_w — плотности льда и воды соответственно. Член S_v описывает объёмную скорость фазового перехода между жидкой и паровой фазами (испарение/конденсация в поровом пространстве), а S_{root} — объёмный сток воды корневой системой растений. Фазовое распределение воды описывается с использованием формулировки, представленной в работах [7, 8]. Предполагается, что суммарное водосодержание θ_w сохраняется, а перераспределение между жидкой и ледяной фазами определяется уравнением Клапейрона, связывающим матричный потенциал $h(\mathbf{x}t)$ и температуру $T(\mathbf{x}t)$ на фронте замерзания

$$h(T) = \frac{L_f}{g} \ln \frac{T}{T_f}, \quad T < T_f$$

где L_f — удельная теплота плавления, g — ускорение свободного падения, T_f — температура фазового перехода. Жидкое влагосодержание выражается через кривую водоудержания

$$\theta_l(T) = \theta_{\text{VG}}(h(T)),$$

а объёмная доля льда определяется как разность между полным и жидким влагосодержанием

$$\theta_{\text{ice}}(T) = \theta_w - \theta_l(T) = \theta_w - \theta_{\text{VG}}(h(T)).$$

Поток жидкой воды определяется законом Дарси [9]

$$q_w = -K(h, T)\nabla(h + z),$$

где $K(h, T)$ — эффективная гидравлическая проводимость, зависящая от матричного потенциала и температуры (через блокировку пор льдом), а член $h + z$ соответствует пьезометрическому напору. Объёмное влагосодержание жидкой фазы задаётся моделью ван Генухтена [10]

$$\theta(h) = \begin{cases} \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{[1 + (\alpha_{\text{VG}} [h])^{n_{\text{VG}}}]^{m_{\text{VG}}}}, & h < 0, \\ \theta_s, & h \geq 0, \end{cases}$$

где $m_{\text{VG}} = 1 - 1/n_{\text{VG}}$, $\theta_r(\mathbf{x})$ — остаточное влагосодержание, $\theta_s(\mathbf{x})$ — насыщенное влагосодержание, $\alpha_{\text{VG}}(\mathbf{x})$ — параметр масштаба капиллярного давления, $n_{\text{VG}}(\mathbf{x})$ — безразмерный показатель формы кривой влагоудержания. Относительная гидравлическая проводимость описывается в рамках модели Муалема–ван Генухтена [11]

$$K_r(h) = S_e^{1/2} \left[1 - \left(1 - S_e^{1/m_{\text{VG}}} \right)^{m_{\text{VG}}} \right]^2,$$

где эффективная степень насыщения определяется как

$$S_e = \frac{\theta(h) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}.$$

Доля льда в порах определяется из кривой замерзания грунта [12]

$$f_{\text{ice}}(T, \mathbf{x}) = \frac{\theta(h) - \theta_l(T, \mathbf{x})}{\theta_s(\mathbf{x})},$$

$$\theta_l(T, \mathbf{x}) = \begin{cases} \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\left[1 + \left(\alpha_{\text{VG}} \frac{L_f}{gT_f} [T - T_f] \right)^{n_{\text{VG}}} \right]^{m_{\text{VG}}}}, & T < T_f, \\ \theta(h), & T \geq T_f. \end{cases}$$

Уменьшение проводимости при замерзании моделируется по кубическому закону Козени–Кармана [13, 14]

$$f_K(T) = (1 - f_{\text{ice}}(T))^3.$$

Полная гидравлическая проводимость записывается в виде

$$K(h, T) = \max(K_s(\mathbf{x}) K_s(h) f_K(T), K_{\text{min}}),$$

где $K_s(\mathbf{x})$ — пространственно-зависимая насыщенная проводимость.

Теплоперенос в почве описывается уравнением с эффективной теплоёмкостью и учётом фазового перехода [15]

$$\rho C_{\text{eff}}(T, \theta) \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla [k_{\text{eff}}(T, \theta) \nabla T] + \rho_w c_w \mathbf{q}_w \nabla T + \nabla (L_v \mathbf{q}_v) = Qr, \quad (1.2)$$

где первый член описывает аккумуляцию тепла в среде, второй — теплопроводность, третий — адвекцию тепла жидкой фазой, а четвёртый — перенос скрытой теплоты, связанный с диффузией водяного пара. Эффективная объёмная теплоёмкость определяется следующим выражением:

$$\rho C_{\text{eff}}(T, \theta) = C_{\text{vol}}(T, \theta) + \rho_w L_f \theta(h) \left[\frac{\partial f_{\text{ice}}}{\partial T} \right],$$

где объёмная теплоёмкость почвенно-водной смеси задается формулой

$$C_{\text{vol}}(T, \theta) = (1 - \theta_s) \rho_s c_s + \theta_l \rho_w c_w + \theta_{\text{ice}} \rho_i c_i + (\theta_s - \theta_l - \theta_{\text{ice}}) \rho_a c_a.$$

Температурно-зависимая объёмная теплоёмкость влажной почвы определяется зависимостью

$$\rho_{\text{wet}}(T) = \rho_{\text{wet},0} (1 + \beta_T (T - T_0)).$$

Эффективная теплопроводность грунта задаётся соотношением

$$k_{\text{eff}}(T, \theta) = k_{\text{dry}} + \theta \left(k_{\text{wet},0} e^{\gamma(T-T_0)} - k_{\text{dry}} \right),$$

где k_{dry} — теплопроводность сухого грунта, $k_{\text{wet},0}$ — теплопроводность полностью водонасыщенного грунта при температуре T_0 , γ — температурный коэффициент.

