УДК 51.37 EDN: QFRSUC DOI: 10.31429/vestnik-23-2-61-68

Вычислительные аспекты численной реализации вариационных методов ассимиляции данных измерений в модели переноса пассивной примеси

В. С. Кочергин✉, **С. В. Кочергин**

Морской гидрофизический институт РАН, ул. Капитанская 2, Севастополь, 299011, Россия

✉ Кочергин Владимир Сергеевич; ORCID 0000-0002-6767-1218; SPIN 9479-0245; e-mail: vskocher@gmail.com

Аннотация. В работе на примере модели переноса пассивной примеси рассматриваются вычислительные аспекты вариационного алгоритма ассимиляции данных измерений. Для решения такой задачи необходимы достоверные входные параметры, надежные вычислительные алгоритмы, достаточные вычислительные мощности. В работе рассматривается алгоритм специального вида, который позволяет более точно вычислять вертикальную компоненту скорости. Сама модель переноса реализуется на основе TVD-аппроксимаций, а при реализации вариационного алгоритма идентификации полезными являются методы регуляризации в случае недостаточного эффекта фильтрации самой моделью. При ограниченном небольшом количестве точек измерений возможно применение метода оценки для эффективной реализации вариационного алгоритма ассимиляции на нескольких процессорах. Результаты могут быть использованы для решения различных задач экологической направленности при изучении воздействия источников загрязнения антропогенного характера в акваториях Азовского и Черного морей.

Ключевые слова: модель переноса, пассивная примесь, идентификация, сопряженная модель, минимизация, вертикальная скорость.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № FNNN-2024-0016 «Исследование пространственно-временной изменчивости океанологических процессов в береговой, прибрежной и шельфовых зонах Черного моря под воздействием природных и антропогенных факторов на основе контактных измерений и математического моделирования» (шифр «Прибрежные исследования»).

Цитирование: Кочергин В. С., Кочергин С. В. Вычислительные аспекты численной реализации вариационных методов ассимиляции данных измерений в модели переноса пассивной примеси // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2026. Т. 23, № 2. С. 61–68. EDN: QFRSUC. DOI: 10.31429/vestnik-23-2-61-68

Поступила 21 апреля 2026 г. После доработки 4 июня 2026 г. Принято 15 июня 2026 г. Публикация 24 июня 2026 г.

Авторы внесли одинаковый вклад в подготовку рукописи. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Computational Aspects of Numerical Implementation of Variational Methods of Assimilation of Measurement Data in the Model of Passive Impurity Transfer

V. S. Kochergin✉, **S. V. Kochergin**

Marine Hydrophysical Institute, Kapitanskaya str., 2, Sevastopol, 299011, Russia

✉ Vladimir S. Kochergin; ORCID 0000-0002-6767-1218; e-mail: vskocher@gmail.com

Abstract. Modeling marine pollution dynamics has become increasingly important in recent years. The solution to this important problem relies on the use of numerical models of pollutant transport in the studied waters. To adequately describe such dynamics, appropriate input parameters of the model are needed, which are velocities, model coefficients, bathymetry, etc. The hydrodynamic model of flow forecasting should be sufficiently advanced, i.e. it takes into account many physical processes in the aquatic environment. In addition, the spatial grid and difference discretizations used should sufficiently allow such physical processes. Therefore, when numerically implementing variational algorithms for assimilation of measurement data and identification of model parameters, the question naturally arises about the quality of the hydrodynamic model, i.e. those velocity fields that are used in the integration of the transfer model. Using the example of a passive impurity transfer model, the computational aspects of a variational algorithm for assimilation of measurement data are considered. To solve this problem, reliable input parameters, reliable computational algorithms, and sufficient computing power are needed. The paper considers a special type of algorithm that allows for more accurate calculation of the vertical component of velocity. The transfer model itself is implemented on the basis of TVD approximations, and when implementing a variational identification algorithm, regularization methods are useful if the filtering effect of the model itself is insufficient. With a limited small number of measurement points, it is possible to use the estimation method to effectively implement a variational assimilation algorithm on multiple processors. The results can be used to solve various environmental problems in studying the effects of anthropogenic pollution sources in the waters of the Azov and Black Seas.

Keywords: transfer model, passive admixture, identification, adjoint model, minimization, vertical velocity.

