

УДК 539.3

EDN: SCXSDQ DOI: 10.31429/vestnik-23-2-69-76

Дисперсионные характеристики и частотно-зависимое затухание изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на обобщенном вязкоупругом основании

А. О. Ленин  

Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального исследовательского центра Института прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, ул. Белинского, 85, 603024, Россия

✉ Ленин Алексей Олегович; ORCID 0009-0008-2784-5237; e-mail: lehan_lenin@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача о распространении изгибных волн в бесконечной балке Бернулли–Эйлера, лежащей на обобщённом вязкоупругом основании. Особенность модели заключается в учёте как продольных, так и поперечных компонент упругости и демпфирования основания, что позволяет более адекватно описывать реакцию реальных механических систем. Целью работы является получение и анализ дисперсионного уравнения в случае комплексного волнового числа, определение фазовой и групповой скоростей, коэффициента пространственного частотно-зависимого затухания, а также исследование влияния параметров демпфирования на формирование запрещённых частотных зон и аномальных дисперсионных эффектов.

Ключевые слова: балка Бернулли–Эйлера, обобщенное вязкоупругое основание, изгибная волна, дисперсия, частотно-зависимое затухание.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания на проведение фундаментальных научных исследований на 2024–2026 гг. (FFUF-2024-0031, № НИОКР 1023032800130-3-2.3.2).

Цитирование: Ленин А. О. Дисперсионные характеристики и частотно-зависимое затухание изгибных волн, распространяющихся в балке, лежащей на обобщенном вязкоупругом основании // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2026. Т. 23, № 2. С. 69–76. EDN: SCXSDQ. DOI: 10.31429/vestnik-23-2-69-76

Поступила 24 марта 2026 г. После доработки 22 мая 2026 г. Принято 1 июня 2026 г. Публикация 24 июня 2026 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2026. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Dispersion Characteristics and Frequency-Dependent Attenuation of Bending Waves Propagating in a Beam, Lying on a Generalized Viscoelastic Foundation

А. О. Lenin  

Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Science – Branch of Federal Research Center “A.V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences”, 85, Belinskogo str., Nizhny Novgorod, 603024, Russia

✉ Alexey O. Lenin; ORCID 0009-0008-2784-5237; e-mail: lehan_lenin@mail.ru

Abstract. The problem of the propagation of flexural waves in an infinite Bernoulli–Euler beam lying on a generalized viscoelastic foundation is considered. The peculiarity of the model is that it takes into account both longitudinal and transverse components of elasticity and damping of the base, which makes it possible to more adequately describe the response of real mechanical systems. The purpose of the work is to obtain and analyze the dispersion equation in the case of a complex wave number, determine the phase and group velocities, the coefficient of spatial frequency-dependent attenuation, as well as study the influence of damping parameters on the formation of forbidden frequency zones and anomalous dispersion effects.

Keywords: Euler-Bernoulli beam, generalized viscoelastic foundation, bending wave, dispersion, frequency-dependent attenuation.

Funding. The work carried out within the state assignment for fundamental scientific research for 2024–2026 (topic FFUF-2024-2026-0031, No 1023032800130-3-2.3.2).

Cite as: Lenin, A. O., Dispersion characteristics and frequency-dependent attenuation of bending waves propagating in a beam, lying on a generalized viscoelastic foundation. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2026, vol. 23, no. 2, pp. 69–76. DOI: 10.31429/vestnik-23-2-69-76

Received 24 March 2026. Revised 22 May 2026. Accepted 1 June 2026. Published 24 June 2026.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2026. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Исследование распространения и затухания изгибных волн в конструкциях с распределённым демпфированием представляет значительный практический интерес для задач виброзащиты [1, 2], диагностики и проектирования акустических метаматериалов [3, 4]. В работах, посвящённых балкам, лежащим на вязкоупругих основаниях, и (или) балкам, изготовленным из вязкоупругих материалов [5], анализ дисперсионных свойств часто проводится в рамках задачи Коши — с действительным волновым числом и комплексной частотой, что соответствует временному затуханию волн. Однако в инженерных приложениях, таких как анализ вибраций рельсовых путей [6–8], строительных конструкций [9] или композитных панелей [4], часто более актуальным является режим пространственного затухания волн, возникающий при гармоническом внешнем воздействии. В этом случае частота колебаний является действительной величиной, заданной источником, а волновое число становится комплексным, описывая как распространение, так и экспоненциальное ослабление волны по координате.