Перенос водяного пара в поровом пространстве в консервативной форме относительно газонаполненной пористости описывается уравнением

$$\frac{\partial (\theta_g \rho_v)}{\partial t} + \nabla \mathbf{q}_v = S_v, \quad (1.3)$$

где поток водяного пара задаётся законом Фика

$$\mathbf{q}_v = -D(T, \theta_g) \nabla \rho_v.$$

Газонаполненная пористость θ_g определяется как объёмная доля газовой фазы в общем объёме почвы

$$\theta_g = \theta_s - \theta(h) (1 - f_{\text{ice}}) f_{\text{ice}} = \theta_s - \theta(h).$$

Эффективный коэффициент диффузии водяного пара в газовой фазе рассчитывается по модели Миллингтона–Куирка с поправочным коэффициентом Касса [16]

$$D_v(T, \theta_g) = D_v^0 \left(\frac{T}{273,15} \right)^{1,75} \frac{\theta_g^{10/3}}{\theta_s^2} \eta(\theta_g, \theta_s),$$

где поправочный множитель η имеет вид [17]

$$\eta = 9,5 + 3,0 \frac{\theta_g}{\theta_s} - 8,5 \exp \left[- \left(1 + \frac{2,6}{\sqrt{\theta_s}} \right) \frac{\theta_g}{\theta_s} \right], \quad \eta \geq 1.$$

Здесь D_v^0 — коэффициент молекулярной диффузии водяного пара в воздухе при 273,15 К. Объёмная скорость фазового перехода «жидкость–пар» в поровом пространстве задаётся выражением

$$S_v = k_{\text{evap}} \theta_g (\rho_v^{\text{sat}}(T) - \rho_v).$$

Насыщенная плотность водяного пара вычисляется по формуле Тетенса

$$\rho_v^{\text{sat}}(T) = \begin{cases} 4,85 \cdot 10^{-3} \exp \left(\frac{17,27(T - 273,15)}{T - 35,85} \right), & T \geq T_f, \\ 4,85 \cdot 10^{-3} \exp \left(\frac{21,87(T - 273,15)}{T - 7,65} \right), & T \leq T_f. \end{cases}$$

2. Начальные и граничные условия

Начальные распределения искомым переменных в расчётной области задаются в виде линейных профилей по вертикальной координате z . Начальный матричный потенциал влаги определяется выражением

$$h(x, z, 0) = -2,0 - 0,5 \left(1 - \frac{z}{L} \right),$$

что соответствует гидростатически равновесному распределению давления с небольшим градиентом по высоте. Начальное температурное поле задаётся линейной функцией

$$T(x, z, 0) = 268,0 + \frac{285,0 - 268,0}{L}z.$$

Начальная плотность водяного пара определяется как насыщенная при локальной температуре

$$\rho_v(x, z, 0) = 4,85 \cdot 10^{-3} \exp\left(\frac{17,27(T_0(z) - 273,15)}{T_0(z) - 35,85}\right),$$

где $T_0(z) = T(x, z, 0)$ — начальный температурный профиль.

На нижней границе Γ_3 температура фиксирована

$$T|_{\Gamma_3} = 268,0.$$

Для влаги на этой границе задаётся условие свободного дренажа

$$\mathbf{q}_w \mathbf{n} = K(h, T) \nabla H \mathbf{n},$$

На верхней границе Γ_4 , соответствующей поверхности почвы, тепловой режим описывается условием Робена

$$\left(-k_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial n}\right)\Big|_{\Gamma_4} = h_c(T - T_{\text{atm}}) - \alpha_s I_{\text{sun}}(t) - \rho_w c_w q_{\text{irr}}(T_w - T) - L_v \mathbf{q}_v \mathbf{n}.$$

Здесь h_c — коэффициент конвективного теплообмена, T_{atm} — температура воздуха, α_s — коэффициент поглощения солнечной радиации. Суточная инсоляция задаётся в виде функции $I_{\text{sun}}(t)$, орошение поверхности учитывается в виде заданного массового потока воды $q_{\text{irr}}(t)$.

Паровой обмен с атмосферой на верхней границе описывается условием Робена:

$$\left(-D_v \frac{\partial \rho_v}{\partial n} + k_{\text{atm}}(\rho_v - \rho_v^{\text{atm}})\right)\Big|_{\Gamma_4} = 0.$$

3. Численная реализация

Сопряжённая система уравнений (1.1), (1.2) и (1.3) решается в рамках вариационной постановки методом конечных элементов. Пространственная аппроксимация выполняется в смешанном функциональном пространстве

$$W_h = P_1 \times P_1 \times P_1,$$

где P_1 — непрерывные кусочно-линейные элементы Лагранжа первого порядка. Неизвестные поля матричного потенциала влаги h , температуры T и плотности водяного пара ρ_v аппроксимируются функциями из пространства W_h . Слабая форма системы получается стандартным умножением исходных уравнений на соответствующие тестовые функции $(v_h, v_T, v_{\rho_v}) \in W_h$ и последующим интегрированием по частям. Дискретизация по времени осуществляется неявной схемой Эйлера первого порядка с шагом Δt на интервале расчёта, состоящем из N временных шагов. Производные по времени аппроксимируются соотношением

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \approx \frac{\partial u}{\partial t}.$$

На каждом временном шаге получающаяся нелинейная система алгебраических уравнений решается методом Ньютона–Рафсона. Якобиан вариационной формы вычисляется автоматически средствами автоматического дифференцирования, $J = dF/dw$, что обеспечивает согласованность линейной аппроксимации с исходной нелинейной постановкой и устойчивость итерационного процесса.

4. Верификация модели

Верификация численной схемы выполнялась в три этапа:

- 1) проверка точности решения уравнения Ричардса на основе аналитического решения Филипа;
- 2) тестирование теплового блока по классическому решению Карслоу–Егера;
- 3) валидация полной связанной модели по натурным данным температурных профилей мерзлых грунтов Якутска из базы NSIDC G02189.

