

УДК 534-14, 534-16

EDN: IUPEUU DOI: 10.31429/vestnik-23-2-9-20

Обратная задача идентификации поверхностных повреждений протяженных конструкций с использованием кинематических характеристик распространяющихся волн

О. К. Абраха^{1,2}, А. Н. Соловьев^{3,4,5}, М. С. Германчук⁵

¹ Донской государственный технический университет, пл. Гагарина, 1, Ростов-на-Дону, 344003, Россия

² Колледж науки, Эритрейский институт технологий, Май-Нэфхи, Эритрея

³ Крымский инженерно-педагогический университет им. Февзи Якубова, пер. Учебный, 8, Симферополь, 295015, Россия

⁴ Научно-производственный центр инжиниринговых технологий Крымского инженерно-педагогического университета им. Февзи Якубова, пер. Учебный, 8, Симферополь, 295015, Россия

⁵ Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, пр-т Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Россия

✉ Соловьев Аркадий Николаевич; ORCID 0000-0001-8465-5554; SPIN 8087-8998; e-mail: solovievarc@gmail.com

Аннотация. В работе представлено математическое и компьютерное моделирование процесса распространения волн в протяженных элементах строительных конструкций при наличии поврежденного слоя. В качестве математической модели рассматривается двухслойная упругая анизотропная полоса, в которой верхний слой постоянной толщины представлен пористым композитом, моделирующим повреждение. Толщина этого слоя и процент пористости соответствует параметрам поврежденности. Эффективные свойства такого композита получены в пакете ACELAN-COMPOS. Обратная геометрическая и коэффициентная задача состоит в определении двух параметров поврежденности. Дополнительной информацией для ее решения являются зависимости от толщины и пористости кинематических характеристик распространяющихся волн. В работе строятся дисперсионные кривые для такой полосы при свободных от механических напряжений границах. Исследуется их зависимость от параметров повреждения: толщины и процента пористости поврежденного слоя. Ранее была показана возможность решения этой обратной задачи, однако использование одной дисперсионной кривой не обеспечивает единственности решения во всей области изменения параметров повреждения. В настоящей работе предложен многомодовый подход, в частности, объединяющий Моду 4 и Моду 5 в 4-мерную сигнатуру, который позволяет преодолеть неединственность решения во всей области рассматриваемых параметров. Первый метод основан на использовании 4-мерной линейной интерполяции. Проверка работоспособности метода, показывает, что все обучающие и тестовые точки дают уникальные 4-мерные сигнатуры, доказывая, что обратная задача имеет единственное решение для всех практических состояний повреждения. Второй подход «метод случайного леса» основан на построении множества решающих деревьев, который также показал свою работоспособность.

Ключевые слова: двухслойная полоса, пористый композит, повреждение, метод конечных элементов, дисперсионные кривые, обратная задача, машинное обучение, инъективность.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-02-2026-1313) в Крымском федеральном университете им. В. И. Вернадского.

Цитирование: Абраха О. К., Соловьев А. Н., Германчук М. С. Обратная задача идентификации поверхностных повреждений протяженных конструкций с использованием кинематических характеристик распространяющихся волн // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2026. Т. 23, № 2. С. 9–20. EDN: IUPEUU. DOI: 10.31429/vestnik-23-2-9-20

Поступила 10 мая 2026 г. После доработки 15 июня 2026 г. Принято 20 июня 2026 г. Публикация 24 июня 2026 г.

Абраха О. К. — разработка алгоритма, программирование, анализ данных, осуществление научно-исследовательского процесса, включая выполнение численных экспериментов; Соловьев А. Н. — постановка задачи, руководство исследованием; Германчук М. С. — формулирование идеи исследования, целей и задач. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

© Автор(ы), 2026. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Inverse Problem of Identifying Surface Damage of Extended Structures Using Kinematic Characteristics of Propagating Waves

O. K. Abraha ^{1,2}, A. N. Soloviev ^{3,4,5}✉, M. S. Germanchuk ⁵

¹ Don State Technical University, Gagarin Square, 1, Rostov-on-Don, 344003, Russia

² College of Science, Eritrea Institute of Technology, Mai Nefhi, Eritrea

³ Crimean Engineering and Pedagogical University named after Fevzi Yakubov, Uchebny Lane, 8, Simferopol, 295015, Russia

⁴ Research and Production Center of Engineering Technologies of the Crimean Engineering and Pedagogical University named after Fevzi Yakubov, Uchebny Lane, 8, Simferopol, 295015, Russia

⁵ V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Prospekt Vernadskogo 4, Simferopol, 295007, Russia

✉ Arkady N. Soloviev; ORCID 0000-0001-8465-5554; e-mail: solovievarc@gmail.com

Abstract. The paper presents mathematical and computer modeling of the process of wave propagation in extended elements of building structures in the presence of a damaged layer. As a mathematical model, a two-layer elastic anisotropic strip is considered, in which the upper layer of constant thickness is represented by a porous composite that models damage. The thickness of this layer and the percentage of porosity correspond to the parameters of damage. The effective properties of such a composite are obtained using the ACELAN-COMPOS package. The inverse geometric and coefficient problem consists of determining two parameters of damage. Additional information for solving this problem is the dependence of the thickness and porosity of the kinematic characteristics of the propagating waves. In this work, dispersion curves are constructed for such a strip with boundaries free from mechanical stresses. The dependence of these curves on the damage parameters, such as the thickness and porosity of the damaged layer, is investigated. Previously, it was shown that this inverse problem can be solved, but using a single dispersion curve does not guarantee a unique solution for all damage parameters. In this work, a multimodal approach is proposed, specifically combining Mode 4 and Mode 5 into a 4-dimensional signature, which allows for the resolution of non-uniqueness of the solution in the entire domain of the parameters under consideration. The first method is based on the use of 4-dimensional linear interpolation. The validation of the method shows that all training and test points produce unique 4-dimensional signatures, proving that the inverse problem has a unique solution for all practical damage states. The second approach «random forest method» is based on the construction of a set of decision trees, which has also shown its efficiency.

