

УДК 539.3 + 518.5

EDN: RUHUUH DOI: 10.31429/vestnik-23-3-35-43

Термоупругое состояние вращающегося тела

В. Б. Пеньков , **Л. В. Левина**  , **Д. А. Суслин**

Липецкий государственный технический университет, ул. Московская, 30, Липецк, 398055, Россия

✉ Левина Любовь Владимировна; ORCID 0000-0002-7441-835X; SPIN 6294-4940;

e-mail: satalkina_lyubov@mail.ru

Аннотация. Выписаны определяющие соотношения линейной изотропной термоэластостатической среды. Оценена эффективность энергетического метода граничных состояний (МГС) при решении краевых задач для разрешающих уравнений Лапласа и Ламе. Выполнена оценка состояния нагретого продолговатого сфероида, вращающегося вокруг поперечной оси. Выписано строгое решение при оценке напряжённо-деформированного состояния (НДС) сфероида под действием сил инерции. Проведены расчёты, построены графики, сделаны комментарии и выводы. Обозначены перспективы.

Ключевые слова: метод граничных состояний, термоупругость, вращающийся сфероид, энергетический метод.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Пеньков В. Б., Левина Л. В., Суслин Д. А. Термоупругое состояние вращающегося тела // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2026. Т. 23, № 3. С. 35–43. EDN: RUHUUH. DOI: 10.31429/vestnik-23-3-35-43

Поступила 11 июня 2026 г. После доработки 9 сентября 2026 г. Принято 14 сентября 2026 г. Публикация 25 сентября 2026 г.

Пеньков В.Б. — идея/концепция работы, анализ данных, внесение правок в статью, утверждение окончательного варианта. Левина Л.В. — анализ данных, написание статьи, утверждение окончательного варианта. Суслин Д.А. — проведение экспериментов, вычислений, анализ данных. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2026. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Thermoelastic State of a Rotating Body

V. B. Penkov , **L. V. Levina**  , **D. A. Suslin**

Lipetsk State Technical University, Moskovskaya St., 30, Lipetsk, 398055, Russia

✉ Lyubov V. Levina; ORCID 0000-0002-7441-835X; e-mail: satalkina_lyubov@mail.ru

Abstract. The constitutive equations of a linear isotropic thermoelastostatic medium are presented. The effectiveness of the Energy Method of Boundary States (MBS) for solving boundary value problems involving the Laplace and Lamé equations is assessed. An analysis of the thermoelastic state of a heated prolate spheroid rotating about its transverse axis is carried out. An exact solution for determining the stress-strain state (SSS) of the spheroid under inertial forces is derived. Calculations are performed, graphical dependencies are constructed, comments and conclusions are formulated. Prospects for further research are indicated.

Keywords: method of boundary states, thermoelasticity, rotating spheroid, energy method.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Penkov, V. B., Levina, L. V., Suslin, D. A., Thermoelastic state of a rotating body. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2026, vol. 23, no. 3, pp. 35–43. DOI: 10.31429/vestnik-23-3-35-43

Received 11 June 2026. Revised 9 September 2026. Accepted 14 September 2026. Published 25 September 2026.

Penkov V.B. — conceptualization and idea of the work, data analysis, review and editing of the manuscript, approval of the final version. Levina L.V. — data analysis, writing the original draft, approval of the final version. Suslin D.A. — conducting experiments and computations, data analysis. The authors declare no competing interests.

© The Author(s), 2026. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.

Введение

Классическими примерами использования подхода Треффца к анализу термоупругих состояний осесимметричных тел служит ряд научных работ последнего времени, исследующих НДС вращающихся объектов [1–4]. В них базисные функции обладают осевой симметрией. Показано преимущество бессеточного подхода [2], учитывается нестационарность теплообмена [3], неоднородное термомеханическое состояние высокооборотных валов турбомашин [4].

Научная новизна работы заключается в отклонении от традиционного подхода, при котором для осесимметричных тел формулируются осесимметричные постановки краевых задач. Рассматривается краевая задача с объемными силами, вызванными асимметричным вращающимся воздействием сил инерции на НДС термонапряженного тела при различных вариантах термостатического состояния.

