УДК 539.3 EDN: EBUEXY DOI: 10.31429/vestnik-23-3-14-18

Контактные задачи с переменным коэффициентом трения

О. М. Бабешко ✉

Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия

✉ Бабешко Ольга Мефодиевна; ORCID 0000-0003-1869-5413; SPIN 5692-5810; e-mail: babeshko49@mail.ru

Аннотация. Рассматривается в условиях плоской деформации проблема исследования контактного взаимодействия трущихся поверхностей полубесконечного штампа и деформируемого слоистого основания в предположении, что в области контакта имеет место переменный вдоль контакта штампа коэффициент кулоновского трения. Система может испытывать гармонические вибрации, а подошва твердого штампа иметь описываемые гладкой функцией неровности. В указанной постановке контактная задача сводится к решению системы двух интегральных уравнений Винера-Хопфа, неизвестными которого являются вертикальные и горизонтальные компоненты вектора контактных напряжений. Цель исследования — определить переменный коэффициент трения для возможной последующей оптимизации. В работе разработан точный математический метод решения задачи, который может совершенствоваться и применяться для термоупругих, электроупругих, магнитоупругих материалов и композитов.

Ключевые слова: контактная задача, трение, система интегральных уравнений Винера-Хопфа, переменный коэффициент трения.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и Кубанского научного фонда, региональный проект 24-11-20006.

Цитирование: Бабешко О. М. Контактные задачи с переменным коэффициентом трения // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2026. Т. 23, № 3. С. 14–18. EDN: EBUEXY. DOI: 10.31429/vestnik-23-3-14-18

Поступила 22 августа 2026 г. После доработки 23 сентября 2026 г. Принято 24 сентября 2026 г. Публикация 25 сентября 2026 г.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Автор(ы), 2026. Статья открытого доступа, распространяется по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY).

Contact Tasks with a Variable Coefficient of Friction

O. M. Babeshko ✉

Kuban State University, Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

✉ Olga M. Babeshko; ORCID 0000-0003-1869-5413; e-mail: babeshko49@mail.ru

Abstract. The problem of studying the contact interaction between the rubbing surfaces of a semi infinite punch and a deformable layered base is considered under conditions of plane strain, assuming that the coefficient of Coulomb friction varies along the punch base contact. The system may experience harmonic vibrations, and the bottom of the rigid punch may have irregularities described by a smooth function. In this formulation, the contact problem is reduced to solving a system of two Wiener Hopf integral equations, the unknowns of which are the vertical and horizontal components of the contact stress vector. The aim of the study is to determine the variable friction coefficient. for possible subsequent optimization. The paper develops an exact mathematical solution to the problem, which can be refined and applied to thermoelastic, electroelastic, magnetoelastic materials and composites.

Keywords: contact problem, friction, system of Wiener-Hopf integral equations, variable friction coefficient.

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation and the Kuban Science Foundation (regional project 24-11-20006).

Cite as: Babeshko, O. M., Contact tasks with a variable coefficient of friction. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2026, vol. 23, no. 3, pp. 14–18. DOI: 10.31429/vestnik-23-3-14-18

Received 22 August 2026. Revised 23 September 2026. Accepted 24 September 2026. Published 25 September 2026.

The author declare no competing interests.

© The Author(s), 2026. The article is open access, distributed under Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY) license.

Введение

Интегральные уравнения Винера–Хопфа играют определяющую роль в смешанных задачах самых разных областей. Примеры анализа этих областей приведены в публикации [1]. Рассматриваемая в настоящей статье область применения, трибология, в которой выполнены блестящие работы [2, 3], дополняет указанный список. В сейсмологии проблема трибологии возникает при рассмотрении медленного горизонтального движения литосферных плит, когда движение принимает скачкообразный характер. Считают, что это связано с наличием в процессе движения переменного коэффициента в зоне контакта. Строго математически отвечающую этому случаю задачу по вычислению переменного коэффициента трения для любой рельефности подошвы штампа ученым решить не удалось. Это связано с тем, что задача сводится к решению системы двух интегральных уравнений Винера–Хопфа. В работе разработан новый подход, направленный на построение бесконечных систем линейных алгебраических уравнений с последующим решением поставленной системы интегральных уравнений. В результате его применения удается построить точные решения системы двух интегральных уравнений, найти их решение и затем найти аналитическое представление переменного коэффициента трения.