Funding. The work was carried out with the support of the state assignment on topic No. FNNN-2024-0016 “Study of the spatio-temporal variability of oceanographic processes in the coastal, coastal and shelf zones of the Black Sea under the influence of natural and anthropogenic factors based on contact measurements and mathematical modeling” (code “Coastal research”).

Cite as: Kochergin, V. S., Kochergin, S. V., Computational aspects of numerical implementation of variational methods of assimilation of measurement data in the model of passive impurity transfer. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2026, vol. 23, no. 2, pp. 61–68. DOI: 10.31429/vestnik-23-2-61-68

Received 21 April 2026. Revised 4 June 2026. Accepted 15 June 2026. Published 24 June 2026.

The authors contributed equally. The authors declare no competing interests.

Введение

В последнее время задача прогнозирования распространения загрязнений в море приобретает особую актуальность. Решение такой важной задачи основывается на применении численных моделей динамики примеси в исследуемой акватории. Для адекватного описания такой динамики необходимы соответствующие входные параметры модели, которыми являются скорости, коэффициенты модели, батиметрия и др. Поэтому при численной реализации вариационных алгоритмов усвоения данных измерений необходимо наличие следующих компонент:

– гидродинамическая модель прогноза полей скорости в исследуемом районе;
– модель переноса и трансформации примеси;
– алгоритмы ассимиляции данных измерений.

Гидродинамическая модель прогноза течений должна быть достаточно полной, т.е. учитывающей основные физические процессы в водной среде [1, 2]. Кроме этого используемая пространственная сетка и разностные дискретизации должны разрешать такие физические процессы. Поэтому при численной реализации вариационных алгоритмов усвоения данных измерений и идентификации параметров модели естественным образом встает вопрос о качестве гидродинамической модели, т.е. тех полей скорости, которые используются при интегрировании модели переноса. Чаще всего в исследованиях приводятся компоненты горизонтальных скоростей, что вполне объяснимо в силу выполнения геострофических соотношений. Но вертикальная компонента тоже очень важна при моделировании динамики примеси, поэтому мы рассмотрим алгоритм ее вычисления [3–5]. Корректное ее вычисление позволяет анализировать области подъема и опускания вод (апвеллинги и даунвеллинги), имеющих большое значение для народного хозяйства, экологии и т.д.

Моделирование переноса и диффузии примеси чаще всего описывается при помощи решения соответствующего одноименного уравнения [6, 7]. Качество получаемого решения зависит не только от входных параметров (скоростей, коэффициентов модели и т.д.), но и от разностных дискретизаций применяемых при численном интегрировании уравнения переноса. В силу присутствия больших градиентов в поле загрязнения особую роль приобретают TVD аппроксимации [8] и монотонные разностные дискретизации.

Ассимиляция данных измерений может производиться различными способами. Это динамико-стохастическое моделирование [9], которое осуществляет интерполирование невязок прогноза в некоторую область с учетом корреляционных связей ошибок прогноза. Главный недостаток такого подхода — это предположение об изотропности корреляционной функции. Другой подход основан на вариационных принципах, решении сопряженных уравнений при построении градиентов функционала качества прогноза в пространстве параметров [10–12]. Для учета гладкости решения и фильтрации данных измерений предлагается выбор параметров сглаживания в процессе итераций. Квадратичный функционал качества выпуклый. Ограничения, накладываемые моделью переноса, линейны. По известной теореме такие ограничения не меняют выпуклости функционала, поэтому общий функционал выпуклый и имеет один экстремум, что помогает решить поставленную задачу.

1. Алгоритм вычисления вертикальной скорости

Достаточно точное тестирование методов и алгоритмов можно произвести при наличии аналитического решения той или иной задачи [3]. Для этих целей в работе [4] построено трехмерное аналитическое решение задачи ветровой циркуляции [13] в водоеме прямоугольной формы с плоским дном при заданном ветровом воздействии. Получены аналитические выражения для баротропной и добавочной трехмерной составляющей поля скорости. Выражение для вертикальной компоненты поля скорости используются для сравнения со значениями, вычисленными из уравнения неразрывности. Вертикальная скорость вычислялась стандартным интегрированием уравнения неразрывности по вертикали и методом прогонки [14]. Представим горизонтальные скорости в виде

$$u = U + \hat{u}, v = V + \hat{v}, \tag{1.1}$$

где U, V — баротропные составляющие, $\hat{u}$, $\hat{v}$ — переменные по пространству баротропные компоненты скорости.

