

УДК 539.3

EDN: GZPKHI DOI: 10.31429/vestnik-23-3-19-26

Интегральные характеристики затухания свободных колебаний сэндвич-стержня с вязкоупругим заполнителем

Д. В. Леоненко  

Белорусский государственный университет транспорта, ул. Кирова, 34, Гомель, 246653, Беларусь

✉ Леоненко Денис Владимирович; ORCID 0000-0001-8003-9279; e-mail: leoden@list.ru

Аннотация. Исследуется затухание свободных колебаний симметричного трёхслойного стержня с лёгким вязкоупругим заполнителем при произвольных начальных условиях. Уравнения движения получены из вариационного принципа с учётом диссипативной функции Рэлея, включающей сдвиговой и продольный механизмы внутреннего трения. Решение строится методом Бубнова–Галёркина по собственным формам упругой задачи. Вводятся интегральные характеристики затухания: относительная остаточная энергия, эффективный логарифмический декремент и время затухания до заданного уровня. Выполнен численный анализ для стержня с несущими слоями из сплава Д16Т и заполнителем из пенополистирола. Рассмотрены два вида начальных условий: отклонение по первой собственной форме и сосредоточенный импульс. Показано, что при импульсном воздействии эффективный декремент в начальный момент значительно превышает декремент основной моды и выходит на него после затухания высших мод. Для первой моды затухание происходит равномерно в течение всего процесса.

Ключевые слова: сэндвич-стержень, свободные колебания, вязкоупругое демпфирование, метод Бубнова–Галёркина, эффективный декремент, остаточная энергия, время затухания.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Цитирование: Леоненко Д. В. Интегральные характеристики затухания свободных колебаний сэндвич-стержня с вязкоупругим заполнителем // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2026. Т. 23, № 3. С. 19–26. EDN: GZPKHI. DOI: 10.31429/vestnik-23-3-19-26

Поступила 3 августа 2026 г. После доработки 21 сентября 2026 г. Принято 23 сентября 2026 г. Публикация 25 сентября 2026 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2026. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Integral Characteristics of Free Vibration Decay in a Sandwich Beam with a Viscoelastic Core

D. V. Leonenko  

Belarusian State University of Transport, Kirova str, 34, Gomel, 246653, Belarus

✉ Denis V. Leonenko; ORCID 0000-0001-8003-9279; e-mail: leoden@list.ru

Abstract. The decay of free vibrations of a symmetric three-layer beam with a lightweight viscoelastic core is studied under arbitrary initial conditions. The equations of motion are derived from the variational principle with account of the Rayleigh dissipative function incorporating shear and longitudinal mechanisms of internal friction. The solution is constructed by the Bubnov–Galerkin method using the eigenmodes of the corresponding elastic problem. Integral decay characteristics are introduced: relative residual energy, effective logarithmic decrement, and decay time to a prescribed level. A numerical analysis is carried out for a beam with D16T alloy face sheets and a polystyrene foam core. Two types of initial conditions are considered: an initial deflection in the first eigenmode and a concentrated impulse. It is shown that under an impulse the effective decrement at the initial instant significantly exceeds the decrement of the fundamental mode and approaches it after the higher modes decay. For the first eigenmode the decay proceeds uniformly throughout the entire process.

Keywords: sandwich beam, free vibrations, viscoelastic damping, Bubnov–Galerkin method, effective decrement, residual energy, decay time.

Funding. The study did not have sponsorship.

Cite as: Leonenko, D. V., Integral characteristics of free vibration decay in a sandwich beam with a viscoelastic core. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2026, vol. 23, no. 3, pp. 19–26. DOI: 10.31429/vestnik-23-3-19-26

Received 3 August 2026. Revised 21 September 2026. Accepted 23 September 2026. Published 25 September 2026.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2026. The article is open access, distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 \(CC BY\) license](#).

Введение

Трехслойные и композиционные стержневые конструкции широко применяются в строительстве, машиностроении, авиационной и транспортной технике благодаря сочетанию высокой удельной жесткости, малой массы и возможности эффективного демпфирования колебаний. В условиях действия динамических, ударных и вибрационных нагрузок исследование напряженно-деформированного состояния и колебательных процессов в таких конструкциях приобретает особую актуальность, поскольку позволяет повысить их надежность и долговечность.