Целью работы является исследование НДС термоупругого твёрдого линейно-деформируемого тела, подверженного температурному воздействию и объёмным силовым факторам.

Для достижения цели требуется выполнить решение ряда задач:

- 1) выписать определяющие соотношения линейной изотропной термоэластостатической среды, заполняющей тело;
- 2) обозначить характеристики среды в виде согласованных списков внутренних и граничных состояний тела, определяющих элементов соответствующих пространств состояний;
- 3) кратко охарактеризовать особенности метода граничных состояний, опирающегося на подход Треффца к использованию в общих решений разрешающих систем уравнений;
- 4) обозначить способы формирования сепарабельных базисов гильбертовых пространств внутренних и граничных состояний;
- 5) продемонстрировать эффективность применения МГС в решении задач термостатики, эластостатики;
- 6) выполнить постановку задачи о состоянии вращающегося сфероида, подверженного поверхностным тепловым и внутренним инерционным воздействием;
- 7) найти частное решение; рассчитать состояние тела средствами МГС, прокомментировать решение.

1. Определяющие соотношения

Квазистатическое состояние однородной изотропной термоупругой среды порождается рядом воздействующих факторов:

- 1) теплоисточники $Q(x, y, z)$, распределённые по области $V \subset \mathbb{R}^3$, занятой телом, генерируют внутренние потоки тепла, изменяющие температуру $T(x, y, z)$ внутри тела;
- 2) внешние температурные воздействия, влияющие на изменения поля температуры через границу ∂V тела. Это может быть как значение температуры T_0 на границе S_D тела (условие Дирихле), так и нормальный поток температуры $\varphi_0 = dT/dn$ через участки границы (условие Неймана). Возможны и смешанные варианты;
- 3) объёмные силовые воздействия $\mathbf{X}(x, y, z) = \{X, Y, Z\}$, возникающие по различным причинам (силы тяжести, силы инерции, силы иной физической природы);
- 4) поверхностные деформирующие факторы, как то поверхностные усилия $\mathbf{p}_0 = \{p_x, p_y, p_z\}$, перемещение точек границы ∂V тела $\mathbf{u}_0 = \{u_x, u_y, u_z\}$, условия контактного взаимодействия и др.

Внутреннее термоэластостатическое состояние ξ удобно описывать набором согласованных температурных и механических характеристик:

- температурой T ;
- температурным градиентом $T_{,i}$ (тензорно-индексная форма записи, $i \in \{1, 2, 3\} \equiv \{x, y, z\}$);
- вектором перемещений $\{u_i\}$;
- тензором деформаций Коши $[\varepsilon_{ij}]$;
- тензором напряжений $[\sigma_{ij}]$.

Удобно для внутреннего состояния использовать список $\xi = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, T, T_{,i}\}$. Все возможные варианты согласованных характеристик образуют гильбертово пространство внутренних состояний $\xi \in \Xi$.

Согласованность перечисленных характеристик обусловлена системой определяющих соотношений среды ($\mathbf{r} = \{x_i\} \in V$):

уравнением теплопроводности

$$T_{,ii} + \frac{1}{\kappa} Q = 0; \quad (1.1)$$

формулами Коши

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}; \quad (1.2)$$

законом Дюамеля–Неймана

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha T \delta_{ij}. \quad (1.3)$$

Используемые здесь параметры имеют конкретные физические смыслы и собственное название: κ — коэффициент температуропроводности, α — коэффициент температурного расширения, μ — модуль сдвига, λ — модуль объёмного расширения, δ_{ij} — символ Кронекера.

Эластостатическое состояние деформируемого твёрдого тела подчинено системе уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0. \quad (1.4)$$

Их выражения через перемещения u_i имеет форму уравнений Ламе

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{i,ji} + X_i = 0. \quad (1.5)$$

В целом система разрешающий уравнений содержит четыре дифференциальных уравнения эллиптического типа, причём каждое уравнение имеет второй порядок

$$\begin{cases} \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{i,ji} - (3\lambda + 2\mu) \alpha T_{,i} + X_i = 0, \\ T_{,ii} + 1/\kappa Q = 0, \quad x_i \in V. \end{cases} \quad (1.6)$$

Линейный характер системы (1.6) позволяет разложить искомое состояние среды на сумму двух состояний:

- 1) частное решение, обусловленное объёмными факторами X_i , Q ;
- 2) состояние для однородного варианта, отвечающее задаваемым граничным условием, учитывающим поправки, вызванные частным решением.