Keywords: two-layer strip, porous composite, damage, finite element method, dispersion curves, inverse problem, machine learning, injectivity.

Funding. The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation at the Vernadsky Crimean Federal University (No. 075-02-2026-1313).

Cite as: Abraha, O. K., Soloviev, A. N., Germanchuk, M. S., Inverse problem of identifying surface damage of extended structures using kinematic characteristics of propagating waves. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2026, vol. 23, no. 2, pp. 9–20. DOI: 10.31429/vestnik-23-2-9-20

Received 10 May 2026. Revised 15 June 2026. Accepted 20 June 2026. Published 24 June 2026.

Abraha O. K. — algorithm development, programming, data analysis, conducting the research process, including numerical experiments; Soloviev A. N. — problem formulation, research supervision; Germanchuk M. S. — formulation of research idea, goals and objectives. The authors declare no conflict of interest. All authors have read and approved the final version of the manuscript.

© The Author(s), 2026. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Длительное воздействие агрессивных сред приводит к поверхностному повреждению элементов строительных конструкций. Мониторинг их состояния является важной технической задачей, решение которой позволяет предотвратить катастрофические разрушения несущих элементов.

В работе [1] обсуждается комплексное исследование по выявлению дефектов в бетонных мостовых настилах с использованием термографического обследования *in situ* с акцентом на дефекты как настилов, так и нижних поверхностей. Исследование подчеркивает эффективность термографии в обнаружении и анализе дефектов бетонных конструкций.

Авторы [2] представили новый подход к выявлению дефектов в промышленном бетоне с использованием обработки изображений и глубоких сверточных нейронных сетей. В работе [3] обсуждается алгоритм локализации и обнаружения деградации защитных слоев бетонных колонн на основе искусственного интеллекта и Интернета вещей. Анализ естественных продуктов коррозии 20-летнего железобетона, подвергнутого воздействию хлоридов, обсуждается в [4].

Работа [5] посвящена применению неразрушающих геофизических методов для испытаний бетонных конструкций. Использование глубокого обучения и анализа текстур для идентификации трещин в мостах приведены в результатах [6], а в [7] представлено сравнительное исследование смешанных вяжущих на основе LC3 и летучей золы.

Данные экспериментальных и численных исследований сжимающего поведения круговых ультравысокопрочных бетонных трубчатых колонн приведены в [8]. Исследовательская работа [9] обсуждает влияние строительных ошибок на структурную безопасность постнапряженного бетонного моста. В работе [10] обсуждается влияние захвата воздуха на пористость и прочность на сжатие бетона в мостах.

Существуют различные подходы к оценке поврежденных элементов конструкций. Так, в [11] обсуждается использование технологии долгой краткосрочной памяти (LSTM) в сочетании с технологией информационного моделирования зданий (BIM), а в [12] представлен метод оценки вибрации, индуцированной магнитной силой (M5), для частотного анализа ослабления арматуры в железобетоне.

Влияние глубины и степени повреждения на характеристики упругих волн с использованием лабораторных образцов бетонных элементов с искусственным слоем повреждения изучено в [13]. Задача идентификации поврежденного элемента конечной длины на основе анализа его собственных частот и амплитуды гармонических колебаний решается в [14]. Физически обоснованная модель распространения ультразвуковых волн в бетоне с частично деградированным наружным слоем была недавно разработана Чебаненко и др. [15].

В данной работе исследуется распространение упругих волн в двухслойной анизотропной полосе с пористым верхним слоем, моделирующим повреждение элемента. Строятся дисперсионные кривые и исследуется их поведение при изменении толщины и степени повреждения (пористости). Предлагается многомодовый подход построения линейной интерполяции для однозначного определения параметров повреждения по измеренным волновым характеристикам.

1. Математическая формулировка задачи

В декартовой системе координат x, y рассматривается упругая анизотропная двухслойная полоса (рис. 1). Верхний слой представляет собой пористый композит с процентом пористости p . Его эффективные упругие свойства и плотность были рассчитаны в пакете ACELAN-COMPOS [16] и представлены в табл. 1 [17].

Движение в рассматриваемом теле описывается системой дифференциальных уравнений анизотропной теории упругости [17]. Фундаментальные результаты в области динамических смешанных задач теории упругости для неклассических областей, лежащие в основе представленной математической модели, получены Воровичем и Бабешко [18]

$$\rho_{pk}\ddot{\mathbf{u}} + \alpha_{dj}\rho_j\dot{\mathbf{u}} - \nabla\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_j, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}_j^E(\boldsymbol{\varepsilon} + \beta_{dj}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T). \quad (1.1)$$

Рассматриваются волны, распространяющиеся вдоль горизонтальной оси Ox , с волновым числом k и частотой ω :

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{U}(y) \exp(i(kx - \omega t)). \quad (1.2)$$



Рис. 1. Геометрия двухслойной анизотропной полосы

Fig. 1. Geometry of a two-layer anisotropic strip

Таблица 1. Эффективные свойства [17]

Table 1. Effective properties [17]