Подобная многоуровневая схема тестирования соответствует принятой в литературе методологии верификации гидротермических моделей и позволяет последовательно отделить численные ошибки от особенностей физической постановки задачи.

5. Верификация уравнения Ричардса

Для разделения численной погрешности и особенностей физической модели были проведены два теста. В первом тесте использована линейная форма уравнения Ричардса при постоянной гидравлической ёмкости $C = d\theta/dh = \text{const}$ что приводит к диффузионному уравнению с аналитическим решением Филипа для инфильтрации в однородной среде [2]. Численное решение на сетке 40×40 при времени $t = 1000$ с воспроизводит аналитический профиль влажности с высокой точностью: коэффициент детерминации составляет $R^2 = 0,9998$, среднеквадратичная ошибка $RMSE = 0,0005$, а средняя абсолютная ошибка $MAE \approx 0,0004$. Достигнутый уровень точности соответствует результатам эталонных верификаций решателей уравнения Ричардса, приведённых в работах [18, 19].

Во втором тесте рассматривалась нелинейная модель водоудерживания ван Генухтена при параметрах $\alpha = 0,7$, $n = 1,6$, $\theta_r = 0,15$, $\theta_s = 0,45$. Полученное численное решение корректно воспроизводит характерную форму фронта инфильтрации, наблюдаемую в реальных почвах. При этом значения ошибок составили $MAE = 0,005$ и $RMSE = 0,012$, коэффициент детерминации равен $R^2 = 0,871$.

6. Верификация уравнения теплопроводности

Для проверки уравнения теплопроводности использовано аналитическое решение Карслоу–Егера для полубесконечной среды с начальной температурой $T_0 = 273$ К и ступенчатым нагревом поверхности до $T_s = 373$ К. Данное решение является классическим тестом для моделей теплопереноса и широко используется при проверке численных моделей мерзлых грунтов [20]. Расчёт проводился при параметрах среды $\rho = 1500$ кг/м³, $c_p = 800$ Дж/(кг·К), $k = 1,5$ Вт/(м·К), что соответствует теплопроводности $\alpha = 1,25 \times 10^{-6}$ м²/с. Моделирование выполнялось в области глубиной 0,5 м с временным шагом 10 с. Среднее значение $RMSE$ за весь период расчёта составило 0,026 К, максимальная ошибка в начальный момент достигала 0,063 К, а к финальному времени уменьшалась до 0,011 К. Монотонное уменьшение ошибки свидетельствует об отсутствии накопления численной погрешности. Таким образом, точность численного решения существенно лучше порогового уровня 1 К, принятого в литературе для задач теплопереноса в криолитозоне.

7. Валидация по натурным данным (Якутск)

Полная связанная модель была валидирована по измеренным температурным профилям мерзлых грунтов Якутска (1971 г.), опубликованным в базе данных NSIDC G02189 [21]. Этот набор данных широко используется для проверки моделей теплопереноса в мерзлоте. Расчёт проводился для области глубиной 3,5 м с временным шагом 1 ч. Общий период моделирования составил два года, при этом первый год использовался в качестве периода инициализации. Параметры суглинистого грунта выбирались в соответствии с типичными значениями для Центральной Якутии. На верхней границе задавалось условие Робена с сезонным ходом температуры воздуха по данным NSIDC, тогда как на нижней границе фиксировалась температура вечной мерзлоты $T_{bot} = -5$ °С. Эффективный коэффициент

теплообмена $h_c = 0,5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ учитывал теплоизоляционное влияние снежного покрова толщиной около 50 см. Сравнение модельных и наблюдаемых температурных профилей показало высокую степень согласия. Для глубин 0,40–3,20 м значение $RMSE$ составляет 0,09 К в январе и 0,07 К в июле, а коэффициент детерминации достигает $R^2 = 0,9998$. Эти значения сопоставимы или превосходят точность современных моделей криолитозоны: CLM4.5 ($RMSE$ 0,3–1,2 К) [22], CryoGrid ($RMSE$ 0,5–0,8 К) [23], JSBACH ($RMSE < 0,5 \text{ К}$) [24].

8. Проверка балансов массы и энергии

Корректность численной реализации дополнительно контролировалась с помощью диагностики балансов массы воды (жидкой, ледяной и паровой фаз) и энергии на каждом временном шаге. Баланс массы водяного пара замыкался с машинной точностью. Изменение массы пара, вычисленное методом конечных элементов, составило $-0,042105 \text{ мг}$, тогда как сумма источников испарения и потоков через границу дала значение $-0,042108 \text{ мг}$. Абсолютная погрешность составила $3 \cdot 10^{-6} \text{ мг}$. Проверка баланса для суммарной массы воды (жидкая и ледяная фазы) дала аналогичный результат. Интегральное изменение водосодержания, рассчитанное по полю $\theta_l + (\rho_i/\rho_w)\theta_i$ составило $2,2 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3$ и в точности совпало с разностью между текущей и начальной массой воды в расчётной области. Сумма вкладов от испарения, конденсации, корневого поглощения и дренажа дала $-9,8651 \cdot 10^{-8} \text{ м}^3$. Расхождение между рассчитанным и предсказанным изменением массы составило $5 \cdot 10^{-15} \text{ м}^3$ (относительная ошибка менее $10^{-4} \%$).

Энергетический баланс сошелся с высокой точностью. Изменение внутренней энергии, найденное прямым интегрированием температурного поля, согласуется со значением, предсказанным балансом потоков. Абсолютная ошибка составила $3,6 \cdot 10^3 \text{ Дж}$, что соответствует относительной погрешности порядка 10 %.