Исследованию динамики трехслойных и композиционных конструкций посвящено значительное число работ. В работе [1] исследованы колебания трехслойного стержня на основании Пастернака. В [2] рассмотрен изгиб трехслойной балки при локальном нагружении в температурном поле. Нестационарные колебания круговой трехслойной пластины под действием линейно возрастающей внешней нагрузки изучены в [3], а в [4] исследованы резонансные колебания сэндвич-стержня с легким заполнителем. Динамические характеристики металлополимерного слоистого стержня определены в работе [5].

Отдельное направление исследований связано с анализом волновых процессов и нестационарной динамики многослойных систем. Нестационарные продольные колебания электромагнитоупругого стержня рассмотрены в работе [6]. Колебания слоисто-неоднородной среды под действием движущейся по ее поверхности осциллирующей нагрузки исследованы в [7]. В работе [8] изучено распространение гармонических продольных волн в дискретно-неоднородных вязкоупругих стержнях.

Существенное внимание уделяется исследованию демпфирующих свойств и динамических характеристик многослойных конструкций. В работе [9] предложены методы моделирования диссипативных характеристик слоистых композитов, а в [10] исследованы затухающие колебания неоднородных композитных стержней коробчатого сечения.

В зарубежных исследованиях выполнен структурно-динамический и виброакустический анализ волокнистых и сэндвич-конструкций [11], исследованы колебания трехслойных пластин с учетом диссипации энергии в материале [12], а также разработан самоцентрирующийся демпфер на основе трехслойных кольцевых пружин [13].

Несмотря на значительное количество работ, посвященных динамике и демпфированию многослойных конструкций, большинство из них ограничивается анализом отдельных мод колебаний. Вместе с тем при реальных эксплуатационных воздействиях, таких как ударные или импульсные нагрузки, возбуждается широкий спектр собственных форм и затухание конструкции в целом определяется суперпозицией вкладов многих мод. Это делает актуальным введение интегральных характеристик затухания, описывающих процесс потери энергии системой в целом, а не отдельными её формами.

Научная новизна работы заключается в адаптации энергетического подхода для оценки многомодового затухания сэндвич-конструкций. Интегральные характеристики (относительная остаточная энергия и эффективный декремент) известны в динамике сооружений, однако для трёхслойных стержней с совместным продольно-сдвиговым механизмом вязкоупругой диссипации они ранее не применялись. В отличие от мономодальных моделей, предложенный подход позволяет в явном виде учесть вклад высших форм колебаний на начальном этапе нестационарного процесса и описать эволюцию демпфирования во времени.

1. Постановка начально-краевой задачи

Рассматриваются свободные колебания симметричного трёхслойного стержня с лёгким вязкоупругим заполнителем. Несущие слои толщиной h моделируются как балки Бернулли,

заполнитель толщиной $2c$ — как балка Тимошенко. Поперечным обжатием слоёв пренебрегаем. Материал заполнителя подчиняется модели Кельвина–Фойгта, внутреннее трение учитывается диссипативной функцией Рэлея.

В качестве искомым функций принимаются прогиб стержня $w(x, t)$ и относительный угол сдвига в заполнителе $\psi(x, t)$. Перемещения непрерывны на границах слоёв.

Напряжения связаны с деформациями законом Гука в девиаторно-шаровом виде. Для несущих слоёв

$$\sigma_x^{(k)} = (K_b + \frac{4}{3}G_b) \varepsilon_x^{(k)} \quad (k = 1, 2).$$

Для заполнителя с учётом вязкости

$$\sigma_x^{(3)} = (K_f + \frac{4}{3}G_f) \varepsilon_x^{(3)} + (\eta_K + \frac{4}{3}\eta_G) \dot{\varepsilon}_x^{(3)}, \quad \sigma_{xz}^{(3)} = G_f \psi + \eta_G \dot{\psi},$$

где η_G, η_K — коэффициенты сдвиговой и объёмной вязкостей заполнителя, $K_{b(f)}, G_{b(f)}$ — модули объёмной деформации и сдвига материала несущих слоёв (индекс b) и заполнителя (индекс f), соответственно, точки над деформациями обозначают производные по времени.

Согласно модели лёгкого заполнителя, упругая часть $\sigma_{xz}^{(3)}$ в потенциальной энергии не учитывается; вязкая часть сохраняется в диссипативной функции.