2. Применение метода граничных состояний к решению задач термоэластостатики

Частные решения задач термостатики и линейной изотропной эластостатики при описании теплоисточников Q и объёмных сил $\mathbf{X}$ 3D – многочленами конечного порядка строятся с абсолютной точностью [5]. Это позволяет корректировать граничные условия (ГУ), после чего проблема сводится к отысканию решения краевой задачи для однородной части разрешающей системы уравнений (1.6).

Эффективным оказывается подход Треффца [6], опирающийся на использование общих решений в энергетических методах [6].

Современный метод граничных состояний позволяет высчитывать решения в численно-аналитической форме [7] и даже строить полнопараметрические аналитические решения для изотропных тел произвольной геометрической конфигурации [8].

Базисы пространств состояний температурного и упругих сред опираются на набор гармонических многочленов

$$\Phi = \{x, y, z, xy, xz, yz, x^2 - y^2, x^2 - z^2, xyz, \dots\} = \{\varphi^\kappa\},$$

который генерируется автоматически по указанию максимального порядка списка таковых. В случае ограниченной односвязной области именно Φ является базисом гармонических функций $\Phi^+ \equiv \Phi$. В случае тела, занимающего внешность односвязной полости, базис гармонических функций также выписывается эффективно [9]:

$$\Phi^- = \left\{ \frac{1}{r} \right\} \cup \{ \psi^k \}, \quad \psi^k = \frac{\varphi^\kappa}{r^{2n+1}}, \quad n = \text{ord } \varphi^\kappa, \quad (2.1)$$

где r — длина радиус-вектора точки пространства с отсчётом от произвольного полюса внутри полости. Наборы Φ^+ , Φ^- позволяют формировать базисы для произвольного ограниченного или неограниченного многополюсного тела, что определяет базис пространств внутренних состояний $\Xi^T = \{T^k, T_{,i}^k\}$, $\mathbf{r} \in V$, и граничных состояний $\Gamma^T = \{T^k, dT^k/d\mathbf{n}\}$, $\mathbf{r} \in \partial V$.

Использование решений Аржаных–Слободянского [10, 11] однородных уравнений Ламе позволяет выписывать базисы внутренних и граничных состояний для эластостатических сред:

$$\Xi^E = \{u_i^E, \varepsilon_{ij}^E, \sigma_{ij}^E\}, \quad \mathbf{r} \in V, \quad \Gamma^E = \{u_i^E, p_i^E\}, \quad \mathbf{r} \in \partial V,$$

где $p_i^E = \sigma_{ij}^E n_j$.

Пространства внутренних и граничных состояний являются гильбертовыми, изоморфными $\Xi^T \Leftrightarrow \Gamma^T$, $\Xi^E \Leftrightarrow \Gamma^E$, поскольку они линейные, полные, всюду плотные со скалярными произведениями

$$\begin{aligned} (\xi^{T_k}, \xi^{T_m})_{\Xi^T} &= \int_V T_{,j}^k T_{,j}^m dV, & (\gamma^{T_k}, \gamma^{T_m})_{\Gamma^T} &= \int_{\partial V} T^k \frac{\partial T^m}{\partial \mathbf{n}} dS, \\ (\xi^{E_k}, \xi^{E_m})_{\Xi^E} &= \int_V \sigma_{ij}^k \varepsilon_{ij}^m dV, & (\gamma^{E_k}, \gamma^{E_m})_{\Gamma^E} &= \int_{\partial V} p_i^k u_i^m dS. \end{aligned}$$