Дополнительные физические проверки показали, что все вычисляемые поля оставались в допустимых диапазонах, энтропийное производство оставалось положительным, что подтверждает термодинамическую согласованность численной схемы.

Проведённые тесты демонстрируют строгую консервативность модели по массе воды (во всех фазах) и энергии, а также корректную реализацию источников и граничных потоков. На этом основании можно утверждать, что выявленные в дальнейшем эффекты являются следствием физики модели, а не численных артефактов.

9. Коллапс коэффициента диффузии почвенной влаги при промерзании

Анализ результатов работы модели выявил резкое изменение коэффициента диффузии почвенной влаги при переходе через фронт замерзания (рис. 1). Для талой зоны среднее значение коэффициента диффузии почвенной влаги составляет $D_{\text{eff}} (T > 0^\circ\text{C}) \approx 3,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. В мерзлой области профиля оно уменьшается до $D_{\text{eff}} (T < 0^\circ\text{C}) \approx 3,6 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}$ (рис. 2а). Исходя из полученных результатов, можем сделать вывод, что промерзание приводит к снижению коэффициента диффузии почвенной влаги более чем на четыре порядка величины.

Изучение вклада отдельных механизмов дает основание утверждать, что данный эффект обусловлен совместным действием двух процессов. Первый — геометрический: лед занимает часть порового пространства, и гидравлическая проводимость падает примерно в 158 раз. Второй — энергетический: вблизи температуры фазового перехода эффективная теплоёмкость системы резко возрастает за счет скрытой теплоты замерзания. В переходной зоне отношение латентной и гидравлической составляющих ёмкости достигает $C_{\text{latent}}/C_{\text{hyd}} \approx 260$ (рис. 2б), что дополнительно подавляет скорость перераспределения влаги.

Полученные результаты естественно интерпретируются в рамках перколяционной теории. Аппроксимация D_{eff} как функции доли жидкой фазы описывается степенной функцией $D_{\text{eff}} = D_0 (f_l - f_c)^\mu$ с порогом перколяции $f_c \approx 0,3$ и критическим показателем $\mu \approx 1,3$, что близко к классическому значению для двумерных случайных сред. Это означает, что коллапс коэффициента диффузии почвенной влаги связан с потерей связности жидкой фазы в поровом пространстве при росте ледяной фракции.

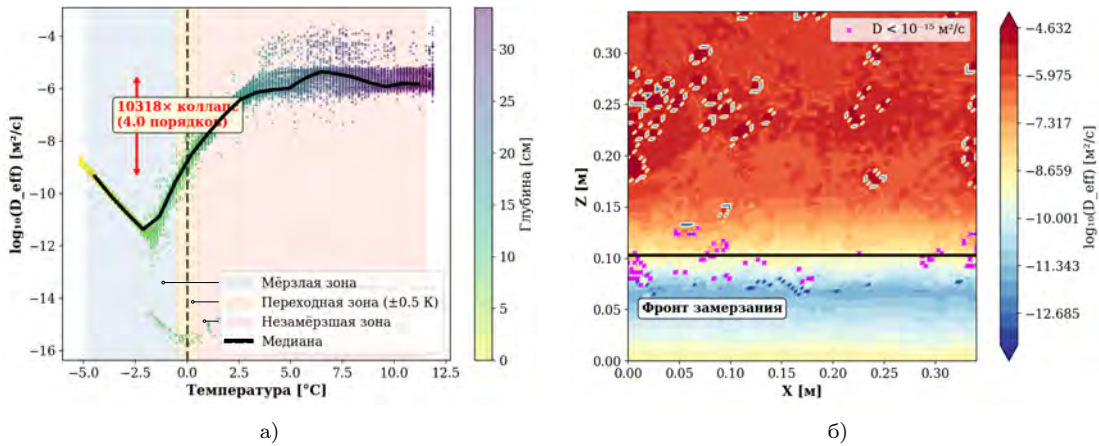


Рис. 1. Коллапс коэффициента диффузии почвенной влаги при промерзании гетерогенной почвы: а) зависимость $\log_{10}(D_{\text{эф}})$ от температуры. Точки окрашены по глубине, чёрной линией показана медианная кривая по температурным бинам. Зоны подписаны на рисунке: мёрзлая (синий), переходная ($\pm 0,5$ K) (оранжевый) и талая (красный). Стрелка показывает масштаб коллапса коэффициента диффузии при переходе через фронт заморзания; б) пространственное распределение $\log_{10}(D_{\text{эф}})$ в расчётной области. Черная изолиния соответствует фронту заморзания ($T = 0^\circ\text{C}$)

Fig. 1. Soil moisture diffusion coefficient collapse during freezing of heterogeneous soil: а) dependence of $\log_{10}(D_{\text{эф}})$ on temperature. The dots are colored by depth; the black line shows the median curve for temperature bins. The zones are labeled in the figure: frozen (blue), transition (± 0.5 K) (orange), and thawed (red). The arrow shows the scale of diffusion coefficient collapse upon transition through the freezing front; б) spatial distribution of $\log_{10}(D_{\text{эф}})$ in the computational domain. The black isoline corresponds to the freezing front ($T = 0^\circ\text{C}$)