Выпишем уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{1.2}$$

Для баротропных составляющих справедливо соотношение

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \tag{1.3}$$

поэтому из (1.2) запишем

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = 0. \tag{1.4}$$

Само уравнение (1.4) можно использовать для уменьшения ошибок при вычислении w. Интегрируем (1.2) от 0 до z, учитывая краевые условия $w(0) = 0$, $w(H) = 0$, где H — глубина моря, 0 — соответствует его поверхности. Тогда получим

$$w(z) = -\int_0^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathrm{d}z. \tag{1.5}$$

Соответственно из (1.4) имеем

$$w(z) = -\int_0^z \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}\right) \mathrm{d}z. \tag{1.6}$$

Уравнение (1.2), следуя [5], можно записать со вторым порядком аппроксимации в виде

$$\frac{w_{k+1}-w_k}{\Delta z_{k+1/2}}=\frac{f_{k+1}+f_k}{2},\quad \Delta z_{k+1/2}=z_{k+1}-z_k, \tag{1.7}$$

или

$$\frac{w_k-w_{k-1}}{\Delta z_{k-1/2}}=\frac{f_k+f_{k-1}}{2},\quad \Delta z_{k-1/2}=z_k-z_{k-1}, \tag{1.8}$$

где

$$f=S_xD_xu+S_yD_yv, \tag{1.9}$$

или

$$f=S_yD_xu+S_xD_yv. \tag{1.10}$$

В (1.9) и (1.10) используются следующие разностные операторы:

$$D_x\Phi\left(x,y\right)=\frac{\Phi\left(x+\frac{\Delta x}{2},y\right)-\Phi\left(x-\frac{\Delta x}{2},y\right)}{\Delta x}, \tag{1.11}$$

$$D_y\Phi\left(x,y\right)=\frac{\Phi\left(x,y+\frac{\Delta y}{2}\right)-\Phi\left(x,y-\frac{\Delta y}{2}\right)}{\Delta y}, \tag{1.12}$$

$$S_x\Phi\left(x,y\right)=\frac{\Phi\left(x+\frac{\Delta x}{2},y\right)+\Phi\left(x-\frac{\Delta x}{2},y\right)}{2}, \tag{1.13}$$

$$S_y\Phi\left(x,y\right)=\frac{\Phi\left(x,y+\frac{\Delta y}{2}\right)+\Phi\left(x,y-\frac{\Delta y}{2}\right)}{2}, \tag{1.14}$$

где $\Phi\left(x,y\right)$ — некоторая функция.

Вычитая из (1.7) соотношение (1.8), получим

$$\frac{1}{\Delta z_{k+1/2}}w_{k+1}-\left(\frac{1}{\Delta z_{k+1/2}}+\frac{1}{\Delta z_{k-1/2}}\right)w_k+\frac{1}{\Delta z_{k-1/2}}w_{k-1}=\frac{1}{2}\left(f_{k+1}-f_{k-1}\right). \tag{1.15}$$

Используя (1.9), получаем для f центрально-разностную дискретизацию, которая реализуется при помощи метода прогонки с учетом обоих краевых условий для w на поверхности и на дне. В работе [4] показано, что использование такого алгоритма на порядки повышает точность вычисления вертикальной скорости по сравнению со стандартным подходом.

2. Модель переноса

Рассмотрим модель транспорта пассивной примеси

$$\frac{\partial DC}{\partial t}+\frac{\partial UC}{\partial x}+\frac{\partial VC}{\partial y}+\frac{\partial WC}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}A_H\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}A_H\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}K\frac{\partial C}{\partial z}, \tag{2.1}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned}\partial M:\ &\frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}}=0,\\ z=0:\ &\frac{\partial C}{\partial z}=0,\\ z=H:\ &\frac{\partial C}{\partial z}=0,\end{aligned} \tag{2.2}$$

и начальными данными

$$C\left(x,y,z,0\right)=C_0\left(x,y,z\right), \tag{2.3}$$

где $t \in [0, T]$ — время; x, y — горизонтальные координаты; z — вертикальная координата; U, V, W — компоненты поля скорости; C — концентрация примеси; A_H и K — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии; $\mathbf{n}$ — нормаль к боковой границе ∂M области интегрирования модели M; $M_t = M \times [0, T]$; $C_0\,(x, y, z)$ — заданное начальное распределение концентрации примеси. При численной реализации модели могут быть использованы TVD-аппроксимации [8] или монотонные балансные схемы.