Диссипативная функция Рэлея для заполнителя со сдвиговой η_G и объёмной η_K вязкостями записывается в виде:

$$\Phi = \frac{1}{2} b_0 \int_0^l \int_{h_3} \left(\eta_G \left(\dot{\gamma}_{xz}^{(3)} \right)^2 + \left(\eta_K + \frac{4}{3} \eta_G \right) \left(\dot{\varepsilon}_x^{(3)} \right)^2 \right) dz dx.$$

Из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского с учётом функции Φ следуют уравнения движения

$$\begin{aligned} b_1 \psi_{,xx} - b_2 w_{,xxx} - r_1 \dot{\psi} + r_2 (\dot{\psi}_{,xx} - \dot{w}_{,xxx}) &= 0, \\ b_2 \psi_{,xxx} - b_3 w_{,xxxx} + r_2 (\dot{\psi}_{,xxx} - \dot{w}_{,xxxx}) &= m_1 \ddot{w}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь b_1, b_2, b_3 — упругие постоянные стержня, $m_1 = 2\rho_b h + 2\rho_f c$ — погонная масса, ρ_k — плотность материала k -го слоя, запятая обозначает частную производную. Выражения для b_i через модули и геометрию приведены в [4], коэффициенты демпфирования

$$r_1 = 2\eta_G c, \quad r_2 = \frac{2}{3} \left(\eta_K + \frac{4}{3} \eta_G \right) c^3.$$

Торцы стержня жёстко зашпелены:

$$x = 0, l: \quad \psi = 0, \quad w = 0, \quad w_{,x} = 0. \quad (1.2)$$

Начальные условия задаются в общем виде:

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0(x), \quad (1.3)$$

где $w_0(x), \dot{w}_0(x)$ — произвольные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие граничным условиям (1.2).

2. Решение задачи

При $r_1 = r_2 = 0$ система (1.1) переходит в упругую задачу, решённую в [4]. Её собственные функции $W_n(x)$, $\Psi_n(x)$ и частоты ω_{0n} ($n = 0, 1, 2, \dots$) удовлетворяют уравнениям

$$\Psi_{n,xx} - W_{n,xxx} = 0, \quad \frac{b_2^2}{b_1} \Psi_{n,xxx} - b_3 W_{n,xxxx} = -m_1 \omega_{0n}^2 W_n$$

и граничным условиям (1.2). Функции $W_n(x)$ ортогональны и нормированы условием

$$\int_0^l W_n^2 dx = 1.$$

Явный вид W_n, Ψ_n и уравнение для собственных чисел λ_n приведены в [4].

Решение демпфированной задачи (1.1)–(1.3) ищем в виде разложения по собственным формам упругой задачи с разными временными функциями для прогиба и угла сдвига:

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x) T_{1n}(t), \quad \psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x) T_{2n}(t). \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.1), умножая первое уравнение на Ψ_k , второе — на W_k , интегрируя по длине, получаем систему относительно T_{1n} и T_{2n} . При $r_1 = r_2 = 0$ из первого уравнения следует упругая связь $T_{2n} = b_2/b_1 T_{1n}$. При малых r_1, r_2 поправка к этой связи даёт вклад порядка $O(r^2)$ в коэффициент затухания, поэтому в линейном приближении сохраняем $T_{2n} = b_2/b_1 T_{1n}$.

Пренебрегая недиагональными элементами, отношение которых к разности квадратов собственных частот не превышает 10^{-5} (что обеспечивается условием слабого демпфирования $\alpha_n \ll \omega_{0n}$ и достаточным разнесением спектра собственных частот заземлённого стержня), получаем независимые уравнения для каждой моды

$$\ddot{T}_{1n} + 2\alpha_n \dot{T}_{1n} + \omega_{0n}^2 T_{1n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \alpha_n = \frac{1}{2m_1} \left[r_1 \frac{b_2^2}{b_1^2} A_{nn} + r_2 \left(\frac{b_2}{b_1} - 1 \right)^2 \lambda_n^4 \right], \quad A_{nk} = \int_0^l W_{n,x} W_{k,x} dx. \quad (2.2)$$

Подставляя разложение $w(x, 0) = \sum T_{1n0} W_n(x)$ в начальные условия (1.3) и учитывая ортогональность W_n , получим

$$T_{1n0} = \int_0^l w_0(x) W_n(x) dx, \quad \dot{T}_{1n0} = \int_0^l \dot{w}_0(x) W_n(x) dx.$$

Решение уравнения (2.2):

$$T_{1n}(t) = e^{-\alpha_n t} \left(T_{1n0} \cos \tilde{\omega}_n t + \frac{\dot{T}_{1n0} + \alpha_n T_{1n0}}{\tilde{\omega}_n} \sin \tilde{\omega}_n t \right),$$

где $\tilde{\omega}_n = \sqrt{\omega_{0n}^2 - \alpha_n^2}$ — частота свободных колебаний с учетом демпфирования.