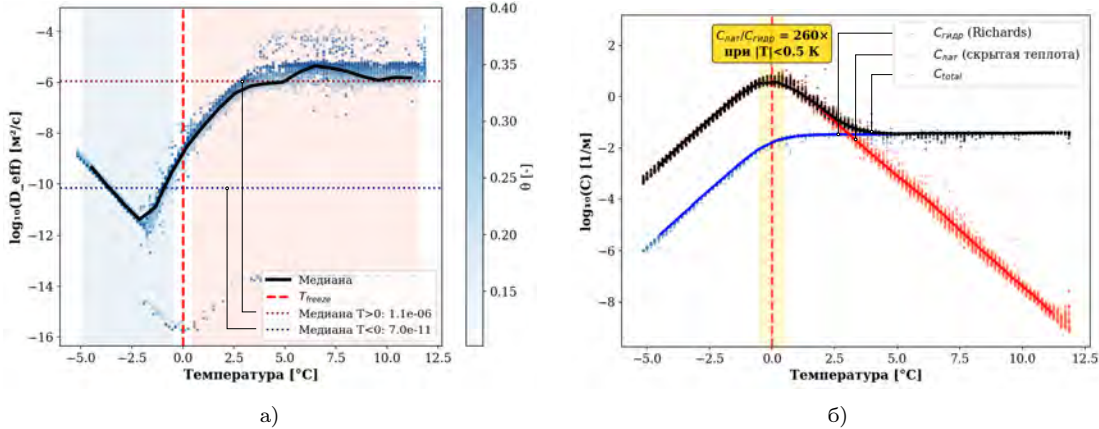


Рис. 2. Механизм коллапса коэффициента диффузии почвенной влаги: роль блокировки пор льдом и буферирования скрытой теплотой:

- а) коэффициент диффузии почвенной влаги $D_{\text{эф}} = K_{\text{fz}}/C_{\text{total}}$ в зависимости от температуры. Точки окрашены по объемной влажности θ , пунктирные линии показывают медианные значения в талой и мёрзлой зонах;
- б) компоненты коэффициента водоудержания. Гидравлическая ёмкость C_{hyd} , емкость за счет скрытой теплоты C_{lat} и суммарная C_{total} . Выделенная полоса обозначает переходную зону, в которой отношение $C_{\text{lat}}/C_{\text{hyd}}$ достигает максимума

Fig. 2. The mechanism of soil water diffusion coefficient collapse: the role of ice blockage and latent heat buffering: а) soil water diffusion coefficient $D_{\text{эф}} = K_{\text{fz}}/C_{\text{total}}$ as a function of temperature. The dots are colored by volumetric water content θ , the dashed lines show the median values in the thawed and frozen zones; б) components of the water retention coefficient. Hydraulic capacity C_{hyd} , latent heat capacity C_{lat} , and total C_{total} . The shaded band denotes the transition zone, where the ratio $C_{\text{lat}}/C_{\text{hyd}}$ reaches a maximum

Расчёты повторены при разных значениях нижнего предела гидравлической проводимости. Даже при ограничении $K_{\min} = 10^{-12}$ м/с снижение D_{eff} превышает четыре порядка. Это подтверждает, что наблюдаемый эффект коллапса устойчив и имеет физическое, а не алгоритмическое происхождение.

Таким образом, результаты моделирования свидетельствуют о существовании критического режима переноса влаги вблизи фронта замерзания, при котором совместное воздействие геометрической блокировки пор и увеличения латентной теплоемкости приводит к резкому снижению коэффициента диффузии почвенной влаги.

10. Формула коэффициента диффузии почвенной влаги в замерзающей гетерогенной почве

Для замерзающей пористой среды с учетом блокировки пор льдом и подавления влагопереноса скрытой теплотой фазового перехода коэффициент диффузии почвенной влаги можно представить в виде

$$\frac{D_{\text{eff}}(\mathbf{x}, T)}{D_0(\mathbf{x})} = \frac{[1 - f_{\text{ice}}(T)]^3}{1 + B(\mathbf{x}, T) \left| \frac{\partial f_{\text{ice}}}{\partial T} \right|}, \quad (10.1)$$

где $D_{\text{eff}}(\mathbf{x}, T)$ обозначает коэффициент диффузии почвенной влаги, $D_0(\mathbf{x})$ соответствует коэффициенту диффузии при отсутствии льда ($T \geq T_0$), а $f_{\text{ice}}(T)$ характеризует долю льда в поровой воде. Связь гидравлических и теплофизических процессов описывается безразмерным параметром

$$B(\mathbf{x}, T) = \frac{\rho_w L_f \theta_s(\mathbf{x}, T)}{C_V(\mathbf{x}, T)}, \quad (10.2)$$

где ρ_w — плотность воды, L_f — удельная скрытая теплота давления, θ_s — объемная влажность при насыщении, C_V — объемная теплоемкость среды. Объемная теплоемкость определяется следующей формулой:

$$C_V(\mathbf{x}, T) = (1 - \phi) \rho_s c_s + \theta_l \rho_w c_w + \theta_i \rho_i c_i$$

где ϕ — пористость, ρ_s, ρ_w, ρ_i — плотность твердой фазы, воды и льда, c_s, c_w, c_i — удельные теплоемкости, θ_l — объемная доля жидкой воды, θ_i — объемная доля льда.

Жидкое влагосодержание задаётся модифицированной зависимостью Ван-Генухтена

$$\theta_l(\mathbf{x}, T) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) [1 + (\alpha_{f_{rz}} |h^*(T)|)^n]^{-m}, \quad T \leq T_0,$$

где θ_r — остаточная влажность, $\alpha_{f_{rz}}, n, m$ — эмпирические параметры, T_0 — температура фазового перехода. Объемная доля льда определяется через жидкое влагосодержание

$$f_{\text{ice}}(T) = \max\left(0, 1 - \frac{\theta_l(T)}{\theta_s}\right),$$

где эффективный капиллярный напор $h^*(T)$ задается соотношением Клаузиуса–Клапейрона

$$h^*(T) = \frac{L_f (T - T_0)}{g T_0}.$$

Полученное выражение (10.1) допускает интерпретацию через безразмерный параметр

$$\Pi \equiv B(\mathbf{x}, T) \left| \frac{\partial f_{\text{ice}}}{\partial T} \right|, \quad (10.3)$$