«Гильбертов изоморфизм» пространств является основой МГС и опирается на равенство скалярных произведений изоморфных пар элементов в обоих пространствах. Он позволяет отыскивать решения в форме рядов Фурье по элементам ортонормированных базисов:

$$\begin{aligned} \xi^T &= \sum_k c_k^T \xi^{T_k}, & \gamma^T &= \sum_k c_k^T \gamma^{T_k}, \\ \xi^E &= \sum_l c_l^E \xi^{E_l}, & \gamma^E &= \sum_l c_l^E \gamma^{E_l}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Примерами эффективного решения задач термостатики служат решения задач для уравнения Лапласа:

а) задача Дирихле ($T|_{\partial V} = T_0$):

$$c_k^T = \int_{\partial V} T_0 \frac{dT^k}{d\mathbf{n}} dS;$$

б) задача Неймана ($\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial V} = T_n$):

$$c_k^T = \int_{\partial V} T_n T^k dS.$$

В статической теории упругости примерами служат:

а) первая основная задача ($p_i|_{\partial V} = p_i^0$):

$$c_k^E = \int_{\partial V} p_i^0 u_i^k dS;$$

б) вторая основная задача ($u_i|_{\partial V} = u_i^0$):

$$c_k^E = \int_{\partial V} u_i^0 p_i^k dS.$$

При смешанных линейных ГУ решение сводится к системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье [12].

В случае несвязанности характеристик температурного и упругого состояний в ГУ краевые задачи для (1.6) позволяют провести декомпозицию процесса решения:

- 1) решается задача термостатики. Корректируются ГУ, если в этом возникла необходимость;
- 2) решается задача теории упругости. Восстанавливаются поля напряжений, деформаций, перемещений;
- 3) формируется окончательный ответ на вопрос о термоэластостатическом состоянии ξ .

3. Термоупругое состояние вращающегося сфероида

Полагаем все характеристики геометрии тела и физических свойств среды безразмерными со значениями коэффициентов $\nu = 1/4$, $\alpha = 0,2$.

Сфероид $x^2 + y^2 + 1/25 z^2 \leq 1$ вращается с угловой скоростью ω вокруг оси y (рис. 1). Плотность материала $\rho = 1$. Поверхность ∂V тела свободна от нагрузки $\mathbf{p}_0 = 0$, но подвержена стационарному температурному воздействию (4 варианта): а) $T_0 = z$; б) $T_0 = 0,1z$; в) $T_0 = 0,1/5 z^2$; г) $T_0 = 0,1/25 z^3$. Объёмные теплоисточники отсутствуют: $Q = 0$.

Для решения задач Дирихле удерживался отрезок базиса гармонических многочленов максимального порядка 5. Выполнена ортогонализация и оценена её погрешность: $\delta = 2 \cdot 10^{-3}$.

Распределение температуры при различных вариантах поверхностного воздействия изображены на (рис. 2). Уровни значений температуры помечены на двух соседних изолиниях (шаг постоянный).

Анализ температурных полей позволяет сделать следующие выводы:

- 1) распределение температуры внутри вращающегося сфероида, при граничных условиях Дирихле, зависит от конкретного температурного воздействия на его поверхности;
- 2) в случаях с линейным законом изменения температуры на границе (задачи а, б) ослабление граничного воздействия на порядок уменьшает перепад температур, но не меняет общую картину;
- 3) квадратичное воздействие (в) перестраивает распределение, поле температуры становится симметричным относительно средней плоскости;
- 4) кубическое воздействие (г) приводит к асимметрии. Контраст выражен сильнее, чем в линейных задачах;
- 5) во всех четырёх случаях невязка остаётся на уровне $2,19 \cdot 10^{-9}$, а суммы Бесселя выходят на насыщение. Это свидетельствует о корректности базиса.