В данной работе рассматривается задача о распространении изгибных волн в бесконечной балке Бернулли–Эйлера, лежащей на обобщённом вязкоупругом основании. Особенностью модели является учёт как продольных, так и поперечных компонент упругости и демпфирования основания, что позволяет более адекватно описывать реакцию реальных механических систем.

В настоящее время вязкоупругие свойства деформируемого основания, на которое опирается балка, описываются не классической моделью Винклера, а более сложными (обобщёнными) моделями (например, Пастернака, Власова–Леонтьева, Хетены) [10, 11], или моделями, содержащими дробные производные [12–14], что может оказать существенное влияние на дисперсионные характеристики, закономерности затухания изгибных волн и, следовательно, требует дополнительного изучения.

1. Математическая модель и дисперсионное уравнение

Рассматривается бесконечная балка постоянного поперечного сечения (модель Бернулли–Эйлера), лежащая на линейном вязкоупругом основании обобщённого типа. Основание характеризуется коэффициентами жёсткости: h_1 (поперечная жёсткость) и h_2 (продольная/сдвиговая жёсткость), коэффициентами демпфирования v_1 (поперечное демпфирование) и v_2 (продольное демпфирование).

Уравнение поперечных колебаний балки имеет вид

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + h_1 w + v_1 \frac{\partial w}{\partial t} - 2h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - v_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} = 0, \quad (1.1)$$

где $w(x, t)$ — перемещение частиц срединной линии балки при изгибе, ρ — плотность материала, F — площадь поперечного сечения балки, E — модуль Юнга, J — осевой момент инерции,

Введение безразмерных величин для перемещения, координаты и времени

$$\tilde{W} = \frac{w}{w_0}; \quad \tau = \frac{t}{T}; \quad z = \frac{x}{X}, \quad (1.2)$$

где w_0 — максимальное поперечное перемещение, при котором растяжимостью срединной линии балки можно пренебречь, приводит уравнение (1.1) к виду

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial z^4} + \tilde{w} + \tilde{v}_1 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau} - \frac{2h_2}{\sqrt{h_1 EJ}} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} - \varepsilon h \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial z^2 \partial \tau} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь $\tilde{v}_1 = v_1/\sqrt{\rho F h_1}$ — параметр, включающий в себя коэффициент продольного демпфирования v_1 , площадь поперечного сечения балки F , плотность материала ρ и коэффициенты жесткости упругого основания h_1 ; $\varepsilon h = v_2/\sqrt{\rho F E J}$ — параметр, включающий в себя коэффициент продольного демпфирования v_2 , площадь поперечного сечения балки, плотность материала, жесткость балки (EJ).

Далее исследуется влияние продольно-поперечного упруго-вязкого основания на параметры изгибной волны, распространяющейся в балке. Решение уравнения (1.3) ищется в виде бегущей гармонической волны:

$$\tilde{w} = A e^{i(\Omega \tau - K z)}, \quad (1.4)$$

где A — безразмерная комплексная амплитуда, Ω — безразмерная частота и K — безразмерное волновое число.

Подстановка (1.4) в (1.5) приводит к комплексному дисперсионному уравнению:

$$-\Omega^2 + K^4 + h + \varepsilon h K i \Omega = 0. \quad (1.5)$$

2. Анализ дисперсионных характеристик и частотно-зависимого затухания

При анализе дисперсионного уравнения (1.5) считается, что частота Ω является действительной величиной, а волновое число K комплексной величиной:

$$K = (K_1 + i K_2).$$

Выделение действительной и мнимой частей позволяет получить из (1.5) систему двух алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -\Omega^2 + K_1^4 - 6K_1^2 K_2^2 + K_2^4 + h - 2\varepsilon h K_1 K_2 \Omega = 0, \\ 4K_1^3 K_2 - 4K_1 K_2^3 + \varepsilon h K_1^2 \Omega - \varepsilon h K_2^2 \Omega = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Анализ системы (2.1) показывает, что в длинноволновом диапазоне (то есть при малом K_1) и при отсутствии диссипации ($K_2 = 0$) дисперсионное уравнение допускает асимптотическое решение

$$\Omega \approx \sqrt{h_1 + K_1^4}. \quad (2.2)$$

Данное соотношение показывает, что даже при нулевом волновом числе ($K_1 \rightarrow 0$) в системе существует минимальная действительная частота $\Omega_{\min} = \sqrt{h_1}$, обусловленная упругостью основания. При увеличении K_1 дисперсия становится определяющей и зависимость $\Omega(K_1)$ приближается к классическому закону дисперсии для балки Бернулли–Эйлера: $\Omega \sim K_1^2$.

На рис. 1 представлены дисперсионные кривые $\Omega(K_1)$ для трёх значений безразмерного коэффициента жёсткости основания h . Видно, что при $K \rightarrow 0$ частота стремится к нижней границе частотного диапазона, в котором возможны распространяющиеся волны. С увеличением h эта граница смещается вверх. В области больших волновых чисел ($K_1 \gg h^{1/4}$) дисперсионные кривые для различных h практически совпадают и следуют закону $\Omega \sim K_1^2$, характерному для балки Бернулли–Эйлера без основания. Таким образом, влияние упругого основания существенно лишь в длинноволновой части спектра, определяя низкочастотную полосу непропускания и начальный участок дисперсионной зависимости.

Фазовая скорость связана с действительной частью волнового числа соответствием:

$$V_\phi \approx \frac{\sqrt{h + K_1^4}}{K_1}. \quad (2.3)$$

При малых K_1 скорость ведёт себя как $V_\phi \approx \sqrt{h}/K_1$, резко возрастающая при уменьшении длины волны из-за влияния основания. При увеличении K_1 зависимость становится линейной: $V_\phi \approx K_1$, что соответствует свободной балке. Кривая имеет минимум при $K_1 = h^{1/4}$, где скорость равна $\sqrt{2}h^{1/4}$.

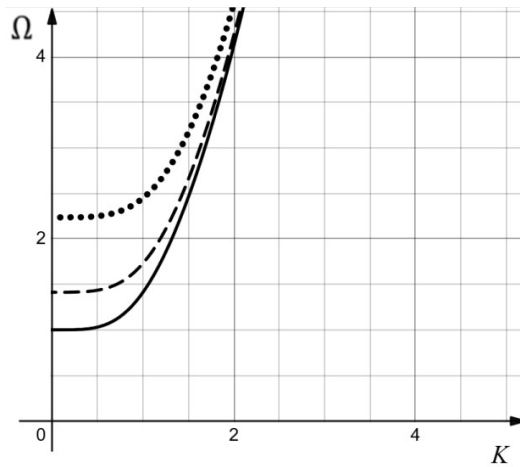


Рис. 1. Дисперсионная зависимость в длинноволновом диапазоне

Fig. 1. Dispersion dependence in the long-wave range

Из рис. 2 следует, что рост h (при $h = 0, 1, 5$) сопровождается смещением минимума функции фазовой скорости в зависимости от действительной части волнового числа вправо и вверх. Увеличение K_1 приводит к схождению кривых, что свидетельствует об ослаблении влияния упругого основания. Полученные данные открывают возможность регулировать дисперсионные свойства волн путём изменения жёсткости основания.