Процент пористости	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$\rho, 10^3, \text{кг/м}^3$	7,5	6,75	6,0	5,25	4,5	3,75	3,0	2,25	1,5
$c_{11}^{\text{Eff}}, 10^{10}, \text{Н/м}^2$	13,9	11,56	9,25	6,85	5,05	3,34	2,07	1,26	0,68
$c_{12}^{\text{Eff}}, 10^{10}, \text{Н/м}^2$	7,78	6,15	4,66	3,14	2,10	1,16	0,62	0,28	0,13
$c_{13}^{\text{Eff}}, 10^{10}, \text{Н/м}^2$	7,43	5,82	4,25	2,82	1,87	1,06	0,52	0,24	0,1
$c_{33}^{\text{Eff}}, 10^{10}, \text{Н/м}^2$	11,5	9,53	7,23	5,42	3,91	2,72	1,63	0,91	0,47
$c_{44}^{\text{Eff}}, 10^{10}, \text{Н/м}^2$	2,56	2,23	1,83	1,44	1,10	0,74	0,44	0,23	0,1

В результате подстановки (1.2) в исходные уравнения получается однородная система дифференциальных уравнений для действительных и мнимых частей вектора амплитуд перемещений $U_R(y)$, $U_I(y)$, $V_R(y)$, $V_I(y)$. Система однородных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая распространение волн в двухслойной полосе, имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{dU_I(y)}{dy}(c_{12} + c_{66})k - U_R(y)c_{11}k^2 + U_R(y)\omega^2\rho + \frac{d^2U_R(y)}{dy^2}c_{66} = 0, \\
 & -U_I(y)c_{11}k^2 + U_I(y)\omega^2\rho + \frac{dV_R(y)}{dy}(c_{12} + c_{66})k + \frac{d^2U_I(y)}{dy^2}c_{66} = 0, \\
 & -\frac{dU_I(y)}{dy}(c_{12} + c_{66})k - V_R(y)c_{66}k^2 + V_R(y)\omega^2\rho + \frac{d^2V_R(y)}{dy^2}c_{22} = 0, \\
 & -V_I(y)c_{66}k^2 + V_I(y)\omega^2\rho + \frac{dU_R(y)}{dy}(c_{12} + c_{66})k + \frac{d^2V_I(y)}{dy^2}c_{22} = 0.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $U_R(y)$ и $U_I(y)$ — действительная и мнимая части амплитуды горизонтального перемещения; $V_R(y)$ и $V_I(y)$ — действительная и мнимая части амплитуды вертикального перемещения; c_{11} , c_{12} , c_{22} , c_{66} — модули упругости; k — волновое число; ω — угловая частота; ρ — плотность материала.

Система уравнений (1.3) используется для построения дисперсионных кривых $\omega = \omega(k)$ путем решения задачи на собственные значения: найти ω такое, что система (1.3) имеет нетривиальные решения для заданного волнового числа k , при удовлетворении соответствующих граничных условий на верхней и нижней границах полосы (рис. 1). Методы интегральных преобразований для решения подобных волновых задач подробно изложены в работе Глушкова и Глушковой [19].

2. Анализ дисперсионных кривых и проблема неединственности

Собственные частоты системы (1.3) при свободных границах были рассчитаны методом конечных элементов в пакете FlexPDE. На рис. 2 показаны дисперсионные кривые для высоты слоя $h = 0$ м без поврежденного слоя (черные кривые) и с поврежденным слоем при $h = 0,03$ м, $p = 80$ % (красные кривые).

Анализ поведения дисперсионных кривых показывает, что их изменение может служить основой для идентификации повреждений. Ранее [20] был предложен алгоритм идентификации параметров повреждения, основанный на анализе одной дисперсионной кривой и пересечении линий уровня поверхностей, характеризующих изменения волнового числа при заданной частоте и частоты при заданном волновом числе. Однако, как оказалось, единственность решения при этом наблюдается не во всей области определяемых параметров. То есть использование одной дисперсионной моды не гарантирует взаимно-однозначного соответствия между

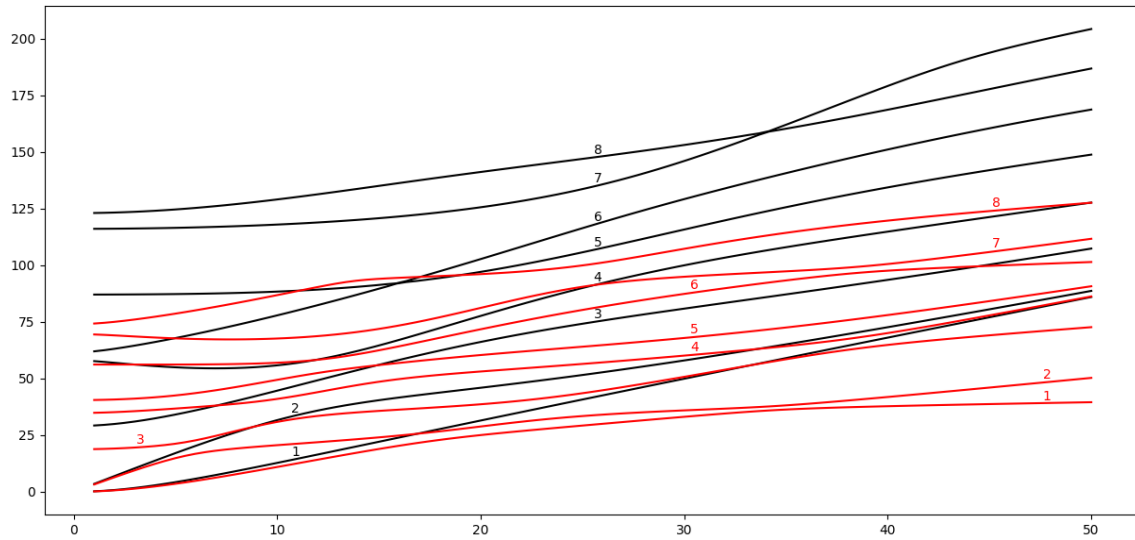


Рис. 2. Дисперсионные кривые: черные кривые — неповрежденная полоса с пористостью $p = 0 \%$ и общей высотой $h = 0$ м; красные кривые — поврежденная полоса с пористым верхним слоем с пористостью $p = 80 \%$ и толщиной $h = 0,03$ м

Fig. 2. Dispersion curves: black curves — intact strip with porosity $p = 0 \%$ and total height $h = 0$ m; red curves — damaged strip with porous upper layer with porosity $p = 80 \%$ and thickness $h = 0.03$ m

измеренными волновыми характеристиками и параметрами повреждения. Это ограничение мотивирует использование нескольких дисперсионных мод, что представлено в следующем разделе.