Упругое состояние сфероида, вращающегося вокруг поперечной оси Oy , определяется объёмными центробежными силами инерции, которые в безразмерной форме при $\rho\omega^2 = 1$

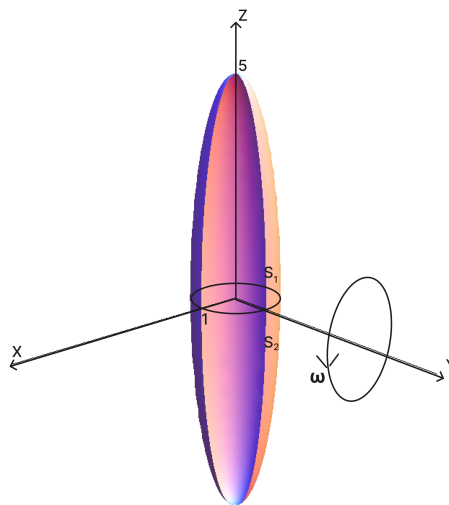


Рис. 1. Вращающийся сфероид

Fig. 1. Rotating spheroid

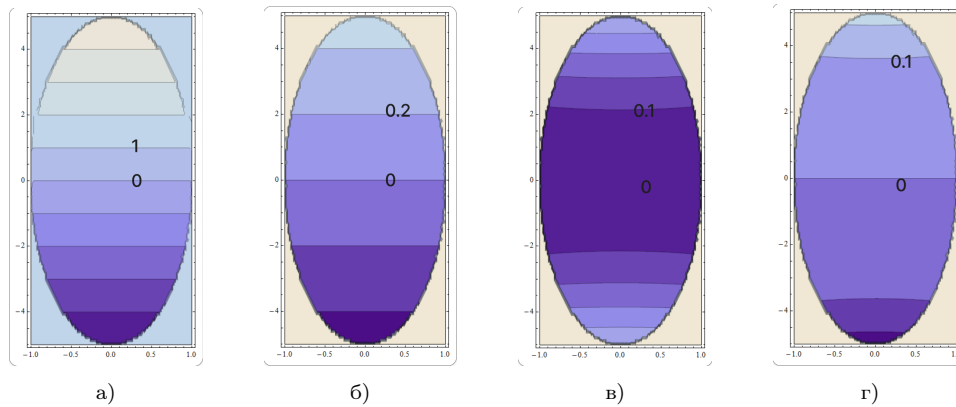


Рис. 2. Распределение температуры в задачах Дирихле

Fig. 2. Temperature distribution in Dirichlet problems

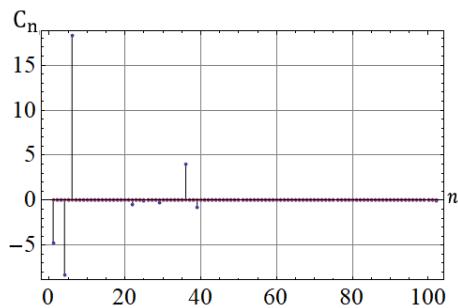


Рис. 3. Коэффициенты Фурье (задача эластостатики)

Fig. 3. Fourier coefficients (elastostatics problem)

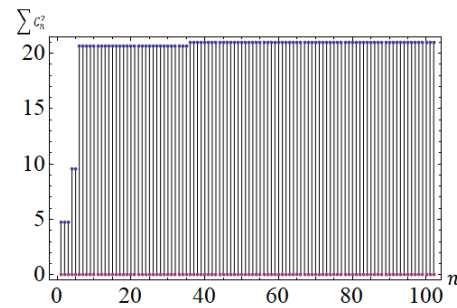


Рис. 4. Насыщение суммы Бесселя (задача эластостатики)

Fig. 4. Saturation of the Bessel sum (elastostatics problem)

имеют простой вид

$$\mathbf{X} = \rho\omega^2\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

и порождают упругое поле [5]

$$\xi^E = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{x^3}{18} \\ 0 \\ -\frac{z^3}{18} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{x^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{z^2}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{x^2}{6} - \frac{z^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{x^2}{6} - \frac{z^2}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

На рис. 3 и рис. 4 представлены коэффициенты Фурье и насыщение суммы Бесселя для эластостатической задачи после корректировки ГУ от температурных воздействий. Представленные на рисунках графики позволяют оценить уровень вычислительной погрешности в зависимости от количества удерживаемых элементов базиса.

Термоупругое состояние формируются за счёт суммирования полей перемещений и деформаций: поле напряжений совпадает с $\hat{\sigma}^E$. Результаты расчётов представлены на рис. 5 (вариант а) и рис. 6 (вариант б, в, г). Последний набор рисунков показывают, что при низких уровнях температурного воздействия искажение НДС проявляется слабо.

