

МЕХАНИКА

УДК 539.3

К ПРОБЛЕМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В НЕФТЕГАЗОТРУБОПРОВОДАХ¹*В. В. Калинин², Т. И. Белянкова³, В. А. Лыжов⁴*

TO THE PROBLEM OF MODELING DYNAMIC PROCESSES IN OIL-AND-GAS PIPELINES

Kalinchuk V. V., Belyankova T. I., Lyzhov V. A.

Vibrations of pre-stressed pipeline are investigated in the context of the linearized theory of elastic waves propagation. This pipeline is modeled as an infinite hollow cylinder (pipe) filled with incompressible liquid under heavy hydrostatic pressure. Walls of the pipeline are assumed to be non-uniform, made of the material with radially changing properties; the initial stress state is induced due to pressure inside the liquid. The research carried out covers dispersive properties of the non-uniform cylindrical body filled with liquid under various kinds of heterogeneity.

Развивается один из возможных подходов к моделированию динамических процессов в трубопроводах, выполненных из неоднородных по толщине материалов и заполненных жидкостью, находящейся под большим давлением. Проведенные ранее исследования для полуграниченных тел с прямолинейными границами [1–4] и плавно изменяющимися свойствами типа слоя или слоистого полупространства выявили значительную зависимость динамических процессов в среде от характера изменения ее свойств. Выбором закона изменения свойств можно влиять как на структуру поверхностного волнового поля, так и на динамическую жесткость среды. В настоящей работе развитые ранее методы изучения динамических свойств полуграниченных тел обобщаются на трубопровод — полый, заполненный несжимаемой жидкостью бесконечный круговой цилиндр.

Введение

Проблема неразрушающего контроля прочности магистральных газонефтепроводов может решаться многими средствами. В частности, широкое распространение получили ультразвуковые и акустоэмиссионные методы, основанные на использовании высоких частот. Последнее обстоятельство обуславливает сильное затухание полезного сигнала и, тем самым, определяет сравнительно небольшую по размерам площадь контроля. Перспективными в плане создания систем мониторинга напряженного состояния и ресурсной прочности нефтегазотрубопроводов являются низкочастотные, в частности, резонансные методы неразрушающего контроля, основанные на использовании сравнительно длинных, обладающих малым

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (03-01-00694, 04-01-04001ННИО, 05-08-65499), РФФИ р2003юг (03-01-96662), ФЦНТП (РИ-112/001/301).

²Калинчук Валерий Владимирович, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН.

³Белянкова Татьяна Ивановна, канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича Ростовского государственного университета.

⁴Лыжов Вячеслав Александрович, лаборант-исследователь НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича Ростовского государственного университета.

затуханием волн, что позволяет в значительной мере увеличить контролируемую датчиком площадь и получать интегральную оценку состояния трубопровода. Однако создание низкочастотного метода обуславливает необходимость проведения широкого круга исследований, включающих как разработку математической модели нефтегазотрубопровода, так и разработку методов исследования волновых полей и расчета динамической жесткости полых цилиндрических тел, выполненных из неоднородных материалов и заполненных находящейся под большим избыточным давлением жидкостью.

1. Краевая задача о колебаниях заполненного жидкостью трубопровода

В рассмотрение вводится цилиндрическая система координат r (радиальная координата), φ (азимутальный угол) и z (осевая координата). Внутренний и внешний радиусы цилиндра равны соответственно R_1 и R_0 . Материал стенки цилиндра представляет собой сжимаемую первоначально изотропную среду, механические параметры которой (упругие константы, плотность) представляют собой в общем случае произвольные достаточно гладкие функции радиуса r .

Рассматривается задача о колебаниях заполненного жидкостью трубопровода под действием нагрузки $\mathbf{q}(R_0, \varphi, z)e^{-i\omega t}$, распределенной в области Ω на его поверхности. Краевая задача описывается системой уравнений [5–8]

$$\nabla \Theta = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

$$\Delta \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

и граничными условиями

$$r = R_0 : \mathbf{n}_r \Theta = \begin{cases} \mathbf{q}(R_0, \varphi, z)e^{-i\omega t}, & -a \leq z \leq a, \\ 0, & |z| > a, \end{cases}$$

$$r = R_1 : \theta_{rr} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \theta_{rz} = 0,$$

$$\theta_{r\varphi} = 0, \quad -\infty \leq z \leq \infty,$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial r}.$$

Здесь Θ — тензор, определяющий напряженное состояние среды, $\theta_{rr}, \theta_{rz}, \theta_{r\varphi}$ — его компоненты, $\mathbf{u} = \{u_r, u_\varphi, u_z\}$ — вектор перемещения

в упругой среде, ρ — плотность материала, $\mathbf{n}$ — нормаль к боковой поверхности цилиндра, ϕ — потенциал, определяющий движение жидкости, w — перемещение точек жидкости, c — скорость звука в жидкости, ω — частота колебаний.