3. Многомодовая идентификация повреждений

Для устранения неединственности решения обратной задачи осуществляется многомодовый анализ, в частности, рассматриваются две дисперсионные моды: Мода 4 и Мода 5, каждая из которых характеризуется отдельной парой волновое число – частота при фиксированных опорных значениях.

Проводится анализ:

- для Моды 4: волновое число $k_4(p, h)$ при фиксированной частоте $\omega = 75 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ и частота $\omega_4(p, h)$ при фиксированном волновом числе $k = 10,0 \text{ м}^{-1}$;
- для Моды 5: волновое число $k_5(p, h)$ при фиксированной частоте $\omega = 75 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ и частота $\omega_5(p, h)$ при фиксированном волновом числе $k = 10,0 \text{ м}^{-1}$.

Формируется 4-мерная сигнатура $(k_4, \omega_4, k_5, \omega_5)$, объединяющая две независимые моды при изменении параметров (p, h) .

Точка в пространстве параметров повреждения (p, h) определяется следующим образом:

- 1) по измеренным волновым характеристикам вычисляются четыре значения: $k_4, \omega_4, k_5, \omega_5$, которые образуют 4-мерную сигнатуру;
- 2) затем эта сигнатура подается на вход обученного 4-мерного линейного интерполятора, который отображает её обратно в пространство параметров (p, h) ;
- 3) интерполятор построен на основе обучающей сетки $64 \times 64 = 4096$ точек, покрывающей весь диапазон возможных значений пористости $p \in [0, 0,8]$ и глубины $h \in [0,005, 0,030]$ м;
- 4) для точек, попадающих на границу выпуклой оболочки обучающего набора, используется ближайшая соседняя интерполяция.

Таким образом, используется прямое численное отображение 4-мерной сигнатуры в параметры повреждения, что обеспечивает высокую точность и однозначность решения. Ниже представлены табл. 2 и 3 зависимостей для Моды 4 и Моды 5.

Таблица 2. Зависимости волнового числа k_4 (при $\omega = 75 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$) и частоты ω_4 (при $k = 10,0 \text{ м}^{-1}$) от параметров повреждения для Моды 4

Table 2. Dependences of the wave number k_4 (at $\omega = 75 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$) and frequency ω_4 (at $k = 10.0 \text{ m}^{-1}$) on the damage parameters for Mode 4

p	h (м)	ω_4 (рад/с)	k_4 (м^{-1})
0,0	0,005	55,82187	18,998601
0,0	0,010	55,82187	18,998601
0,0	0,015	55,82187	18,998601
0,0	0,020	55,82187	18,998601
0,0	0,025	55,82187	18,998601
0,0	0,030	55,82187	18,998601
0,2	0,005	55,66321	19,164426
0,2	0,010	55,66321	19,346483
0,2	0,015	55,66321	19,540156
0,2	0,020	55,66321	19,737301
0,2	0,025	55,66321	19,929304
0,2	0,030	55,66321	20,107447
0,4	0,005	55,48153	19,367306
0,4	0,010	55,48153	19,832673
0,4	0,015	55,48153	20,413680
0,4	0,020	55,48153	21,088714
0,4	0,025	55,48153	21,776530
0,4	0,030	55,48153	22,400435
0,6	0,005	55,29149	19,592460
0,6	0,010	55,29149	20,748827
0,6	0,015	55,29149	23,360446
0,6	0,020	55,29149	25,514617
0,6	0,025	55,29149	27,260965
0,6	0,030	55,29149	29,766059
0,8	0,005	54,92953	20,157438
0,8	0,010	54,92953	26,035330
0,8	0,015	54,92953	29,787252
0,8	0,020	54,92953	37,608646
0,8	0,025	54,92953	41,659122
0,8	0,030	54,92953	43,234610

Таблица 3. Зависимости волнового числа k_5 (при $\omega = 75 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$) и частоты ω_5 (при $k = 10,0 \text{ м}^{-1}$) от параметров повреждения для Моды 5

Table 3. Dependences of the wave number k_5 (at $\omega = 75 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$) and frequency ω_5 (at $k = 10.0 \text{ m}^{-1}$) on the damage parameters for Mode 5

p	h (м)	ω_5 (рад/с)	k_5 (м^{-1})
0,0	0,005	77,89182	8,655429
0,0	0,010	77,89182	8,655429
0,0	0,015	77,89182	8,655429
0,0	0,020	77,89182	8,655429
0,0	0,025	77,89182	8,655429
0,0	0,030	77,89182	8,655429
0,2	0,005	77,87847	8,661780
0,2	0,010	77,87847	8,677103
0,2	0,015	77,87847	8,711456
0,2	0,020	77,87847	8,775318
0,2	0,025	77,87847	8,878502
0,2	0,030	77,87847	9,026264
0,4	0,005	77,86026	8,670423
0,4	0,010	77,86026	8,717440
0,4	0,015	77,86026	8,838912
0,4	0,020	77,86026	9,088597
0,4	0,025	77,86026	9,530151
0,4	0,030	77,86026	10,189775
0,6	0,005	77,82394	8,687711
0,6	0,010	77,82394	8,860621
0,6	0,015	77,82394	9,633475
0,6	0,020	77,82394	13,207770
0,6	0,025	77,82394	15,449194
0,6	0,030	77,82394	16,349157
0,8	0,005	77,61222	8,786558
0,8	0,010	77,61222	17,121533
0,8	0,015	77,61222	18,362012
0,8	0,020	77,61222	20,197834
0,8	0,025	77,61222	29,181904
0,8	0,030	77,61222	37,340256