Групповая скорость связана с действительной частью волнового числа соотношением (рис. 3)

$$V_{гр} \approx \frac{2K_1^3}{\sqrt{h + K_1^4}}. \quad (2.4)$$

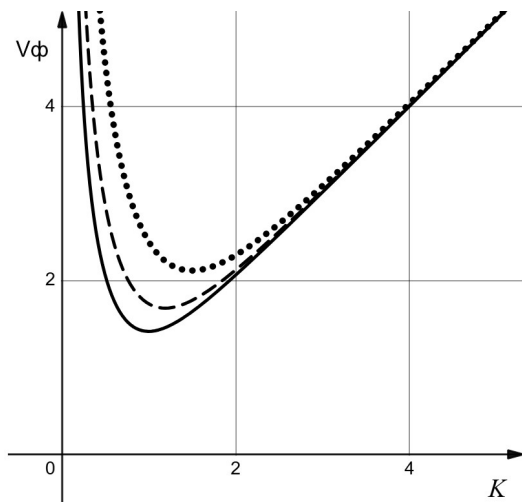


Рис. 2. Зависимость фазовой скорости изгибных волн от действительной части волнового числа в длинноволновом диапазоне

Fig. 2. Dependence of the phase velocity of bending waves on the real part of the wave number in the long-wave range

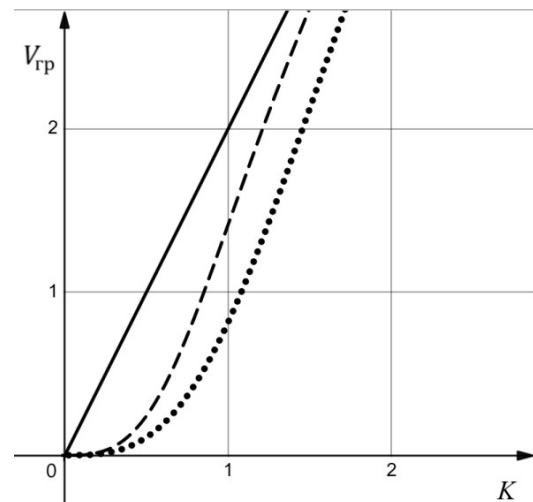


Рис. 3. Зависимость групповой скорости изгибной волны от действительной части волнового числа в длинноволновом диапазоне

Fig. 3. Dependence of the group velocity of a bending wave on the real part of the wave number in the long-wave range

Рассмотрим зависимость групповой скорости от действительной части волнового числа K_1 . Когда $K_1 \rightarrow 0$, групповая скорость стремится к нулю, приближаясь к виду $V_{гр} \sim 2K_1^3/\sqrt{h}$. В пределе $K_1 \rightarrow \infty$ она ведётся себя как $V_{гр} \approx 2K_1$, что указывает на пренебрежимо малое влияние основания при высоких K_1 . Зависимость имеет максимум, положение которого определяется параметром h , что отражает переход от аномальной к нормальной дисперсии.

График групповой скорости для значений $h = 0$, $h = 1$ и $h = 5$ иллюстрирует это поведение. При отсутствии основания ($h = 0$) кривая представляет собой прямую линию, начинающуюся из начала координат. При ненулевой жёсткости основания кривые приобретают выраженный максимум, который смещается в область больших K_1 с увеличением h . После максимума все кривые асимптотически приближаются к линейной зависимости для $h = 0$, подтверждая, что влияние основания существенно только в области малых и средних волновых чисел. Полученные зависимости показывают, что, варьируя жёсткость основания, можно управлять эффективностью переноса энергии на разных частотах.

Затухание в длинноволновом диапазоне определяется зависимостью

$$K_2 \approx -\frac{\varepsilon h \Omega}{4K_1}, \quad (2.5)$$

позволяющей оценить отношение постоянной распространения (K_1) к коэффициенту затухания (K_2)

$$\left| \frac{K_1}{K_2} \right| \approx \frac{v_2 \Omega}{4\sqrt{\rho F E J}}. \quad (2.6)$$

Формула (2.6) представляет собой отношения действительной части комплексного волнового числа к его мнимой части от частоты Ω . На рис. 4 приведены три кривые для разных значений коэффициента продольного демпфирования: сплошная линия $v_2 = 1$, пунктирная — $v_2 = 2$, а штрих-пунктирная — $v_2 = 3$. Все три кривые исходят из нуля и с ростом частоты линейно увеличиваются. При увеличении значения v_2 , тем больше значения отношения при одной и той же частоте. Это означает что отношение постоянной распространения K_1 к коэффициенту затухания K_2 прямо пропорционально продольному демпфированию, то есть усиление демпфирования ведёт к относительному росту распространения по сравнению с затуханием. Из графика видно: что увеличение v_2 пропорционально улучшает распространения колебаний.