В цилиндрических координатах система уравнений (1.1), (1.2) принимает вид

$$\frac{\partial \theta_{rr}}{\partial r} + \frac{\theta_{rr} - \theta_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \theta_{rz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \theta_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\theta_{r\varphi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \theta_{z\varphi}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \theta_{zr}}{\partial r} + \frac{\theta_{zr}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \theta_{zz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (1.4)$$

2. Линеаризованные уравнения колебаний преднапряженного, заполненного жидкостью трубопровода

При исследовании динамики преднапряженных тел принято различать три напряженных состояния [4, 6–8]: естественное ненапряженное (ЕС), начальное деформированное (НДС) и возмущенное (актуальное) состояние в данный момент времени (АС). Величины, характеризующие начальное состояние, будем отмечать индексом 0, величины в возмущенном состоянии — штрихом, возмущения индексами не отмечаются. Тогда все величины в возмущенном состоянии представляются в виде

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}.$$

Линеаризация уравнений состояния, движения и граничных условий относительно НДС проводится в предположении, что деформации в НДС являются конечными, значительно превосходящими их динамические возмущения в АС [4, 7, 8]. При этом для тензора Θ в уравнении (1.1) справедливо представление [8]

$$\Theta = \mathbf{P} + \mathbf{U}, \quad (2.1)$$

$\mathbf{P}$ — симметричный, определяемый законом состояния материала и не зависящий от начальных напряжений тензор, который в случае малых начальных деформаций представляется в виде

$$\mathbf{P} = \lambda(r) \text{tr} \varepsilon(\mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu(r) \varepsilon(\mathbf{u}), \quad (2.2)$$

$\lambda(r)$, $\mu(r)$ — параметры Ламе, $\mathbf{I}$ — единичный тензор;

$\mathbf{U}$ — антисимметричный тензор, связанный только с начальным напряженным состоянием [8]

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} [\mathbf{T}\varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon(\mathbf{u})\mathbf{T}] - \mathbf{T}\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{u}), \quad (2.3)$$

$\varepsilon(\mathbf{u})$ и $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{u})$ симметричный и кососимметричный тензоры деформации, $\mathbf{T} = \mathbf{T}(r)$ — тензор начальных напряжений

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \sigma_r^0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi^0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^0 \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

Выражение (2.1) с учетом формул (2.2)–(2.4) в случае осевой симметрии принимает вид

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{vmatrix} \theta_{rr} & \theta_{r\varphi} & \theta_{rz} \\ \theta_{\varphi r} & \theta_{\varphi\varphi} & \theta_{\varphi z} \\ \theta_{zr} & \theta_{z\varphi} & \theta_{zz} \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \\ \theta_{zz} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \\ \theta_{\varphi\varphi} &= (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \\ \theta_{rz} &= \left(\mu - \frac{1}{4}\sigma_r^0 \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} + \left(\mu + \frac{3}{4}\sigma_r^0 \right) \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\ \theta_{zr} &= \left(\mu - \frac{1}{4}\sigma_r^0 \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} + \left(\mu - \frac{1}{4}\sigma_r^0 \right) \frac{\partial u_z}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

После внесения выражений (2.5) и (2.6) в уравнение (1.3) и применения преобразования Фурье по координате z (α — параметр преобразования, U_r , U_z — трансформанты Фурье функций u_r , u_z), уравнения колебаний неоднородного преднапряженного цилиндра принимают вид

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2\mu) \frac{d^2 U_r}{dr^2} + \left(\lambda' + 2\mu' + \frac{\lambda + 2\mu}{r} \right) \frac{\partial U_r}{\partial r} + \\ &+ \left(\lambda' - \frac{\lambda + 2\mu}{r} \right) \frac{U_r}{r} - \left(\alpha^2 \left(\mu - \frac{1}{4}\sigma_r^0 \right) - \rho\omega^2 \right) U_r - \\ &- i\alpha\lambda' U_z - i\alpha \left(\lambda + \mu + \frac{3}{4}\sigma_r^0 \right) \frac{\partial U_z}{\partial r} = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} &- i\alpha \left(\lambda + \mu - \frac{1}{4}\sigma_r^0 \right) \frac{\partial U_r}{\partial r} - \\ &- i\alpha \left(\left(\mu - \frac{1}{4}\sigma_r^0 \right)' + \frac{1}{r} \left(\lambda + \mu - \frac{1}{4}\sigma_r^0 \right) \right) U_r + \\ &+ \left(\mu - \frac{1}{4}\sigma_r^0 \right) \frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \\ &+ \left(\left(\mu - \frac{1}{4}\sigma_r^0 \right)' + \frac{1}{r} \left(\mu - \frac{1}{4}\sigma_r^0 \right) \right) \frac{\partial U_z}{\partial r} - \\ &- ((\lambda + 2\mu)\alpha^2 - \rho\omega^2) U_z = 0. \end{aligned}$$