3. Вариационный алгоритм ассимиляции данных измерений

Рассмотрим вариационный алгоритм [10,11] ассимиляции, при котором усвоение происходит за счет минимизации следующего выпуклого квадратичного функционала качества прогноза:

$$I_0 = \frac{1}{2}\left(P\left(RC - C^{\text{изм}}\right), P\left(RC - C^{\text{изм}}\right)\right)_{M_t}, \tag{3.1}$$

где P — оператор восполнения нулями поля невязок прогноза при отсутствии данных измерений, R — оператор проектирования в точки наблюдений. Функционал (3.1) при линейных ограничениях (2.1)–(2.3) запишем следующим образом:

$$I = I_0 + \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} + \frac{\partial VC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}A_H\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}A_H\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}K\frac{\partial C}{\partial z}, C^*\right]_{M_t} + \\ + \left(\frac{\partial C}{\partial n}, C^*\right)_{\partial M_t} + \left(C - C_0, C^*\right)_M + \left(\frac{\partial C}{\partial z}, C^*\right)_H + \left(\frac{\partial C}{\partial z}, C^*\right)_0, \tag{3.2}$$

где скалярное произведение определяется стандартным способом в L_2. Проинтегрируем соответствующее (3.2) выражение для вариации функционала по частям с учетом уравнения неразрывности и краевых условий.

Выберем в качестве множителей Лагранжа решение следующей сопряженной задачи:

$$-\frac{\partial C^*}{\partial t} - \frac{\partial UC^*}{\partial x} - \frac{\partial VC^*}{\partial y} - \frac{\partial WC^*}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}A_H\frac{\partial C^*}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}A_H\frac{\partial C^*}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}K\frac{\partial C^*}{\partial z} = 0,$$
$$\partial M : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \quad z = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial z} = 0, \quad z = H : \frac{\partial C^*}{\partial z} = 0, \tag{3.3}$$
$$t = T : C^* = P\left(C^{\text{изм}} - RC\right).$$

Например, при определении начального поля имеем

$$\nabla_{C_0} I = C^*\,(0, x, y, z) \tag{3.4}$$

Начальное поле концентрации определяются в процессе итераций следующим образом:

$$C_0^{n+1} = C_0^n + \tau \nabla_{C_0} I, \tag{3.5}$$

где τ — итерационный параметр, который находится с учетом решения задачи в вариациях. Подробный обзор вариационных методов представлен в работе [15]. Отметим фильтрационные свойства вариационного алгоритма, которые в полной мере проявляются при зашумлении данных измерений. Фильтрация происходит за счет решения сопряженных задач в процессе итераций. При усвоении зашумленных данных на коротком промежутке времени при небольших коэффициентах турбулентной диффузии результат можно улучшить за счет накладывания дополнительных условий на гладкость получаемого решения. Так вместо функционала (3.1) рассмотрим функционал следующего вида:

$$I_0 = \frac{1}{2}\left(P\left(RC - C^{\text{изм}}\right), P\left(RC - C^{\text{изм}}\right)\right)_{M_t} + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial C_0}{\partial x}, \frac{\partial C_0}{\partial x}\right)_M + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial C_0}{\partial y}, \frac{\partial C_0}{\partial y}\right)_M, \tag{3.6}$$

где α — некоторый параметр, который может уменьшаться до 0 в процессе итераций. В такой постановке с учетом (3.2)–(3.3) вместо (3.4) имеем

$$\nabla_{C_0} I = C^*(0,x,y,z) - \alpha \frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 C_0}{\partial y^2}. \tag{3.7}$$

Аналогично сглаживание можно осуществлять за счет дополнительной вязкости. Вместо (2.1) рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} + \frac{\partial VC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial C}{\partial z} + \alpha \Delta C, \tag{3.8}$$

тогда в (3.3) имеем

$$-\frac{\partial C^*}{\partial t} - \frac{\partial UC^*}{\partial x} - \frac{\partial VC^*}{\partial y} - \frac{\partial WC^*}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C^*}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C^*}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial C^*}{\partial z} - \alpha \Delta C^* = 0, \tag{3.9}$$

где α — параметр, который уменьшается до нуля в процессе итераций. Такой подход в некотором смысле перекликается с методом квазиобращений [16].