Перейдем к коротковолновому диапазону. В этом случае дисперсионное соотношение для балки на упругом основании упрощается до классического закона

$$\Omega \approx K_1^2. \quad (2.7)$$

Данное соотношение соответствует уравнению частоты для свободной балки Бернулли–Эйлера. В этом случае вклад основания становится настолько мал, что им можно пренебречь по сравнению с изгибной жёсткостью самой балки.

Фазовая скорость при данном коротковолновом диапазоне линейно растёт с ростом действительной части волнового числа

$$V_{ф} \approx K_1. \quad (2.8)$$

Групповая скорость при любой частоте оказывается вдвое больше фазовой скорости

$$V_{гр} \approx 2K_1. \quad (2.9)$$

С ростом K_1 скорости возрастают без ограничения. Переходя к высокочастотной области, когда K_1 становится достаточно большим, получаем, что дисперсионные характеристики системы зависят только от параметров самой балки. Влияние основания в данном случае незначительно. Такое поведение характерно для классической модели свободной балки Бернулли–Эйлера. Частота колебаний квадратично зависит от волнового числа (2.7), фазовая скорость растёт линейно (2.8), а групповая скорость оказывается вдвое больше фазовой (2.9). Однако неограниченный рост скоростей при увеличении волнового числа указывает на границы применимости

модели Бернулли–Эйлера, требующей учёта сдвиговых деформаций и инерции вращения в области высоких частот [1,2,15]. В частности, здесь следует отметить работу [16], посвященную оценке влияния кинетической энергии вращения поперечного сечения балки при изгибе на дисперсионные характеристики гармонической волны.

Отношение постоянной распространения к коэффициенту затуханию в коротковолновом диапазоне следующей определяется зависимостью

$$\left| \frac{K_1}{K_2} \right| = \frac{4\sqrt{\rho F E J}}{v_2}, \quad (2.10)$$

из которой видно, что в коротковолновом диапазоне зависимость от частоты отсутствует и отношение действительной части волнового числа к мнимой его части описывается только свойствами системы: импедансом балки и коэффициентом продольного демпфирования. Это означает, что волновой процесс выходит на стационарный режим, при котором коэффициент затухания пропорционален постоянной распространения. Графически это проявляется как горизонтальное плато зависимости $|K_1/K_2|$ от частоты. Физически данное поведение отражает доминирование упруго-инерциальных свойств балки и демпфирующих свойств основания, при этом влияние поперечной жёсткости основания становится пренебрежимым. Указанный режим представляет практический интерес для разработки демпфирующих систем. Его использование позволяет регулировать и обеспечивать затухание системы в пределах всей высокочастотной области.

Заключение

Проведенное исследование, опирающееся на применение комплексного волнового числа, показало свою эффективность при анализе волновых процессов в системах с распределенным вязкоупругим основанием. С его помощью возможно в рамках единой схемы описывать дисперсионные характеристики и поведение пространственного затухания волн, причем в любой области частот. Добавление в модель продольных упруго-вязких параметров основания принципиально меняет поведение системы. Это особенно заметно при сравнении с классическими постановками, которые учитывают лишь поперечное взаимодействие. Полученные в

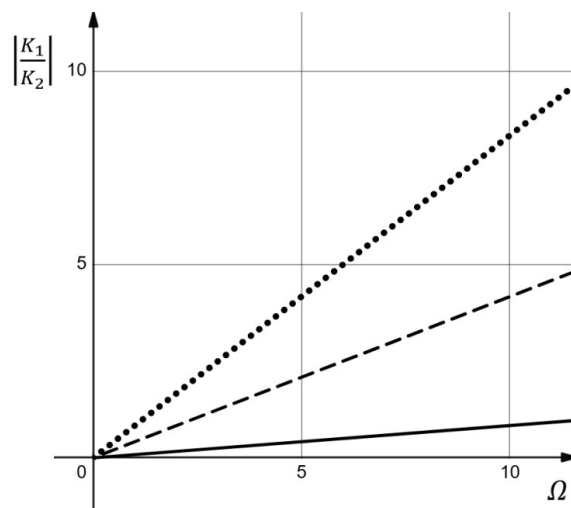


Рис. 4. Частотная зависимость отношения постоянной распространения изгибной волны к коэффициенту затухания этой волны в длинноволновом диапазоне