В целом характер полей напряжений и деформаций отражает поверхностные воздействия следующим образом:

1) независимо от уровней температурного воздействия осевые деформации $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$ — сжимающие у оси вращения и растягивающие у вершины сфероида; деформации ε_{zz} напротив —

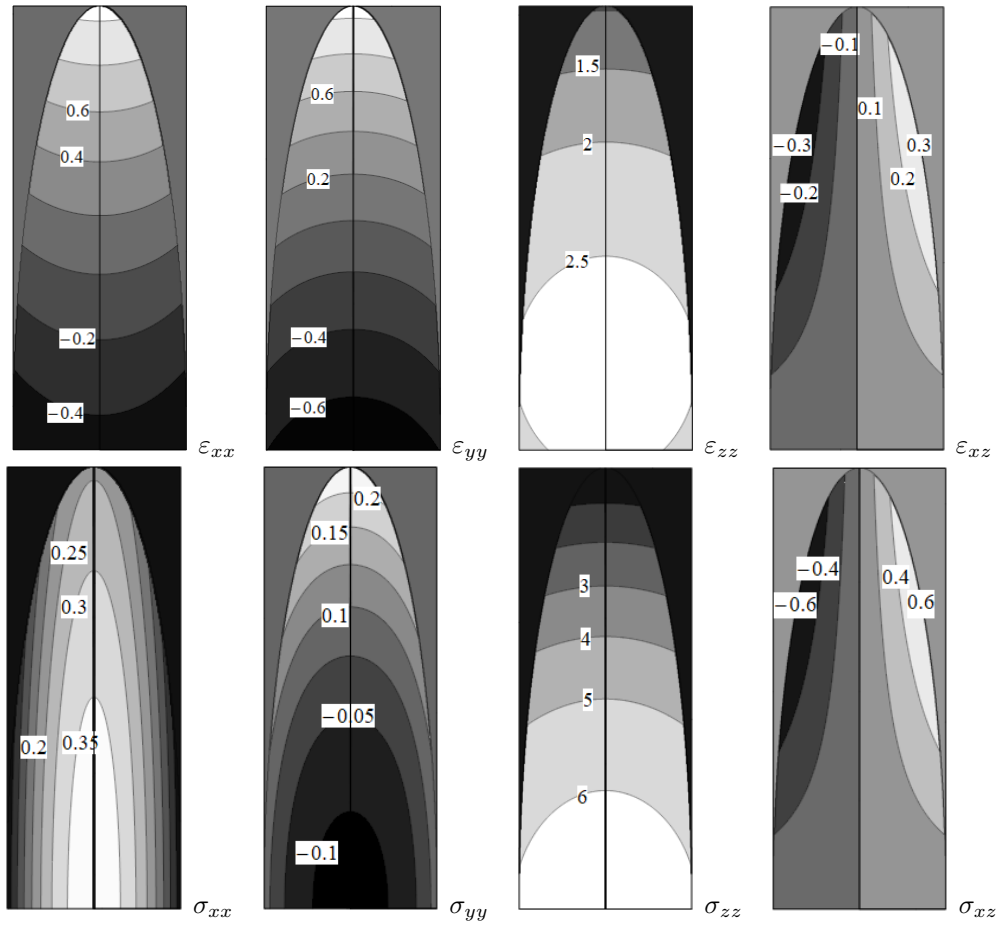


Рис. 5. Деформации и напряжения в осевом сечении (задача а)

Fig. 5. Deformations and stresses in the axial section (Problem a)

сжимающие у вершин сфероида и растягивающие у Oy , причём центр сфероида выглядит как «ядро растяжения» вдоль Oz ;

2) характер распределения напряжений не зависит от температурного воздействия: вблизи оси симметрии напряжения σ_{xx} — растягивающие, σ_{yy} меняются от сжимающего характера у оси вращения до растягивающего при приближении к вершинам сфероида, а σ_{zz} имеют прямо противоположный эффект;

3) напряжения сдвига σ_{xz} имеют характер, идентичный деформациям сдвига: вблизи оси вращения сдвигов практически не наблюдаются; вблизи границ на удалении от оси вращения силы инерции деформируют сфероид, заостряя угол Oxz .