Таким образом, перемещения стержня в любой момент времени полностью определяются начальными условиями через коэффициенты $T_{1n0}, \dot{T}_{1n0}$.

При слабом демпфировании ($\alpha_n \ll \omega_{0n}$) энергия системы приближённо равна сумме энергий отдельных мод. Для поперечных колебаний

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l [m_1 \dot{w}^2 + b_3 w_{,xx}^2] dx. \quad (2.3)$$

Подставляя разложение (2.1) и используя ортогональность W_n , при слабом демпфировании получаем

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n0} e^{-2\alpha_n t}, \quad E_{n0} = \frac{1}{2} m_1 \omega_{0n}^2 T_{1n0}^2.$$

Относительная остаточная энергия

$$\mathcal{E}(t) = \frac{E(t)}{E(0)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_{n0} e^{-2\alpha_n t}}{\sum_{n=0}^{\infty} E_{n0}}. \quad (2.4)$$

Введём ещё одну интегральную энергетическую характеристику – эффективный декремент системы

$$\delta_{\text{eff}}(t) = -\frac{\pi}{\tilde{\omega}_0} \frac{d}{dt} \ln E(t) = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}_0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n E_{n0} e^{-2\alpha_n t}}{\sum_{n=0}^{\infty} E_{n0} e^{-2\alpha_n t}}. \quad (2.5)$$

При $t \rightarrow 0$ величина δ_{eff} определяется всеми модами, возбуждёнными начальными условиями. При $t \rightarrow \infty$ доминирует мода с наименьшим α_n (основная), и $\delta_{\text{eff}} \rightarrow 2\pi\alpha_0/\tilde{\omega}_0 \approx \delta_0$.

Время затухания до уровня ε от начальной энергии определяется из уравнения $\mathcal{E}(t_\varepsilon) = \varepsilon$. Практический интерес представляет время $t_{0,05}$ (остаток 5 %).

В отличие от модального декремента δ_n , относящегося к отдельной моде, и от эквивалентного коэффициента демпфирования, осредняемого по периоду, величина $\delta_{\text{eff}}(t)$ является мгновенной характеристикой многомодовой системы. Она определяется как средневзвешенное значение модальных декрементов с весами, пропорциональными текущим энергиям мод. Это даёт дополнительную информацию о продолжительности нестационарного этапа колебаний и позволяет зафиксировать момент перехода системы к мономодальному режиму затухания.

3. Численный анализ

Численный анализ выполнен для симметричного сэндвич-стержня длиной $l = 1$ м. Несущие слои — сплав Д16Т толщиной $h = 2$ мм ($K_b = 80$ ГПа, $G_b = 26,7$ ГПа, $\rho_b = 2700$ кг/м³), заполнитель толщиной $c = 10$ мм — пенополистирол ПСБ-С ($K_f = 6,67$ МПа, $G_f = 3,08$ МПа, $\rho_f = 25$ кг/м³, $\eta_G = 50$ Па·с, $\eta_K = 100$ Па·с). Значения коэффициентов вязкости являются оценочными и выбраны из условия слабого демпфирования, позволяющего использовать упругие собственные функции в качестве базисных. Приведённые численные результаты иллюстрируют работоспособность предложенного метода. Предполагается, что основные качественные закономерности эволюции эффективного декремента сохраняются в широком диапазоне параметров слабого демпфирования. Таким образом, полученные количественные результаты носят демонстрационный характер и характеризуют выбранную модельную систему. Торцы жёстко заземлены. В расчётах удерживалось 15 собственных форм, дальнейшее увеличение их числа изменяло результаты менее чем на 0,1 %.

Для верификации полученного решения в рамках настоящей работы выполнен дополнительный расчёт многомодовым методом Галёркина, в котором не используются ни предположение о слабом демпфировании, ни пренебрежение недиагональными членами. Сравнение проведено для толщин заполнителя $c = 10, 20, 30$ мм. Расхождение по эффективному декременту $\delta_{\text{eff}}(t)$ и времени затухания $t_{0,05}$ не превышает 0,5 %.