Fig. 4. Frequency dependence of the ratio of the constant of the propagating bending wave to the attenuation coefficient of this wave in the long-wave range

работе результаты могут быть использованы для конструирования механических систем с заранее заданными или программируемыми волновыми свойствами. Предложенную модель и метод анализа можно применять при разработке новых типов виброзащитных устройств, акустических фильтров, метаматериалов, а также для анализа и диагностики состояния опорных фундаментов и несущих конструкций.

Литература [References]

1. Фролов, К.В. (ред.), *Вибрации в технике. Т. 1: Колебания линейных систем*. Москва, Машиностроение, 1999. [Frolov, K.V. (ed.), *Vibratsii v tekhnike. T. 1: Kolebaniya lineynykh sistem = Vibrations in Engineering. Vol. 1: Oscillations of Linear Systems*. Moscow, Mashinostroenie, 1999. (in Russian)]
2. Артоболевский, И.И., Бобровницкий, Ю.И., Генкин, М.Д., *Введение в акустическую динамику машин*. Москва, Наука, 1979. [Artobolevsky, I.I., Bobrovnitsky, Yu.I., Genkin, M.D., *Vvedenie v akusticheskuyu dinamiku mashin = Introduction to the Acoustic Dynamics of Machines*. Moscow, Nauka, 1979. (in Russian)]
3. Erofeev, V.I., Pavlov, I.S. *Structural Modeling of Metamaterials*. Springer Nature Switzerland AG. Part of Springer Nature, 2021.
4. Кузьмин, Д.С., Монич, Д.В., Бобылев, В.Н., Гребнев, П.А., Ерофеев, В.И., Павлов, И.С., *Звукопоглощающее ограждение с облицовками из метаматериала*. Патент РФ на полезную модель № 217696. Российская Федерация, 2023. [Kuzmin, D.S., Monich, D.V., Bobylev, V.N., Grebnev, P.A., Erofeev, V.I., Pavlov, I.S., *Zvukopogloshchayushchee ogradhdenie s oblitsovkami iz metamateriala = Sound-absorbing fencing with metamaterial cladding*. Russian Federation Patent for Utility Model No. 217696. Russian Federation, 2023. (in Russian)]
5. Ерофеев, В.И., Сулаймонов, Н.Д., Изгибные волны в балке, изготовленной из вязкоупругого материала, деформирование которого описывается реологической моделью Фойхта-Кельвина. *Приволжский научный журнал*, 2025, № 2, с. 21–29. [Erofeev, V.I., Syalaymonov, N.D., Flexibal waves in a beam made of a viscoelastic material whose deformation is described by the Voight-Kelvin rheological model. *Privolzhskiy nauchnyy zhurnal = Privolzhsky Scientific Journal*, 2025, no. 2, pp. 21–29. (in Russian)]
6. Метрикин, А.В., Веричев, С.Н., Вострухов, А.В., *Фундаментальные задачи высокоскоростного наземного транспорта*. Saarbrucken, Lambert Academic Publishing, 2015. [Metrikine, A.V., Verichev, S.N., Vostrukhov, A.V., *Fundamental'nye zadachi vysokoskorostnogo nazemnogo transporta = Fundamental Tasks of High-Speed Land Transport*. Saarbrucken, Lambert Academic Publishing, 2015. (in Russian)]
7. Ерофеев, В.И., Лисенкова, Е.Е., Царев, И.С., Динамическое поведение балки, лежащей на обобщенном упругом основании, с движущейся нагрузкой. *Прикладная математика и механика*, 2021, т. 85, № 2, с. 193–209. [Erofeev, V.I., Lisenkova, E.E., Tsarev, I.S., Dynamic behavior of a beam lying on a generalized elastic foundation and subject to a moving load. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Mechanics of Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1295–1306. (in Russian)] DOI: [10.3103/S0025654421070116](https://doi.org/10.3103/S0025654421070116)
8. Герасимов, С.И., Ерофеев, В.И., Лисенкова, Е.Е. *Волновая динамика упругих систем, взаимодействующих с высокоскоростными объектами*. Саров, РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2025. [Gerasimov, S.I., Erofeev, V.I., Lisenkova, E.E. *Volnovaya dinamika uprugikh sistem, vzaimodeystvuyushchikh s vysokoskorostnymi ob"ektami = Wave Dynamics of Elastic Systems Interacting with High-Speed Objects*. Sarov, RFNC-VNIEF, 2025 (in Russian)]
9. Косауров, А.П., Расчет свайного фундамента мостов в сейсмоопасных районах. В *Сборник материалов Второй Международной научно-практической конференции «Инновационные технологии в образовании и науке»*, Москва, 2017, с. 291–295. [Kosaurov, A.P., Calculation of pile foundations of bridges in seismically hazardous areas. In *Sbornik materialov Vtoroy Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Innovatsionnye tekhnologii v obrazovanii i nauke» = Proc. of Second International Scientific and Practical Conference “Innovative Technologies in Education and Science”*, Moscow, 2017, pp. 291–295. (in Russian)]
10. Younesian, D., Hosseinkhani, A., Askari, H., Esmailzadeh, E., Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications. *Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 97, pp. 853–895. DOI: [10.1007/s11071-019-04977-9](https://doi.org/10.1007/s11071-019-04977-9)
11. Козел, А.Г., Термоупругопластический изгиб трехслойной круглой пластины на основании Пастернака. *Механика. Исследования и инновации*, 2022, вып. 15, с. 100–108. [Kozel, A.G.,