Вместе эти четыре величины образуют 4-мерную сигнатуру $(k_4, \omega_4, k_5, \omega_5)$, которая характеризует состояние повреждения (p, h) . Метод конечных элементов (МКЭ) в пакете FlexPDE был использован для вычисления этих величин на сетке значений пористости $p \in [0, 0,8]$ и глубин $h \in [0,005, 0,030]$ м. Плотная сетка $64 \times 64 = 4096$ точек была сгенерирована с использованием кубической интерполяции из исходных 30 точек, рассчитанных МКЭ. Все интерполированные поверхности были проверены на отсутствие NaN (not a number — не число) или недопустимых значений. Независимый тестовый набор из $100 \times 100 = 10\,000$ точек был сгенерирован для валидации.

3.1. 4-мерная линейная интерполяция

Метод 4-мерной линейной интерполяции работает следующим образом. Пусть имеется обучающий набор данных, состоящий из $N = 4096$ точек, каждая из которых представляет собой

Таблица 4. Производительность 4-мерного линейного интерполятора на независимом тестовом наборе (10 000 точек)

Table 4. Performance of 4-dimensional linear interpolator on independent test set (10,000 points)

Метрика	Значение
MAE для пористости p	0,00231 ($\approx 0,23$ % ошибка)
MAE для глубины h	0,000168 м (0,168 мм)
RMSE для пористости p	0,00760
RMSE для глубины h	0,000605 м (0,605 мм)

пару (X_i, y_i) , где $X_i = (k_4, \omega_4, k_5, \omega_5)$ — 4-мерная сигнатура, а $y_i = (p_i, h_i)$ — соответствующие параметры повреждения.

Для новой измеренной сигнатуры $X_{\text{нов}}$ использован следующий алгоритм линейной интерполяции:

- 1) находится симплекс (4-мерный треугольник) в обучающем наборе, содержащий точку $X_{\text{нов}}$ или ближайший к ней;
- 2) вычисляются барицентрические координаты точки $X_{\text{нов}}$ относительно вершин этого симплекса;
- 3) интерполируются значения параметров повреждения (p, h) как взвешенная сумма значений в вершинах симплекса с весами, равными барицентрическим координатам.

Если точка $X_{\text{нов}}$ находится вне выпуклой оболочки обучающего набора, используется метод ближайшего соседа (NearestNDInterpolator), который возвращает значение параметров повреждения из ближайшей обучающей точки.

Был построен 4-мерный линейный интерполятор для отображения сигнатуры $(k_4, \omega_4, k_5, \omega_5)$ обратно в (p, h) . Интерполятор был обучен на сетке из 4096 точек и протестирован на независимом тестовом наборе из 10 000 точек (табл. 4). Результаты показаны в верхнем ряду рис. 3. Здесь MAE (Mean Absolute Error) — это средняя абсолютная ошибка между предсказанными и истинными значениями, а RMSE (Root Mean Square Error) — квадратный корень из среднего квадрата ошибки.

3.2. Метод случайного леса для обратного отображения

Случайный лес — это ансамблевый метод машинного обучения, основанный на построении множества решающих деревьев. Для задачи обратного отображения 4-мерной сигнатуры $(k_4, \omega_4, k_5, \omega_5)$ в параметры повреждения (p, h) алгоритм работает следующим образом.

Обучение:

- из обучающей выборки (4096 точек) с помощью бутстрепа (случайная выборка с возвращением) формируется $T = 100$ подвыборок;
- для каждой подвыборки строится решающее дерево, при построении каждого дерева на каждом узле рассматривается случайное подмножество признаков (из 4 признаков выбирается $\sqrt{4} = 2$);
- каждое дерево обучается предсказывать значения (p, h) по входной сигнатуре.

Прогнозирование:

- для новой измеренной сигнатуры $X_{\text{нов}} = (k_4, \omega_4, k_5, \omega_5)$ каждое из T деревьев даёт своё предсказание (p_t, h_t) ;
- итоговое предсказание вычисляется как среднее арифметическое предсказаний всех деревьев:

$$(p, h) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (p_t, h_t).$$

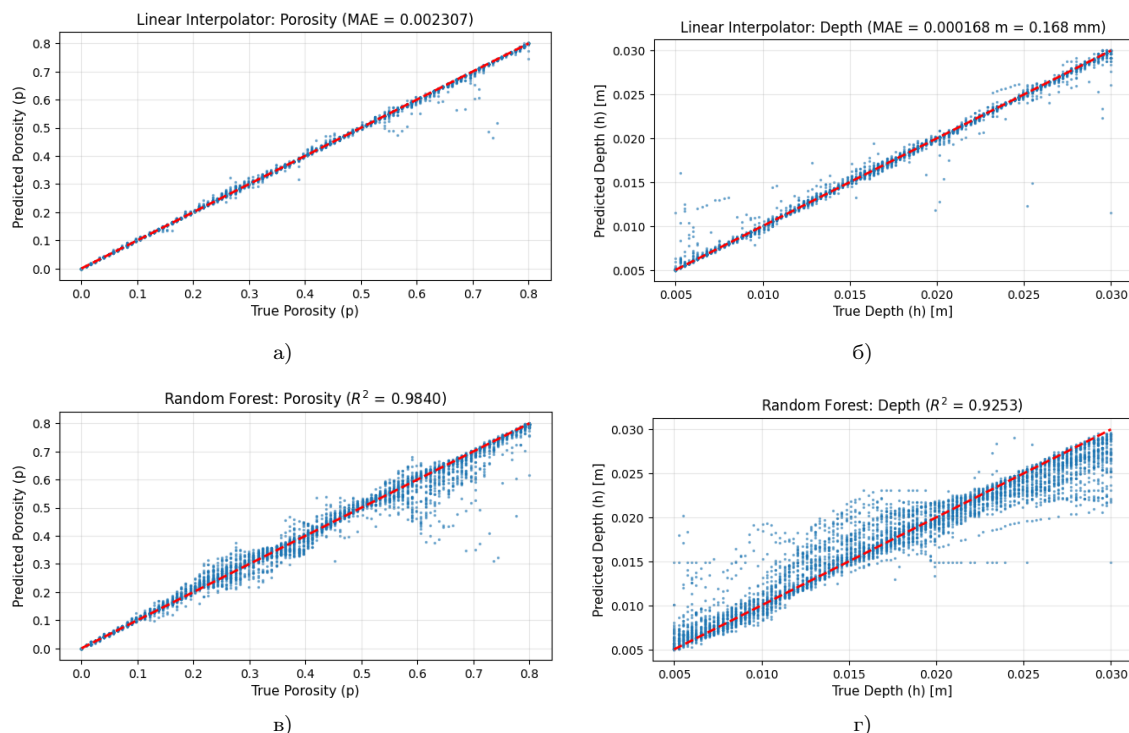


Рис. 3. Производительность обратного отображения для комбинации Моды 4 + Моды 5: а) и б) 4-мерная линейная интерполяция на независимом тестовом наборе (10 000 точек); в) и г) регрессия случайного леса на тестовых данных (10 000 точек). Отличное совпадение в верхнем ряду подтверждает точность метода 4-мерной линейной интерполяции; результаты случайного леса демонстрируют хорошее обобщение с R^2 баллами 0,984 для пористости и 0,925 для глубины

Fig. 3. Performance of inverse mapping for the combination of Mode 4 + Mode 5: а) and б) 4-dimensional linear interpolation on an independent test set (10,000 points); в) and г) random forest regression on the test data (10,000 points). The excellent match in the top row confirms the accuracy of the 4-dimensional linear interpolation method; the random forest results demonstrate good generalization with R^2 scores of 0.984 for porosity and 0.925 for depth

Таблица 5. Производительность регрессии случайного леса на тестовых данных (10 000 точек)

Table 5. Performance of random forest regression on test data (10,000 points)

Величина	R^2 Score	MAE	RMSE
Пористость p	0,984	0,0146 ($\approx 1,46$ %)	0,0295
Глубина h	0,925	0,001241 м (1,241 мм)	0,001992 м (1,992 мм)

Важность признаков определяется тем, насколько уменьшается неопределённость (дисперсия) при разделении узлов дерева по данному признаку. Чем выше значение, тем более информативен признак.

Для оценки практической применимости метода был обучен регрессор случайного леса на обучающем наборе из 4096 точек и протестирован на независимом тестовом наборе из 10 000 точек. Результаты суммированы в табл. 5, где R^2 (коэффициент детерминации) — это мера того, насколько хорошо модель объясняет дисперсию данных.

Анализ важности признаков дает представление о том, какие измерения наиболее информативны для каждого параметра повреждения (табл. 6).

Эти результаты показывают, что:

- пористость p наиболее сильно коррелирует с волновым числом Моды 4 (k_4);
- глубина h наиболее сильно коррелирует с частотой Моды 5 (ω_5);

Таблица 6. Важность признаков для моделей случайного леса

Table 6. Feature importance for random forest models

Признак	Важность для p	Важность для h
k_4	0,6226	0,1981
ω_4	0,0372	0,1128
k_5	0,2586	0,2286
ω_5	0,0816	0,4606

Таблица 7. Результаты проверки единственности для обучающего и тестового наборов (только $p > 0$)

Table 7. Uniqueness test results for training and test sets (only $p > 0$)

Набор данных	Точек ($p > 0$)	Уникальных сигнатур
Обучающий набор (сетка 64×64)	4 032	4 032 (100 %)
Тестовый набор (сетка 100×100)	9 900	9 900 (100 %)

– комбинация обеих мод обеспечивает дополнительную информацию, разрешая неоднозначности, присутствующие в анализе одной моды.

3.3. Обсуждение результатов

Для демонстрации работы предложенных методов были выбраны репрезентативные сценарии повреждения. Результаты для метода 4-мерной линейной интерполяции показывают высокую точность: ошибка составляет менее 2 % для пористости и менее 1,4 % для глубины во всем диапазоне параметров. Для модели случайного леса относительная ошибка прогнозирования также находится в приемлемых пределах, однако наибольшие ошибки возникают на границах области параметров (очень малая глубина и максимальная глубина), что типично для методов машинного обучения вблизи границы обучающей выборки. Тем не менее, общая точность достаточна для инженерных приложений.

4. Проверка единственности

Для строгой проверки инъективности отображения 4-мерной сигнатуры $(k_4, \omega_4, k_5, \omega_5)$ в параметры повреждения (p, h) был проведен прямой анализ единственности на обучающем и тестовом наборах данных, исключая тривиальный случай неповрежденного бетона $p = 0$ (где глубина физически бессмысленна).

Как показано в табл. 7, каждое состояние повреждения с $p > 0$ дает уникальную 4-мерную сигнатуру. Это было проверено независимо как на обучающем наборе (4032 точки), так и на тестовом наборе (9900 точек). Никакие две различные пары (p, h) не дали одинаковую сигнатуру $(k_4, \omega_4, k_5, \omega_5)$.

Неединственность возникает при $p = 0$ (неповрежденный бетон), где поврежденный слой имеет те же свойства, что и подложка, что делает глубину физически бессмысленной. Это не влияет на практическое обнаружение повреждений.