которая полностью характеризует режим деградации гидравлической подвижности при промерзании (рис. 3а). При $\Pi \ll 1$ знаменатель стремится к единице, и D_{eff} определяется исключительно геометрическим фактором блокировки порового пространства: $D_{\text{eff}}/D_0 \approx (1 - f)^3$

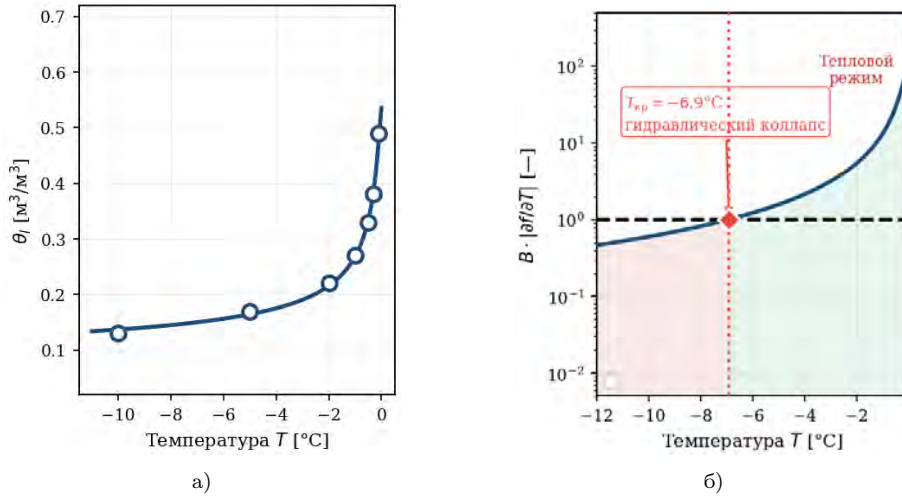


Рис. 3. Верификация кривой замерзания и критерий гидравлического коллапса для суглинка: а) зависимость объемного влагосодержания жидкой фазы θ_l от температуры. Сплошная линия соответствует модели Ван Генухтена с подогнанными параметрами, маркеры обозначают экспериментальные данные [5];

б) температурная зависимость безразмерного параметра $\Pi \equiv B(\mathbf{x}, T) |\partial f_{ice}/\partial T|$, определяющего режим деградации фильтрации. Пунктирная горизонталь соответствует критерию $\Pi = 1$, точка обозначает критическую температуру T_{cr} , при которой происходит смена режимов.

Область $\Pi > 1$ (красный) соответствует тепловому режиму, в котором фазовая инерция, обусловленная скрытой теплотой, подавляет гидравлический перенос. Область $\Pi < 1$ (зеленый) соответствует кинематическому режиму, где деградация фильтрации определяется преимущественно геометрической блокировкой пор льдом

Fig. 3. Verification of the freezing curve and the hydraulic collapse criterion for loam:

a) Dependence of the volumetric moisture content of the liquid phase θ_l on temperature. The solid line corresponds to the van Genuchten model with fitted parameters, markers denote experimental data [5];

b) Temperature dependence of the dimensionless parameter $\Pi \equiv B(\mathbf{x}, T) |\partial f_{ice}/\partial T|$, which determines the filtration degradation regime. The dotted horizontal line corresponds to the criterion $\Pi = 1$, the red dot denotes the critical temperature T_{cr} , at which the regimes change. The region $\Pi > 1$ (red) corresponds to the thermal regime, in which the phase inertia caused by latent heat suppresses hydraulic transport. The region $\Pi < 1$ (green) corresponds to the kinematic regime, where filtration degradation is determined predominantly by geometric blocking of pores by ice

Данный кинематический режим реализуется при глубоких отрицательных температурах, когда кривая замерзания выходит на плато, $|\partial f/\partial T| \rightarrow 0$, фазовый переход практически завершен, а подавление фильтрации обусловлено уменьшением эффективной пористости. В противоположном пределе $\Pi \gg 1$ доминирует влияние фазовых превращений, и выполняется соотношение $D_{\text{eff}}/D_0 \approx [(1-f)^3 C_V] / [\rho_w L_f |\partial \theta_l/\partial T|]$. В этом случае описывается тепловой режим, при котором динамика системы определяется фазовой инерцией, обусловленной скрытой теплотой фазового перехода. Вблизи точки замерзания, где через равновесие Клапейрона $h^*(T) \propto [T]$ для модели ван Генухтена выполняется соотношение $|\partial \theta_l/\partial T| \propto [T]^{n-1}$, и $D_{\text{eff}}/D_0 \rightarrow 0$ как $[T]^{n-1}$. Скорость коллапса задается показателем n и связывает характер деградации проводимости с текстурой почвы. Граница между режимами задается условием $\Pi = 1$, приводит к неявному аналитическому уравнению для критической температуры T_{cr} (рис. 3б). Таким образом, формула выявляет два принципиально различных механизма подавления фильтрации: геометрическую блокировку пор и термодинамическую фазовую инерцию.

Заключение

В работе разработана математическая модель сопряжённого теплопереноса с фазовыми переходами вода–лед–пар в гетерогенных пористых грунтах и проведен численный

анализ процессов влагопереноса в условиях промерзания. Основу модели составляет система уравнений Ричардса, диффузии водяного пара и теплопереноса, связанных через температурно-зависимую влагопроводность и термодинамическое равновесие фаз.

Результаты исследования показали, что прохождение фронта замерзания сопровождается резким снижением коэффициента диффузии почвенной влаги. В талой зоне характерные значения коэффициента диффузии составляют $D_{\text{eff}} \approx 3,7 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, тогда как в мерзлой зоне они уменьшаются до $D_{\text{eff}} \approx 3,6 \times 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}$. Таким образом, промерзание приводит к коллапсу коэффициента диффузии почвенной влаги более чем на четыре порядка величины, что соответствует критическому подавлению влагопереноса вблизи фронта замерзания.