- Thermoelastoplastic bending of a three-layer circular plate on a Pasternak base. *Mekhanika. Issledovaniya i innovatsii = Mechanics. Research and Innovation*, 2022, iss. 15, pp. 100–108. (in Russian)]
12. Xu, J., Chen, Y., Tai, Y., Shi, G., Chen, N., Vibration analysis of sandwich beams with viscoelastic coating described by fractional constitutive equation. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2020, pp. 1–11. DOI: [10.1080/15376494.2020.1776429](https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1776429)
 13. Song P., Wei P., Zhou X. Vibration of rectangular plate on fractional order viscoelastic foundation subjected to standing and moving loads. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2023, vol. 28, no. 2, pp. 541–561. DOI: [10.1007/s11043-023-09590-3](https://doi.org/10.1007/s11043-023-09590-3)
 14. Shitikova, M., Kornilova, A., Analyses of vibrations of an elastic plate on a viscoelastic base via the fractional derivative Kelvin-Voight model. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2024, vol. 20. no. 4, pp. 208–219. DOI: [10.22337/2587-9618-2024-20-4-208-219](https://doi.org/10.22337/2587-9618-2024-20-4-208-219)
 15. Ерофеев, В.И., Кажяев, В.В., Семерикова, Н.П., *Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность*. Москва, Физматлит, 2002. [Erofeev, V.I., Kazhaev, V.V., Semerikova, N.P., *Volny v sterzhnyakh. Dispersiya. Dissipatsiya. Nelineynost' = Waves in Rods. Dispersion. Dissipation. Nonlinearity*. Moscow, Fizmatlit, 2002. (in Russian)]
 16. Царев, И.С., Влияние кинетической энергии вращения поперечного сечения балки при изгибе на дисперсионные характеристики гармонических волн. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2025, т. 22, № 3, с. 43–50. [Tsarev, I.S., The influence of the kinetic energy of rotation of the beam cross section during bending on the dispersion characteristics of harmonic waves. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Center of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 3, pp. 43–50. (in Russian)] EDN: PIODJ DOI: [10.31429/vestnik-22-3-43-50](https://doi.org/10.31429/vestnik-22-3-43-50)