Результаты расчета средствами МГС имеют численно-аналитическую форму записи. Это позволяет оценить НДС в любой точке твердого тела. Ниже приведены компоненты вектора перемещений:

$$u_x = -0,482x - 0,035x^3 - 0,003x^5 - 0,139xy^2 - 0,01x^3y^2 + 0,027xy^4 + 0,022xz^2,$$

$$u_y = -0,732y + 0,108x^2y + 0,028x^4y + 0,049y^3 - 0,01x^2y^3 - 0,003y^5 + 0,032yz^2,$$

$$u_z = 2,561z - 0,143x^2z + 0,001x^4z - 0,153y^2z - 0,004x^2y^2z + 0,001y^4z - 0,035z^3.$$

Разработанный подход для решения задач термоупругости может быть использован в энергетическом машиностроении для оценки ресурса деталей и предотвращения разрушений.

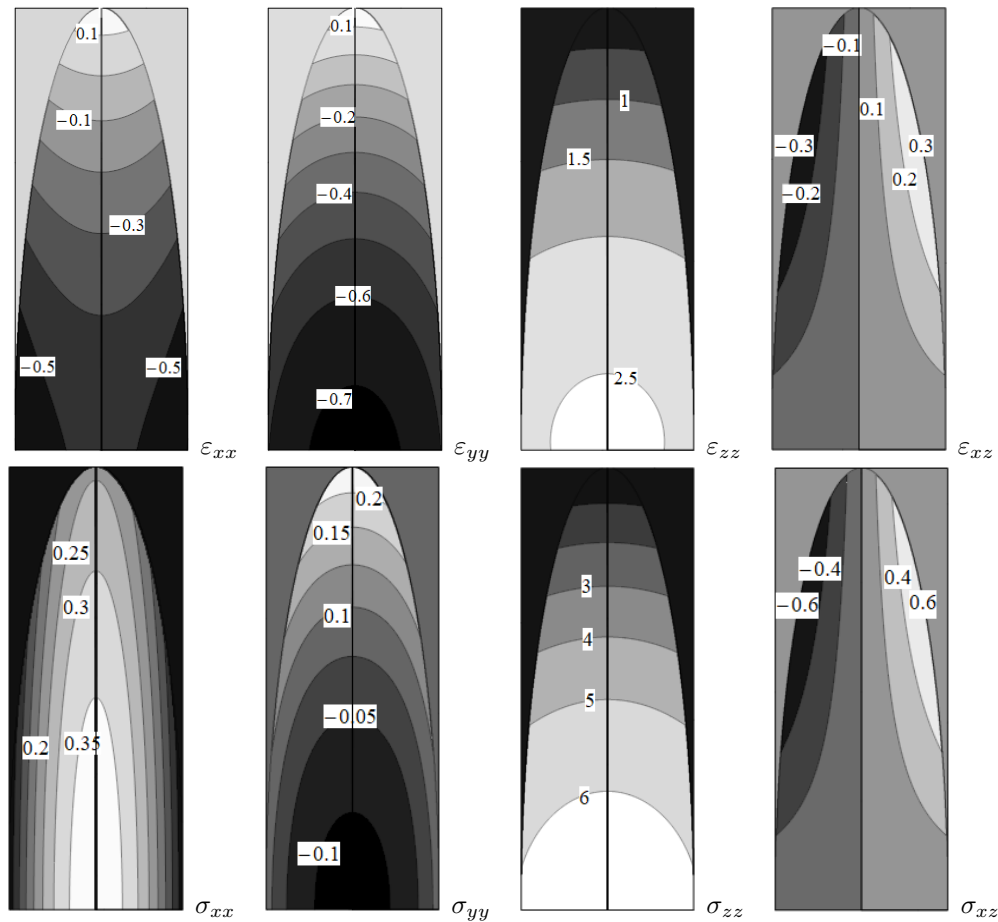


Рис. 6. Деформации и напряжения в осевом сечении (задача б, в, г)

Fig. 6. Deformations and stresses in the axial section (problems б, в, г)

Закключение

Энергетический метод граничных состояний использован для оценки термостатического напряжённо-деформированного состояния линейного изотропного тела. Эффективность подхода продемонстрирована на примере продолговатого теплопроводного сфероида, вращающегося вокруг поперечной оси. Выполнен анализ состояния тела и сделаны выводы.