Основываясь на анализе структуры уравнений, сделано заключение о том, что данный эффект обусловлен совместным действием двух физических механизмов. Первый механизм связан с геометрической блокировкой порового пространства образующимся льдом и приводит к уменьшению влагопроводности среды. Второй механизм обусловлен резким ростом эффективной влагоемкости системы вследствие скрытой теплоты фазового перехода. Вблизи температуры замерзания отношение латентной и гидравлической составляющих ёмкости достигает $C_{\text{latent}}/C_{\text{hyd}} \approx 260$, что приводит к существенному замедлению перераспределения.

В результаты численного анализа пространственно-гетерогенной среды позволяют сделать вывод о том, что деградация транспортной способности среды имеет перколяционную природу. Зависимость коэффициента диффузии почвенной влаги от доли жидкой фазы имеет степенной характер и описывается выражением $D_{\text{eff}} = D_0 (f_l - f_c)^\mu$, где $f_c \approx 0,3$ соответствует порогу перколяции, а критический показатель $\mu \approx 1,3$ близок к теоретическому значению для случайных пористых сред. Это означает, что коллапс диффузии влаги связан с потерей связности жидкой фазы в поровом пространстве при росте ледяной фракции. Устойчивость наблюдаемого эффекта проверена путём варьирования минимальной гидравлической проводимости в физически обоснованных пределах; его численное происхождение исключено. Таким образом, подтверждена физическая природа снижения коэффициента диффузии влаги.

Аналитическое выражение для относительного коэффициента диффузии почвенной влаги замерзающей гетерогенной почвы, учитывающего одновременно геометрическую блокировку пор льдом и подавление влагопереноса вследствие роста эффективной влагоемкости, представляет главный результат работы. Полученная формула позволяет представить коэффициент диффузии в компактной безразмерной форме и ввести управляющий параметр Π , определяющий режим подавления влагопереноса при промерзании. Показано, что при $\Pi \ll 1$ реализуется кинематический режим, в котором подавление переноса определяется главным образом геометрическим уменьшением эффективной пористости, тогда как при $\Pi \gg 1$ доминирует термодинамический режим, связанный с фазовой инерцией системы и ростом эффективной влагоемкости. Тем самым полученное аналитическое выражение устанавливает количественный критерий относительного вклада геометрического и термодинамического механизмов подавления влагопереноса.

Научная новизна работы заключается в следующем.

- численно обнаружен и количественно охарактеризован коллапс коэффициента диффузии почвенной влаги при прохождении фронта замерзания в гетерогенных пористых грунтах, приводящий к снижению интенсивности влагопереноса более чем на четыре порядка величины.
- показано, что деградация транспортных свойств среды имеет перколяционную природу и связана с потерей связности жидкой фазы при росте ледяной фракции.
- получено аналитическое выражение для относительного коэффициента диффузии грунтовой влаги, связывающее гидравлические свойства почвы с ее теплофизическими характеристиками и вводящее безразмерный параметр, определяющий режим подавления влагопереноса при промерзании.

Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что предложенное аналитическое выражение (10.3) представляет собой компактную редуцированную модель, позволяющую описывать подавление влагопереноса в промерзающих грунтах без необходимости полного решения связанной системы уравнений теплопереноса. Это открывает возможность его непосредственного использования в качестве физически обоснованной па-

раметризации в моделях земной поверхности регионального и глобального масштаба (CLM, JSBACH, CryoGrid), моделях динамики сезонной и многолетней мерзлоты, а также в инженерных расчётах устойчивости грунтовых оснований и при прогнозировании гидрологического отклика криолитозоны на современные климатические изменения. В частности, для инженерных расчётов оснований критическая температура $T_{кр}$ позволяет заранее оценить глубину, на которой деградация фильтрации перейдёт в термодинамический режим — это напрямую связано с прогнозом морозного пучения; для дорожного строительства в криолитозоне: параметр Π позволяет ранжировать грунты по риску накопления влаги перед фронтом замерзания (классическая причина деформаций земляного полотна); для параметризаций в схемах CLM/JSBACH выражение (10.1) может быть использовано как физически обоснованная модификация эмпирического импедансного множителя Лундина, что позволяет частично заменить эмпирическую калибровку аналитической зависимостью.

Полученные результаты вносят вклад в развитие теории тепло-массопереноса в промерзающих пористых средах и создают основу для дальнейшего совершенствования методов численного моделирования процессов промерзания грунтов.

Литература [References]