Рассмотрены два вида начальных условий:

а) отклонение по первой собственной форме:

$$w_0(x) = AW_0(x), \quad \dot{w}_0(x) = 0;$$

б) сосредоточенный импульс в середине пролёта:

$$w_0(x) = 0, \quad \dot{w}_0(x) = v_0 \delta(x - l/2),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, v_0 — начальная скорость.

Коэффициенты разложения для функции времени при импульсной нагрузке:

$$T_{n0} = 0, \quad \dot{T}_{n0} = v_0 W_n(l/2).$$

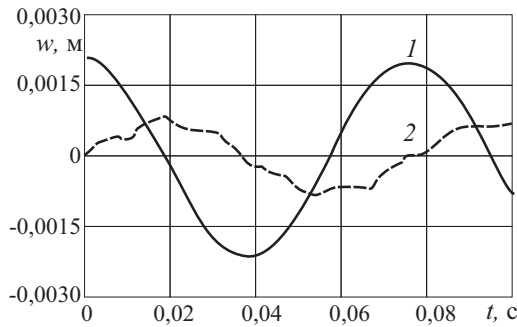


Рис. 1. Изменение прогиба во времени при различных начальных условиях

Fig. 1. Variation of deflection over time under various initial conditions

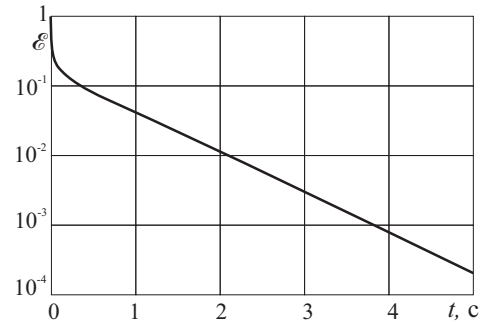


Рис. 2. Зависимость относительной остаточной энергии $\mathcal{E}(t)$ от времени для случая импульсного воздействия

Fig. 2. Dependence of the relative residual energy $\mathcal{E}(t)$ on time for the case of pulsed action

Решение уравнения имеет вид

$$T_n(t) = v_0 W_n(l/2) \frac{e^{-\alpha_n t}}{\tilde{\omega}_n} \sin \tilde{\omega}_n t.$$

На рис. 1 показана зависимость прогиба в центре стержня $w(l/2, t)$ на начальном интервале $0 \leq t \leq 0,1$ с для двух видов начальных условий с одинаковой начальной энергией (2.3): кривая 1 — начальное отклонение по первой собственной форме ($w_0 = AW_0$, $\dot{w}_0 = 0$, $A = 1,35 \times 10^{-3}$ м); кривая 2 — сосредоточенный импульс в середине пролёта ($w_0 = 0$, $\dot{w}_0 = v_0 \delta(x - l/2)$, $v_0 = 0,025$ м/с). Кривая 1 представляет собой гладкую затухающую синусоиду с периодом основной моды $T_0 \approx 0,076$ с. Кривая 2 имеет изрезанную форму, особенно заметную при $t < 0,05$ с, что вызвано суперпозицией высших мод, возбуждённых импульсом. Различие в форме колебаний наглядно демонстрирует вклад высших мод на начальной стадии процесса.

Зависимость относительной остаточной энергии $\mathcal{E}(t)$ (2.4) от времени для случая импульсного воздействия представлена на рис. 2. Вертикальная ось — логарифмическая. Наиболее интенсивное снижение энергии происходит в первые 0,1 с, за это время теряется около 60...70% начальной энергии. Далее кривая переходит в практически прямую линию, что соответствует экспоненциальному затуханию с постоянным декрементом, определяемым основной модой. Время достижения уровня $\mathcal{E} = 0,05$ составляет 0,83 с.

На рис. 3 приведён эффективный декремент $\delta_{\text{eff}}(t)$ (2.5) для случая импульсного воздействия. В начальный момент $\delta_{\text{eff}}(0) = 3,25$, что значительно превышает декремент основной моды $\delta_0 = 0,0455$. Высокое начальное значение обусловлено спецификой импульсного нагружения: возбуждается широкий спектр мод, причём высшие моды имеют заметные начальные энергии и большие коэффициенты затухания α_n . Поскольку эффективный декремент является средневзвешенным декрементом всех мод с весами, пропорциональными их текущим энергиям, на начальном этапе он определяется вкладом быстро затухающих высших мод. За время порядка 0,1 с эффективный декремент резко падает до уровня 0,05, а к $t \approx 0,5$ с выходит на асимптотическое значение $\delta_0 = 0,05$, соответствующее основной моде. Следует отметить, что каждая отдельная мода при этом остаётся в режиме слабого демпфирования ($\delta_n \ll 1$), большое значение $\delta_{\text{eff}}(0)$ является интегральной характеристикой многомодовой системы и не нарушает условий применимости метода.