1. Постановка задачи

Рассматривается система интегральных уравнений Винера–Хопфа, заданная на полубесконечном интервале вида

$$\begin{gathered}\int\limits_0^\infty k_{11}(x-\xi)\phi_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\int\limits_0^\infty k_{12}(x-\xi)t(\xi)\phi_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi=f_1(x),\quad 0\leqslant x<\infty,\\ \int\limits_0^\infty k_{21}(x-\xi)\phi_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\int\limits_0^\infty k_{22}(x-\xi)t(\xi)\phi_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi=f_2(x),\\ k_{mn}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma K_{mn}(\alpha)e^{-i\alpha x}\,\mathrm{d}\alpha,\quad K(\alpha)=\det\|K_{mn}(\alpha)\|\,.\end{gathered}\tag{1.1}$$

Здесь $\phi_1(x)$ — нормально действующее напряжение в области контакта, $t(x)$ — переменный коэффициент контактных напряжений, $f_1(x)$, $f_2(x)$ — нормально и горизонтально действующие на штамп перемещения.

Будем считать, что элементы $K_{mp}(\alpha)$ матрицы-функции $K(\alpha)$ являются в общем случае мероморфными функциями переменного α. В контактных задачах механики и математической физики мероморфные функции $K_{mp}(\alpha)$ и определитель $K(\alpha)$ имеют следующее представление и асимптотическое поведение

$$K_{mp}(\alpha)=D^{-1}(\alpha)L_{mp}(\alpha)\ ,\quad K(\alpha)=D^{-2}(\alpha)\Delta(\alpha),\quad \Delta(\alpha)=\det\|L_{mp}(\alpha)\|\,,\tag{1.2}$$

$$K_{mp}(\alpha)=T_{mp}\,|\alpha|^{-1}\,(1+o(\alpha)),\quad m=p,\quad K_{mp}(\alpha)=T_{mp}\alpha^{-1}(1+o(\alpha)),\quad m\neq p,$$
$$|\alpha|\gg 1,\quad p=1,2.$$

Здесь $D(\alpha)$, $\Delta(\alpha)$, $L_{mp}(\alpha)$ — целые функции, имеющие счетное множество нулей. Например, в контактной задаче для закрепленного упругого слоя они имеют в статическом случае вид [4]

$$K_{11}\,(u)=\frac{(1-\nu)\,(3-4\nu)\,(\operatorname{sh}4u+4u)}{u^2D(u)},\quad D(u)=u\left[(3-4\nu)\operatorname{sh}^2 2u+4u^2+4\,(1-\nu)^2\right],$$

$$K_{12}\,(u)=K_{12}\,(u)=-\frac{(1-2\nu)\,(3-4\nu)\operatorname{sh}^2 2u-4u^2}{uD(u)},\quad K_{22}\,(u)=\frac{(1-\nu)\,(3-4\nu)\,(\operatorname{sh}4u-4u)}{D(u)}.$$

2. Метод решения

Предполагается, что целые четные функции $D(\alpha)$, $\Delta(\alpha)$ имеют однократные нули на множествах значений $\pm\zeta_n$ и $\pm z_n$ соответственно, с точками сгущения на бесконечности в некоторых клиновидных областях верхней (плюс) и нижней (минус), частей комплексной плоскости, как правило, в окрестностях мнимой оси. Более детально свойства элементов матриц-функций описаны в [4, 5]. Очевидно, плотность распределения нулей определителя $\Delta(\alpha)$ в 2 раза большая, чем нулей ξ_n знаменателя $D(\alpha)$. С учетом этого построим две ветви W_n, $n = 1, 2$ из нулей определителя таким образом, чтобы полученная с их помощью целая функция имела бы тип τ, такой же, как и $D(\alpha)$.