4. Метод оценки. Модифицированный вариационный алгоритм

Умножая уравнение модели (2.1)–(2.3) на C^* и интегрируя по частям с учетом краевых условий, уравнения неразрывности можно получить

$$\int\limits_M h C_T \, \mathrm{d}M = \int\limits_M C_0 C_0^* \, \mathrm{d}M. \tag{4.1}$$

Выбирем h в виде

$$h = \begin{cases} \dfrac{1}{m(\Omega)} \text{ — в области } \Omega; \\ 0 \text{ — вне области } \Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

где m — мера некоторой области $\Omega \in M$. Тогда в левой части выражения (4.1) получаем среднюю концентрацию $\bar{C}_T$ в Ω на конечный момент времени T.

Выберем в качестве Ω ячейку расчетной сетки. Получим

$$\bar{C}_T = \int\limits_M C_0 C_0^* \, \mathrm{d}M. \tag{4.3}$$

Таким образом, используя решение сопряженной задачи, зная начальное поле, по формуле (4.3) можно оценивать концентрацию примеси в заданной ячейке на соответствующий момент времени [17]. Данные измерений чаще всего имеются не во всех узлах области интегрирования, поэтому количество требуемых сопряженных задач для формулы оценки (4.3) существенно сокращается, так как оценка значений поля концентрации осуществляется только в точках измерений. Формула оценки используется для нахождения модельных оценок концентрации и вариаций, которые необходимы при вычислении итерационного параметра. В работе [17] показано, что модифицированный алгоритм имеет преимущество перед стандартным подходом при выполнении следующего условия:

$$N > \frac{k}{2J}, \tag{4.4}$$

где J — общее число итераций необходимое для достижения минимума функционала, k — количество данных измерений, а N — количество используемых процессоров.

Рассмотренные вычислительные алгоритмы позволяют более точно вычислять входные параметры модели переноса, адекватно описывать динамику пятен загрязнения в изучаемом водоеме с учетом их пространственной структуры, улучшать фильтрационные свойства модели за счет выбора соответствующих параметров сглаживания в процессе итераций, оптимально использовать вычислительные мощности при определенном расположении точек измерений. Последнее реализуется за счет решения серии сопряженных задач параллельно на разных процессорах. Результаты могут быть использованы для решения различных задач экологической направленности при изучении воздействия источников загрязнения антропогенного характера в акваториях Азовского и Черного морей.

Литература [References]