Заключение

Исследовано затухание свободных колебаний симметричного трёхслойного стержня с лёгким вязкоупругим заполнителем при произвольных начальных условиях. На основе метода

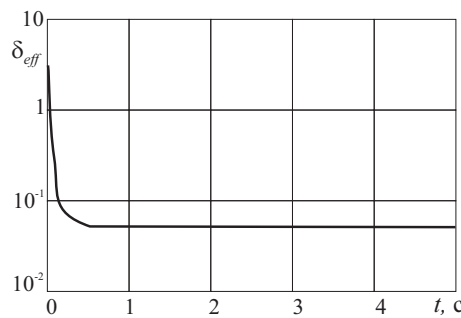


Рис. 3. Зависимость эффективного логарифмического декремента $\delta_{\text{eff}}(t)$ от времени для случая импульсного воздействия

Fig. 3. Time dependence of the effective logarithmic decrement $\delta_{\text{eff}}(t)$ for the case of pulsed excitation

Бубнова–Галёркина с использованием собственных форм упругой задачи получено решение в виде разложения по модам. Введены интегральные характеристики затухания: относительная остаточная энергия $E(t)$, эффективный логарифмический декремент $\delta_{\text{eff}}(t)$ и время затухания $t_{0,05}$ до 5 % от начального уровня.

В рамках принятой модели установлено, что при импульсном возбуждении, когда одновременно возбуждён широкий спектр собственных форм, затухание энергии носит неравномерный характер. Начальный эффективный декремент определяется быстро затухающими высшими модами и может значительно превышать декремент основной моды; по мере затухания высших мод $\delta_{\text{eff}}(t)$ выходит на асимптоту, определяемую основной модой. Этот вывод носит общий характер и не зависит от конкретных значений параметров конструкции.

Для рассмотренной модельной системы (стержень из Д16Т с заполнителем ПСБ-С, $\eta_G = 50$ Па·с, $\eta_K = 100$ Па·с) начальный эффективный декремент достигает значения 3,25, что более чем в 70 раз превышает декремент основной моды $\delta_0 = 0,0455$; выход на асимптоту происходит за время порядка 0,1 с, а время достижения 5 % остаточной энергии составляет 0,83 с. Эти численные значения относятся к выбранному набору параметров.

Для сравнения рассмотрен случай начального отклонения по первой собственной форме, при котором $\delta_{\text{eff}}(t) = \delta_0$ постоянно, а затухание происходит равномерно в течение всего процесса. Различие в характере затухания для двух типов начальных условий демонстрирует важность учёта высших мод при импульсных воздействиях. Предложенный подход позволяет оценивать время затухания конструкции без проведения трудоёмкого анализа каждой моды в отдельности.

Литература [References]

1. Леоненко, Д.В., Колебания трехслойного стержня на основании Пастернака. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2018, т. 15, № 3, с. 32–38. [Leonenko, D.V., Fluctuations of sandwich beam on a Pasternak's foundation. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2018, vol. 15, no. 3, pp. 32–38. (in Russian)] DOI: [10.31429/vestnik-15-3-32-38](https://doi.org/10.31429/vestnik-15-3-32-38) EDN: YABSXJ
2. Starovoitov, E.I., Leonenko, D.V., Bending of a sandwich beam by local loads in the temperature field. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, vol. 18, no. 1, pp. 69–83. DOI: [10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83)
3. Леоненко, Д.В., Маркова, М.В., Колебания круговой трехслойной пластины под действием линейной во времени внешней нагрузки. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*, 2023, № 1, с. 49–63. [Leonenko, D.V., Markova, M.V., Oscillations of a circular three-layer plate under external linear in time load. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2023, no. 1, pp. 49–63. (in Russian)] DOI: [10.33581/2520-6508-2023-1-49-63](https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-1-49-63)
4. Леоненко, Д.В., Резонансные колебания сэндвич-стержня с легким заполнителем. В: *Механика. Исследования и инновации: международный сборник научных трудов*. Гомель, 2025, вып. 18,