Кроме того, локальная инъективность была проверена путем анализа ближайших соседей в 4-мерном пространстве. Среднее евклидово расстояние между соответствующими параметрами (p, h) соседних сигнатур составило 0,026, что подтверждает, что близкие сигнатуры отображаются в близкие параметры повреждения.

Заключение

В данном исследовании представлена комплексная методология оценки поверхностных повреждений бетонных конструкций на основе анализа распространения упругих волн. Исследование было направлено на решение обратной задачи определения параметров повреждения,

а именно пористости p и толщины h поврежденного слоя, по измеряемым волновым характеристикам.

Была разработана двухслойная анизотропная модель полосы, в которой верхний слой представлен пористым композитом, эффективные упругие свойства которого были рассчитаны с использованием пакета ACELAN-COMPOS. Выведены определяющие уравнения распространения волн, приводящие к системе однородных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих поведение упругих волн в поврежденной структуре. Метод конечных элементов, реализованный в пакете FlexPDE, использовался для решения задачи на собственные значения и построения дисперсионных кривых $\omega = \omega(k)$ для различных сценариев повреждения.

Проведенный параметрический анализ показал, что дисперсионные характеристики высокочувствительны к параметрам повреждения, особенно при высоких значениях пористости ($p > 50\%$). Частота и волновое число демонстрируют четкую зависимость от пористости, в то время как поверхности и контурные графики дают детальную визуализацию совместного влияния толщины и пористости. Однако комбинированный контурный график показал, что одна дисперсионная мода не гарантирует единственности обратного решения, так как возможны множественные пересечения между контурами частоты и волнового числа [17].

Для разрешения этой неединственности были объединены две независимые дисперсионные моды (Мода 4 и Мода 5) в 4-мерную сигнатуру $(k_4, \omega_4, k_5, \omega_5)$. Плотная сетка $64 \times 64 = 4096$ обучающих точек была сгенерирована, и независимый тестовый набор из $100 \times 100 = 10\,000$ точек использован для валидации.

Основные результаты:

- 1) единственность доказана: прямая проверка на обучающем и тестовом наборах подтвердила, что все 4032 обучающих точки и 9900 тестовых точек с $p > 0$ дают уникальные 4-мерные сигнатуры;
- 2) 4-мерная линейная интерполяция достигла MAE 0,00231 для пористости (0,23 % ошибка) и 0,168 мм для глубины на независимом тестовом наборе;
- 3) регрессия случайного леса достигла $R^2 = 0,984$ для пористости и $R^2 = 0,925$ для глубины;
- 4) важность признаков подтверждает, что k_4 наиболее информативен для пористости (0,6226), а ω_5 наиболее информативна для глубины (0,4606);
- 5) локальная инъективность подтверждена со средним расстоянием между соседями 0,026 в пространстве параметров.

Предложенная методология дает несколько практических преимуществ для мониторинга состояния конструкций: она является неразрушающей, обеспечивает количественные оценки как глубины, так и степени повреждения, чувствительна к начальным повреждениям и основана на измеряемых величинах (частотах и волновых числах), которые могут быть получены с помощью стандартных экспериментальных методов. Многомодовый подход разрешает неоднозначности, присущие анализу одной моды, и дает точные прогнозы на большей части области параметров.

Будущие исследования должны быть сосредоточены на экспериментальной валидации с использованием лабораторных образцов и натурных измерений, распространении на трехмерные сценарии повреждения и сложные геометрии, учете повреждений, развивающихся во времени, интеграции с системами мониторинга в реальном времени и применении к другим конструкционным материалам и механизмам повреждения. Включение дополнительных дисперсионных мод может в дальнейшем повысить точность на границах области параметров.

В целом, данное исследование представляет собой надежную вычислительную основу для оценки поверхностных повреждений бетонных конструкций. Подход, основанный на многомодовом решении обратной задачи, в сочетании с численным моделированием и машинным обучением, открывает многообещающие возможности для развития неразрушающих методов контроля в строительной инженерии.

Литература [References]