1. Avraham, E.M., Mathematical modeling of coupled heat and mass transfer with phase transitions in heterogeneous porous soils: mechanism of soil moisture diffusivity collapse during freezing. *EarthArXiv*, 2026, 12 March. DOI: [10.31223/X5FB5S](https://doi.org/10.31223/X5FB5S)
2. Philip, J.R., The theory of infiltration: 1. The infiltration equation and its solution. *Soil Science*, 1957, vol. 83, iss. 5, pp. 345–357. DOI: [10.1097/00010694-195705000-00005](https://doi.org/10.1097/00010694-195705000-00005)
3. Šimůnek, J., van Genuchten, M.Th., Šejna, M., Development and Applications of the HYDRUS and STANMOD Software Packages and Related Codes. *Vadose Zone Journal*, 2008, vol. 7, iss. 2, pp. 587–600. DOI: [10.2136/vzj2007.0077](https://doi.org/10.2136/vzj2007.0077)
4. Lundin, L.-C., Hydraulic properties in an operational model of frozen soil. *Journal of Hydrology*, 1990, vol. 118, iss. 1–4, pp. 289–310. DOI: [10.1016/0022-1694\(90\)90264-X](https://doi.org/10.1016/0022-1694(90)90264-X)
5. Richards, L.A., Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*, 1931, vol. 1, iss. 5, pp. 318–333. DOI: [10.1063/1.1745010](https://doi.org/10.1063/1.1745010)
6. Hansson, K., Šimůnek, J., Mizoguchi, M., Lundin, L.-C., van Genuchten, M.Th., Water flow and heat transport in frozen soil: numerical solution and freeze-thaw applications. *Vadose Zone Journal*, 2004, vol. 3, iss. 2, pp. 693–704. DOI: [10.2136/vzj2004.0693](https://doi.org/10.2136/vzj2004.0693)
7. Koopmans, R.W.R., Miller, R.D., Soil freezing and soil water characteristic curves. *Soil Science Society of America Proceedings*, 1966, vol. 30, iss. 6, pp. 680–685. DOI: [10.2136/sssaj1966.03615995003000060011x](https://doi.org/10.2136/sssaj1966.03615995003000060011x)
8. Dall'Amico, M., Endrizzi, S., Gruber, S., Rigon, R., A robust and energy-conserving model of freezing variably-saturated soil. *The Cryosphere*, 2011, vol. 5, iss. 2, pp. 469–484. DOI: [10.5194/tc-5-469-2011](https://doi.org/10.5194/tc-5-469-2011)
9. Darcy, H., *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Paris, Victor Dalmont, 1856.
10. van Genuchten, M.Th., A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*, 1980, vol. 44, iss. 5, pp. 892–898. DOI: [10.2136/sssaj1980.03615995004400050002x](https://doi.org/10.2136/sssaj1980.03615995004400050002x)
11. Mualem, Y., A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resources Research*, 1976, vol. 12, iss. 3, pp. 513–522. DOI: [10.1029/WR012i003p00513](https://doi.org/10.1029/WR012i003p00513)
12. Spaans, E.J.A., Baker, J.M., The soil freezing characteristic: its measurement and similarity to the soil moisture characteristic. *Soil Science Society of America Journal*, 1996, vol. 60, iss. 1, pp. 13–19. DOI: [10.2136/sssaj1996.03615995006000010005x](https://doi.org/10.2136/sssaj1996.03615995006000010005x)
13. Kozeny, J., Über kapillare Leitung des Wassers im Boden. *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien*, 1927, bd. 136, s. 271–306.
14. Carman, P.C., Fluid flow through granular beds. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*, 1937, vol. 15, pp. 150–166.
15. de Vries, D.A., Simultaneous transfer of heat and moisture in porous media. *Transactions of the American Geophysical Union*, 1958, vol. 39, iss. 5, pp. 909–916. DOI: [10.1029/TR039i005p00909](https://doi.org/10.1029/TR039i005p00909)
16. Cass, A., Campbell, G.S., Jones, T.L., Enhancement of thermal water vapor diffusion in soil. *Soil Science Society of America Journal*, 1984, vol. 48, iss. 1, pp. 25–32.

DOI: [10.2136/sssaj1984.03615995004800010005x](https://doi.org/10.2136/sssaj1984.03615995004800010005x)

17. Massman, W.J. A review of the molecular diffusivities of H₂O, CO₂, CH₄, CO, O₃, SO₂, NH₃, N₂O, NO, and NO₂ in air, O₂ and N₂ near STP. *Atmospheric Environment*, 1998, vol. 32, iss. 6, pp. 1111–1127. DOI: [10.1016/S1352-2310\(97\)00391-9](https://doi.org/10.1016/S1352-2310(97)00391-9)
18. Celia, M.A., Bouloutas, E.T., Zarba, R.L., A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water Resources Research*, 1990, vol. 26, no. 7, pp. 1483–1496. DOI: [10.1029/WR026i007p01483](https://doi.org/10.1029/WR026i007p01483)
19. Zha, Y., Yang, J., Yin, L., Zhang, Y., Zeng, W., Shi, L., A modified Picard iteration scheme for overcoming numerical difficulties of simulating infiltration into dry soil. *Journal of Hydrology*, 2017, vol. 551, pp. 56–69. DOI: [10.1016/j.jhydrol.2017.05.053](https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2017.05.053)
20. Carslaw, H.S., Jaeger, J.C., *Conduction of Heat in Solids*. 2nd ed. Oxford, Oxford University Press, 1959.
21. Zhang, T., Frauenfeld, O.W., *Soil Temperature and Active/Permafrost Layer Data over Global Land Areas*. Boulder, NSIDC, 2011. Dataset G02189. DOI: [10.7265/N5ZG6QF0](https://doi.org/10.7265/N5ZG6QF0)
22. Oleson, K.W., Lawrence, D.M., Bonan, G.B. et al. Technical Description of Version 4.5 of the Community Land Model (CLM). *NCAR Technical Note NCAR/TN-503+STR*. Boulder, NCAR, 2013. DOI: [10.5065/D6RR1W7M](https://doi.org/10.5065/D6RR1W7M)
23. Westermann, S., Schuler, T.V., Gislås, K., Eitzelmüller, B., Transient thermal modeling of permafrost conditions in Southern Norway. *The Cryosphere*, 2013, vol. 7, iss. 2, pp. 719–739. DOI: [10.5194/tc-7-719-2013](https://doi.org/10.5194/tc-7-719-2013)
24. Ekici, A., Beer, C., Hagemann, S., Boike, J., Langer, M., Hauck, C., Simulating high-latitude permafrost regions by the JSBACH terrestrial ecosystem model. *Geoscientific Model Development*, 2014, vol. 7, iss. 2, pp. 631–647. DOI: [10.5194/gmd-7-631-2014](https://doi.org/10.5194/gmd-7-631-2014)