- с. 97–103. [Leonenko, D.V., Resonant vibrations of a sandwich rod with a lightweight core. In: *Mechanics. Research and Innovation: International Collection of Scientific Papers*, 2025, iss. 18. (in Russian)]
5. Прокудин, О.А., Рабинский, Л.Н., Чан, К.Т., Определение динамических характеристик металлополимерного слоистого стержня. *Труды МАИ*, 2021, № 119. [Prokudin, O.A., Rabinskiy, L.N., Thang, Q.T., Determination of the Dynamic Characteristics of a metal-polymer laminated rod. *Trudy MAI*, 2021, no. 119. (in Russian)] DOI: [10.34759/trd-2021-120-06](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-06)
6. Фам, Т.Д., Тарлаковский, Д.В., Нестационарные продольные колебания электромагнитоупругого стержня. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2020, т. 17, № 2, с. 57–65. [Pham, T.D., Tarlakovskii, D.V., Non-stationary Longitudinal Vibrations of an Electromagnetoelastic Rod. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2020, vol. 17, no. 2, pp. 57–65. (in Russian)] DOI: [10.31429/vestnik-17-2-57-65](https://doi.org/10.31429/vestnik-17-2-57-65) EDN: [QOCJLR](https://www.edn.ru/qocjlr)
7. Шмид, Г., Калинин, В.В., Белянкова, Т.И., Тосецки, А., Колебания слоисто неоднородной среды под действием движущейся по ее поверхности осциллирующей нагрузки. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2004, № 1, с. 60–67. [Schmid, G., Kalinchuk, V.V., Belyankova, T.I., Tosecki, A., Vibrations of a layered inhomogeneous medium under the action of oscillating load moving on its surface. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2004, no. 1, pp. 60–67. (in Russian)] EDN: [QQPUEZ](https://www.edn.ru/qqpuez)
8. Саиян, С.Г., Марасанова, А.А., Иванченко, К.Д., Модестов, К.А., Гармонические продольные волны в дискретно-неоднородных вязкоупругих стержнях. *Вестник МГСУ*, 2026, т. 21, № 2, с. 207–218. [Saiyan, S.G., Marasanova, A.A., Ivanchenko, K.D., Modestov, K.A., Harmonic longitudinal waves in discretely inhomogeneous viscoelastic rods. *Vestnik MGSU*, 2026, vol. 21, no. 2, pp. 207–218. (in Russian)] DOI: [10.22227/1997-0935.2026.2.207-218](https://doi.org/10.22227/1997-0935.2026.2.207-218)
9. Рябов, В.М., Ярцев, Б.А., Методы моделирования диссипативных характеристик слоистых композитов. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*, 2024, т. 11, № 3, с. 570–583. [Ryabov, V.M., Yartsev, B.A., Methods for modeling the dissipative characteristics of layered composites. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11, no. 3, pp. 570–583. (in Russian)] DOI: [10.21638/spbu01.2024.313](https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.313)
10. Рябов, В.М., Ярцев, Б.А., Паршина, Л.В., Затухающие колебания неоднородных композитных стержней коробчатого сечения. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*, 2025, т. 12, № 1, с. 407–418. [Ryabov, V.M., Yartsev, B.A., Parshina, L.V., Damped vibrations of inhomogeneous composite box rods. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2025, vol. 12, no. 1, pp. 407–418. (in Russian)]
11. Friedel, H., Kroll, L., Hufenbach, W., Hanselka, H., Structural-dynamic and vibro-acoustic analysis of fibre-reinforced and sandwich structures. *Proceedings of the 32nd International SAMPE Technical Conference*, 2000, pp. 443–454.
12. Dubenets, V.G., Vibrations of three-layer plates with an allowance for energy dissipation in the material. *Strength of Materials*, 1970, no. 2, pp. 82–85. DOI: [10.1007/BF01527197](https://doi.org/10.1007/BF01527197)
13. Kong, S., Zhao, G., Ma, Y., Dong, Y., Yang, Z., Feng, R., A novel three-layer ring springs-based self-centering damper: Development, experiment, and numerical simulation, *Engineering Structures*, 2026, vol. 353, art. 122231. DOI: [10.1016/j.engstruct.2026.122231](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2026.122231)