Для этого в качестве первых нулей $z_m(p)$, $p = 1, 2$, указанных ветвей возьмем последовательно первые нули определителя $\Delta(\alpha)$ в порядке возрастания модулей, а каждый последующий ноль берется с лакуной второго, то есть с пропуском одного последующего нуля определителя. Таким образом, нули каждой ветви $z_m(p)$ выбираются из числа нулей z_k определителя по правилу $z_m(p) = z_{p+m2}$ и охватывают, без повторений, все нули определителя $\Delta(\alpha)$. Это же относится и к нулям со знаком минус. Таким образом, построенные бесконечные множества нулей, обозначенные W_n, $n = 1, 2$, являются непересекающимися, независимыми, взаимно ортогональными и в совокупности $\cup W_n$ полными во множестве нулей определителя $\Delta(\alpha)$.

Строятся из нулей целых функций вспомогательные целые функции $M_p(\alpha, z)$ методом теории функций комплексных переменных [5]

$$M_p(\alpha, z) = M_{p\mp}\left(\alpha, z^{\pm}(p)\right) M_{p\pm}\left(\alpha, z^{\mp}(p)\right), \quad M_1(\alpha, z)\, M_2(\alpha, z) = \Delta(\alpha),$$
$$M_{p\mp}\left(\alpha, z^{\pm}(p)\right) = T_{p\mp} e^{\mp i\alpha} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{z_s^{\pm}(p)}\right) e^{\frac{\alpha}{z_s^{\pm}(p)}}, \tag{2.1}$$
$$T_{p\mp} = \text{const}, \quad p = 1, 2.$$

После деления на $D(\alpha)$ они дадут мероморфные функции, обозначенные $\mathrm{M}_p(\alpha)$. Их нулями являются $\pm z_m(p)$. Здесь в случае этажности берутся знаки избранного этажа.

Доказывается, что решение исходной системы интегральных уравнений приводится к отдельным интегральным уравнениям относительно вспомогательных функций $\chi_p(\xi)$ вида

$$\int_0^{\infty} m_p(x - \xi)\chi_p(\xi)\, \mathrm{d}\xi = h_p(x), \quad x \geqslant 0, \quad p = 1, 2,$$

$$h_p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(\mathbf{R}_{pv}\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{A}^{-1}F_p + \mathbf{A}^{-1}F_1)e^{-i\eta x}\, \mathrm{d}\eta,$$

$$m_p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_p(u)e^{-iux}\, \mathrm{d}u.$$

Решения этих интегральных уравнений Винера–Хопфа строятся методом бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, разработанным в [5].

3. Решение системы уравнений

Решив методом работы [5] бесконечные системы линейных алгебраических уравнений с учетом (2.1), получим представление

$$\chi_{p\eta}(x) = B_p(\eta)e^{-i\eta x} + \sum_{m=1}^{\infty} y_{sm}e^{iz_{mp}x},$$

в котором коэффициенты $B_p(\eta)$ не найдены.

Их определение достигается требованием совпадения левых и правых частей системы интегральных уравнений Винера–Хопфа. Используем построенные решения и внесем их в систему интегральных уравнений, получим соотношения

$$\sum_{s=1}^{N} K_{ps}(\eta)B_s e^{-i\eta x} = A_p(\eta)e^{-i\eta x}, \quad \sum_{s=1}^{N} K_{ps}(\eta)B_s = A_p(\eta), \quad \mathbf{B} = \{B_s\},$$

$$\mathbf{K}(\eta) = \|K_{ps}(\eta)\|, \quad \mathbf{A}(\eta) = \{A_p(\eta)\}, \quad \mathbf{K}^{-1}(\eta) = \|g_{ps}\|.$$

Отсюда определяем искомый вектор

$$\mathbf{B}(\eta) = \mathbf{K}^{-1}(\eta)\mathbf{A}(\eta).$$

Внесем найденные значения в правые части выражения для $\chi_{p\eta}(x)$, y_{sm}. Тогда получаем точное совпадение левых и правых частей системы уравнений Винера–Хопфа. Искомый вектор $\mathrm{X}_\eta = \{\chi_{1\eta}, \chi_{2\eta}\}$ принимает вид

$$\mathrm{X}_\eta(x) = \mathbf{K}^{-1}(\eta)\mathbf{A}(\eta)e^{-i\eta x} + \mathbf{K}^{-1}(\eta)\mathbf{Y}(x), \quad \mathbf{Y}(x) = \left\{\sum_{m=1}^{\infty} y_{pm}e^{iz_{mp}x}\right\}.$$