Перспективным является направление исследований, в которых ГУ содержат информацию, связывающую характеристики теплового и упругого состояний.

Литература [References]

1. Gu, Y., Chen, W., Zhang, C., A Trefftz-type meshless collocation method for 3D thermoelasticity problems in complex rotating components. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2023, vol. 405, art. 115890.
2. Arslan, E., Mack, W., Meshless radial basis function (RBF) collocations for thermal stress analysis of rotating functionally graded disks with variable thickness. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, vol. 242, art. 108012.
3. Zenkour, A.M., El-Shahrany, H.D., Meshfree analysis of transient thermoelastic response of rotating FG micro-cylinders using localized Trefftz-RBF method. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2023, vol. 51, no. 8, pp. 4310–4329.
4. Li, M., Yu, B., Element-Free Galerkin (EFG) formulation for 3D thermo-mechanical analysis of high-speed rotating shafts. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 2024, vol. 85, no. 3, pp. 201–219.

5. Пеньков, В.Б., Новиков, Е.А., Строгое решение задачи о состоянии линейно-упругого изотропного тела под воздействием полиномиальных объемных сил. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*, 2021, т. 25, № 3, с. 475–490. [Penkov, V.B., Novikov, E.A., Exact solution of the problem on the state of a linearly elastic isotropic body under polynomial body forces. *Bulletin of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences*, 2021, vol. 25, no. 3, pp. 475–490. (in Russian)]
6. Ректорис, К., *Вариационные методы в математической физике и технике*. Москва, Мир, 1985. [Rektoris, K., *Variational methods in mathematical physics and engineering*. Moscow, Mir Publ., 1985. (in Russian)]
7. Penkov, V., Levina, L., Levin, M., Effective solution of classical boundary value problems of a thermoelastostatically multi-cavity body by means of the theory of hilbert spaces. In *2024 6th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*. IEEE, 2024. pp. 589–592.
8. Новикова, О.С., *Построение полнопараметрических аналитических решений задач теории упругости на основе метода граничных состояний*: дисс. канд. физ.-мат. наук, Липецк, 2019. [Novikova, O.S., *Construction of full-parametric analytical solutions to problems of elasticity theory based on the boundary state method*: dissertation, PhD Phys. Math. Sciences, Lipetsk, 2019. (in Russian)]
9. Пеньков, В.Б., Саталкина, Л.В., Шульмин, А.С. Применение метода граничных состояний для анализа упругой среды с полостями и включениями. *Прикладная математика и механика*, 2014, т. 78, вып. 4, с. 1–15. [Penkov, V.B., Satalkina, L.V., Shulmin, A.S., Application of the boundary state method for the analysis of elastic media with cavities and inclusions. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, vol. 78, iss. 4, pp. 1–15. (in Russian)]
10. Аржаных, И.С., *Интегральные уравнения основных задач теории поля и теории упругости*. Ташкент, Изд-во АН УзССР, 1954. [Arzhanykh, I.S., *Integral equations of the basic problems of field theory and elasticity theory*. Tashkent, Publishing House of the Academy of Sciences of the Uzbek SSR, 1954. (in Russian)]
11. Слободянский, М.Г., Общие формы решений уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через гармонические функции. *Прикладная математика и механика*, 1954, т. 18, с. 55–74. [Slobodyansky, M.G., General forms of solutions of elasticity equations for simply connected and multiply connected regions expressed in terms of harmonic functions. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1954, vol. 18, pp. 55–74. (in Russian)]
12. Пеньков, В.В., *Метод граничных состояний в задачах линейной механики*: дисс. канд. физ.-мат. наук, Тула, 2002. [Penkov, V.V., *The method of boundary states in problems of linear mechanics*: diss., PhD in Phys. Math. Sciences, Tula, 2002. (in Russian)]