1. Марчук, Г.И., Саркисян, А.С., *Математическое моделирование циркуляции океана.* Москва, Наука, 1988. [Marchuk, G.I., Sarkisyan, A.S., *Matematicheskoe modelirovanie cirkulyacii okeana = Mathematical Modeling of Ocean Circulation.* Moscow, Nauka, 1988. (in Russian)]
2. Кочергин, В.П., *Теория и методы океанических течений.* Москва, Наука, 1978. [Kochergin, V.P., *Theory and Methods of Ocean Currents = Teoriya i metody‘ okeanicheskix techenij.* Moscow, Nauka, 1978. (in Russian)]
3. Кочергин, В.П., Дунец, Т.В., Вычислительный алгоритм для определения наклонов уровня в задачах динамики водоемов. *Морской гидрофизический журнал*, 1999, № 3, с. 20–28. [Kochergin, V.P., Dunets, T.V., Computational algorithm of the evaluations for inclination of the level in the problems of the dynamics of basins. *Morskoy gidrofizicheskiy zhurnal = Physical Oceanography*, 2001, vol. 11, iss. 3, pp. 221–232. (in Russian)]
4. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., Аналитическая тестовая задача ветровых течений. *Процессы в геосредах*, 2019, № 2(20), с. 198–203. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., Analytical test problem of wind currents. *Protsessy v geosredakh = Processes in geoenvironments*, 2019, № 2(20), pp. 198–203. (in Russian)]
5. Еремеев, В.Н., Кочергин, В.П., Кочергин, С.В., Скляр, С.Н., *Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов.* Севастополь, ЭКОСИ-Гидрофизика, 2002. [Eremeev, V.N., Kochergin, V.P., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N., *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki glubokovodnykh basseynov = Mathematical modeling of hydrodynamics of deep-water basins.* Sevastopol, EKOSI-gidrofizika, 2002. (in Russian)]
6. Марчук, Г.И., *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.* Москва, Наука, 1982. [Marchuk, G.I., *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayushchey sredy = Mathematical modeling in environmental problems.* Moscow, Nauka, 1982. (in Russian)]
7. Иванов, В.А., Фомин, В.В., *Математическое моделирование динамических процессов в зоне море – суша.* Севастополь, ЭКОСИ-гидрофизика, 2008. [Ivanov, V.A., Fomin, V.V., *Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskikh protsessov v zone more – susha = Mathematical modeling of dynamic processes in the sea-land zone.* Sevastopol‘, EKOSI-gidrofizika, 2008. (in Russian)]
8. Harten, A., High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 1983, vol. 49, pp. 357–393.
9. Тимченко, И.Е., *Динамико-стохастические модели состояния океана.* Киев, Наукова Думка, 1981. [Timchenko, I.E., *Dinamiko-stokhasticheskie modeli sostoyaniya okeana = Dynamic-stochastic models of ocean states.* Kiev, Naukova Dumka, 1981. (in Russian)]
10. Marchuk, G.I., Penenko, V.V., Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment. In *Proc. of the IFIP-TC7 Working conf. “Modelling and Optimization of Complex Systems”*, New-York, Springer, 1978, pp. 240–252.
11. Пененко, В.В., Оценка параметров дискретных моделей динамики атмосферы и океана. *Метеорология и гидрология*, 1979, № 7, с. 77–90. [Penenko, V.V., Estimation of parameters of discrete models of atmospheric and oceanic dynamics. *Meteorologiya i gidrologiya = Meteorology and hydrology*, 1979, no. 7, pp. 77–90. (in Russian)]
12. Агошков, В.И., Залесный, В.Б., Шутяев, В.П., Пармузин, Е.И., Захарова, Н.Б., Сопряженные уравнения и методы вариационного усвоения данных измерений в задачах геофизической гидродинамики.Известия Российской академии наук. *Физика атмосферы и океана*, 2025, т. 61, № 3, с. 324–339. [Agoshkov, V.I., Parmuzin, E.I., Shutyaev, V.P., Zakharova, N.B., Zalesny, V.B., Adjoint equations and methods of variational data assimilation in problems of geophysical hydrodynamics. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2025, vol. 61, no. 3, pp. 324–339. (in Russian)] DOI: 10.7868/S3034648725030048

13. Stommel, H., *The Gulf Stream. A Physical and dynamical description*. University of California Press, 1965.

14. Годунов, С.К., Рябенький, В.С., *Разностные схемы*. Москва, Наука, 1973. [Godunov, S.K., Ryabenkiy, V.S., *Raznostnye skhemy = Difference Schemes*. Moscow, Nauka, 1973. (in Russian)]

15. Shutyaev, V.P., Methods for observation data assimilation in problems of physics of atmosphere and ocean. *Izvestiya Atmospheric and Oceanic Physics*. 2019, vol. 55, pp. 17–31. DOI: 10.1134/S0001433819010080

16. Тихонов, А.Н., Арсенин, В.Я., *Методы решения некорректных задач*. Москва, Наука, 1986. [Tikhonov, A.N., Arsenin, V.Ya., *Metody resheniya nekorrektnykh zadach = Methods for solving ill-posed problems*. Moscow, Nauka, 1986. (in Russian)]

17. Кочергин, В.С., Кочергин, С.В., Реализация модифицированного вариационного алгоритма ассимиляции данных измерений в модели переноса пассивной примеси в Азовском море. *Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон моря*, 2018, № 2, с. 66–73. [Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Implementation of a modified variational algorithm for assimilation of measurement data in a passive pollutant transport model in the Sea of Azov. *Ekologicheskaya bezopasnost' pribrezhnoy i shel'fovoy zon morya = Environmental Zafety of the Coastal and Shelf Zones of the Sea*, 2018, no. 2, pp. 66-73.] EDN: YLLQLZ. DOI: 10.22449/2413-5577-2018-2-66-73