В координатной форме соотношения можно представить в форме

$$\chi_{p\eta}(x) = B_p(\eta)e^{-i\eta x} + \sum_{s=1}^{2}\sum_{m=1}^{\infty} g_{ps}y_{sm}e^{iz_{ms}x}, \quad B_p(\eta) = \sum_{s=1}^{N} g_{ps}A_p(\eta), \quad p = 1, 2.$$

Для получения решения системы интегральных уравнений Винера–Хопфа (1.1) необходимо обе системы записать в векторной форме вида

$$\int_0^\infty \mathbf{k}(x-\xi)\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \mathbf{f}, \quad \mathbf{k} = \|k_{np}\|, \quad \phi = \{\phi_1, \phi_2\}, \quad \phi_2 = t\phi_1, \quad \mathbf{f} = \{f_1, f_2\},$$

$$\int_0^\infty \mathbf{m}(x-\xi)\mathbf{x}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \mathbf{f}, \quad \mathbf{m} = \begin{Vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{x} = \{\chi_1, \chi_2\}.$$

Затем, приравняв правые части систем уравнений и, применив к ним преобразование Фурье, получить соотношения, из которых находится решение системы интегральных уравнений (1.1)

$$\mathbf{K\Phi} = \mathbf{MX}, \quad \mathbf{\Phi} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{MX}.$$

Здесь $\mathbf{K}$, $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{X}$ являются преобразованиями Фурье соответствующих функций, обозначенных строчными буквами. Взяв обращение Фурье от вектора $\mathbf{\Phi}$, найдем функции ϕ_1, ϕ_2.

Искомый переменный коэффициент трения $t(x)$ находится по формуле

$$t(x) = \phi_1^{-1}(x)\phi_2(x).$$

В том случае, если матрица-функция $\mathbf{K}(\alpha)$ непрерывно переходит в функционально-коммутативную, построенное решение переходит в решение, получаемое обращением системы с функционально коммутативными матрицами-функциями, то есть методом Винера–Хопфа.

Заключение

Полученный результат дает возможность не только строить упрощенные представления сложных решений рассматриваемых задач, но и получать решения задач, не поддающихся исследованию никакими другими методами.

Литература [References]

1. Payandeh-Najafabadi, A.T., Kucerovsky, D., Exact solutions for a class of matrix Riemann-Hilbert problems. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2014, vol. 79, iss. 1, pp. 109–123. DOI: 10.1093/imamat/hxs044
2. Kolesnikov, V.I., Suvorova, T.V., Belyak, O.A., Modeling antifriction properties of composite based on dynamic contact problem for a heterogeneous foundation. *Materials Physics and Mechanics*, 2020, vol. 46, pp. 139–148. DOI: 10.18149/MPM.4612020_14
3. Колесников, В.И., Беляк, О.А., *Математические модели и экспериментальные исследования – основа конструирования гетерогенных антифрикционных материалов*. Москва, Физматлит, 2021. [Kolesnikov, V.I., Belyak, O.A., *Matematicheskie modeli i eksperimental'nye issledovaniya – osnova konstruirovaniya geterogennykh antifriktsionnykh materialov = Mathematical Models and Experimental Studies: The Basis for Designing Heterogeneous Antifriction Materials*. Moscow, Fizmatlit, 2021. (in Russian)]
4. Ворович, И.И., Бабешко, В.А., *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. Москва, Наука, 1979. [Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey = Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory for Non-Classical Domains*. Moscow, Nauka, 1979. (in Russian)]
5. Ворович, И.И., Александров, В.М., Бабешко, В.А., *Динамические смешанные задачи теории упругости*. Москва, Наука, 1974. [Vorovich, I.I., Aleksandrov, V.M., Babeshko, V.A., *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti = Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory*. Moscow, Nauka, 1974. (in Russian)]