1. Huh, J., Doan, N. S., Lee, B. Y., Haldar, A., A comprehensive study on identification of both deck and soffit defects in concrete bridge decks through thermographic investigation of shaded side under natural conditions. *Construction and Building Materials*, 2021, vol. 303, art. 124452. DOI: [10.1016/j.conbuildmat.2021.124452](https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.124452)
2. Gaur, A., Kishore, K., Jain, R., Pandey, A., Singh, P., Wagri, N. K., Roy-Chowdhury, A. B., A novel approach for industrial concrete defect identification based on image processing and deep convolutional neural networks. *Case Studies in Construction Materials*, 2023, vol. 19, art. e02392. DOI: [10.1016/j.cscm.2023.e02392](https://doi.org/10.1016/j.cscm.2023.e02392)
3. Naji, K., Gowid, S., Ghani, S., AI and IoT-based concrete column base cover localization and degradation detection algorithm using deep learning techniques. *Ain Shams Engineering Journal*, 2023, vol. 14, iss. 11, art. 102520. DOI: [10.1016/j.asej.2023.102520](https://doi.org/10.1016/j.asej.2023.102520)
4. Rossi, E., Zhang, H., Garcia, S. J., Bijleveld, J., Nijland, T. G., Çopuroğlu, O., Šavija, B., Analysis of naturally-generated corrosion products due to chlorides in 20-year-old reinforced concrete: An elastic modulus-mineralogy characterization. *Corrosion Science*, 2021, vol. 184, art. 109356. DOI: [10.1016/j.corsci.2021.109356](https://doi.org/10.1016/j.corsci.2021.109356)
5. Almalki, M., Application of non-destructive geophysical methods for testing concrete structures. *Journal of King Saud University – Science*, 2023, vol. 35, iss. 8, art. 102916. DOI: [10.1016/j.jksus.2023.102916](https://doi.org/10.1016/j.jksus.2023.102916)
6. Nguyen, A., Gharehbaghi, V., Le, N. T., Sterling, L., Chaudhry, U. I., Crawford, S., ASR crack identification in bridges using deep learning and texture analysis. *Structures*, 2023, vol. 50, pp. 494–507. DOI: [10.1016/j.istruc.2023.02.042](https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.02.042)
7. Ibrahim, K. A., van Zijl, G. P., Babafemi, A. J., Comparative studies of LC3- and fly ash-based blended binders in fibre-reinforced printed concrete (FRPC): Rheological and quasi-static mechanical characteristics. *Journal of Building Engineering*, 2023, vol. 80, art. 108016. DOI: [10.1016/j.jobbe.2023.108016](https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2023.108016)
8. Abadel, A. A., Khan, M. I., Masmoudi, R., Experimental and numerical study of compressive behavior of axially loaded circular ultra-high-performance concrete-filled tube columns. *Case Studies in Construction Materials*, 2022, vol. 17, art. e01376. DOI: [10.1016/j.cscm.2022.e01376](https://doi.org/10.1016/j.cscm.2022.e01376)
9. Galvão, N., Matos, J. C., Hajdin, R., Ferreira, L., Stewart, M. G., Impact of construction errors on the structural safety of a post-tensioned reinforced concrete bridge. *Engineering Structures*, 2022, vol. 267, art. 114650. DOI: [10.1016/j.engstruct.2022.114650](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.114650)
10. Fülöp, L., Ferreira, M., Bohner, E., Valokoski, J., Vuotari, J., Tirkkonen, T., Inspection of bridges for effects of air-entrainment on the porosity and compressive strength of concretes. *Case Studies in Construction Materials*, 2022, vol. 17, art. e01211. DOI: [10.1016/j.cscm.2022.e01211](https://doi.org/10.1016/j.cscm.2022.e01211)
11. Shen, C., Jiang, B., Yue, L., LSTM combined with BIM technology in the management of small and medium-span highway concrete beam bridges. *Results in Engineering*, 2023, vol. 20, art. 101539. DOI: [10.1016/j.rineng.2023.101539](https://doi.org/10.1016/j.rineng.2023.101539)
12. Frankowski, P. K., Chady, T., Zieliński, A., Magnetic force induced vibration evaluation (M5) method for frequency analysis of rebar-debonding in reinforced concrete. *Measurement*, 2021, vol. 182, art. 109655. DOI: [10.1016/j.measurement.2021.109655](https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.109655)
13. Tatarinov, A., Sisojevs, A., Chaplinska, A., Shahmenko, G., Kurtenoks, V., An approach for assessment of concrete deterioration by surface waves. *Procedia Structural Integrity*, 2022, vol. 37, pp. 453–461. DOI: [10.1016/j.prostr.2022.01.109](https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.01.109)
14. Soloviev, A. N., Germanchuk, M. S., Abraha, O. K., Modeling the Damaged State of Building Structures and Its Influence on Their Dynamic Properties. In: Parinov, I.A., Chang, S.H., Sohani, N., Gupta, V.K. (eds.), *Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications. Springer Proceedings in Materials*, vol. 3. Springer, Cham, 2025, pp. 449–456. DOI: [10.1007/978-3-031-87677-6_39](https://doi.org/10.1007/978-3-031-87677-6_39)
15. Чебаненко, В.А., Шевцов, С.Н., Кириллова, Е.В., Разработка физически обоснованной модели распространения ультразвуковых волн в бетоне с частично деградированным наружным слоем. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2025, т. 22, № 4, pp. 45–55. [Chebanenko, V. A., Shevtsov, S. N., Kirillova, E. V., Development of a physically based model of ultrasonic wave propagation in concrete with a partially degraded surface layer. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2025, vol. 22, no. 4, pp. 45–55. (in Russian)] DOI: [10.31429/vestnik-22-4-45-55](https://doi.org/10.31429/vestnik-22-4-45-55)
16. Kudimova, A. B., Nadolin, D. K., Nasedkin, A. V., Nasedkina, A. A., Oganessian, P. A., Soloviev, A. N.,

- Finite element homogenization of piezocomposites with isolated inclusions using improved 3-0 algorithm for generating representative volumes in ACELAN-COMPOS package. *Materials Physics and Mechanics*, 2020, vol. 44, iss. 3, pp. 392–403. DOI: [10.18720/MPM.4432020_10](https://doi.org/10.18720/MPM.4432020_10)
17. Nasedkin, A. V., Oganessian, P. A., Soloviev, A. N., Analysis of Rosen type energy harvesting devices from porous piezoceramics with great longitudinal piezomodulus. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2021, vol. 101, iss. 3, art. e202000129. DOI: [10.1002/zamm.202000129](https://doi.org/10.1002/zamm.202000129)
 18. Ворович И.И., Бабешко, В.А., *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. Москва, наука, 1979. [Vorovich, I. I., Babeshko, V. A., Dynamic mixed problems of the theory of elasticity for nonclassical domains. Moscow, Nauka, 1979. (in Russian)]
 19. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., *Интегральные преобразования и волновые процессы*. Краснодар, Кубанский государственный университет, 2017. [Glushkov, E. V. Glushkova, N. V., Integral Transformations and Wave Processes. Krasnodar, Kuban State University, 2017. (in Russian)]
 20. Soloviev, A., Germanchuk, M., Abraha, O., Inverse Problem of Determining Surface Damage of Extended Structures. *Proc. Book of International Congress on New Trends in Mechanics (ICNTM25)*. Baku, 2025, pp. 620–628.