Краевая задача о колебаниях неоднородного, заполненного жидкостью полого цилиндра, дополняется преобразованными по Фурье уравнением движения жидкости (1.4) (Ф — трансформанта Фурье функции ϕ)

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \gamma^2 \right) \Phi = 0, \\ &\gamma^2 = \alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

и граничными условиями $r = R_0$:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{dU_r}{dr} + \lambda \left(\frac{U_r}{R_0} - i\alpha U_z \right) = Q(\alpha, R_0), \quad (2.9)$$

$$-i\alpha \left(\mu - \frac{1}{4}\sigma_r^0 \right) U_r + \left(\mu - \frac{1}{4}\sigma_r^0 \right) \frac{\partial U_z}{\partial r} = T(\alpha, R_0),$$

$r = R_1$:

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2\mu) \frac{dU_r}{dr} + \lambda \left(\frac{U_r}{R_1} - i\alpha U_z \right) = i\rho\omega\Phi, \\ &-i\alpha \left(\mu - \frac{1}{4}\sigma_r^0 \right) U_r + \left(\mu - \frac{1}{4}\sigma_r^0 \right) \frac{\partial U_z}{\partial r} = 0, \quad (2.10) \\ &-i\omega U_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}. \end{aligned}$$

Система уравнений (2.7) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, решение которой в аналитической форме возможно лишь в исключительных случаях. Например, когда все механические параметры среды (модули упругости и плотность) изменяются по одному и тому же экспоненциальному закону.

Решение уравнения (2.8) с учетом того, что точка $r = 0$ является внутренней точкой жидкости, имеет вид

$$\Phi = c_5 I_0(\gamma r),$$

где $I_0(\gamma r)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

3. Решение задачи о колебаниях трубопровода, выполненного из неоднородного материала

Положим, что упругие константы материала стенок цилиндра представляют собой произвольные функции радиуса r . Для построения решения уравнения (2.7) преобразуем его за счет введения новой неизвестной.

$$\mathbf{Y} = \{U'_r, i\alpha U'_z, U_r, i\alpha U_z\} = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}.$$

В новых обозначениях система уравнений (2.7) представляется в виде

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{M}(\alpha, r)\mathbf{Y} \quad (3.1)$$

с матрицей

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4. \quad (3.2)$$

Элементы матрицы (3.2) определяются формулами

$$\begin{aligned} m_{11} &= -\frac{\lambda' - 2\mu'}{l} - \frac{1}{r}, & m_{12} &= \frac{\lambda + b}{l}, \\ m_{13} &= \frac{\alpha^2 a - \rho\omega^2}{l} - \frac{\lambda'}{lr} - \frac{1}{r^2}, & m_{14} &= \frac{\lambda'}{l}, \\ m_{21} &= -\frac{\alpha^2(\lambda + a)}{a}, & m_{22} &= -\frac{a'}{a} + \frac{1}{r}, \\ m_{23} &= -\alpha^2 \left(\frac{a'}{a} + \frac{\lambda/a + 1}{r} \right), \\ m_{24} &= \frac{(\lambda + 2\mu)\alpha^2 - \rho\omega^2}{a}, \\ m_{31} &= m_{42} = 1, & m_{3n} &= 0, \quad n = 2, 3, 4, \\ m_{4n} &= 0, & n &= 1, 3, 4, \\ a &= \mu - \frac{1}{4}\sigma_{11}^0, & b &= \mu + \frac{3}{4}\sigma_{11}^0, \quad l = \lambda + 2\mu. \end{aligned}$$

Представим решение системы (3.1) в виде

$$Y_j = \sum_{i=1}^4 c_i(\alpha) y_{ij}(\alpha, r), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (3.3)$$

где $y_{ij}(\alpha, r)$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ — набор линейно независимых решений задачи Коши для уравнения (3.1) с начальными условиями $y_{ij}(\alpha, R_0) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Неизвестные $c_i(\alpha)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), участвующие в представлении (3.3), находятся при удовлетворении граничных условий (2.9) и (2.10),

которые с учетом принятых выше обозначений принимают вид

$$\mathbf{LC} = \mathbf{Q}^*,$$

Здесь $\mathbf{C} = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ — расширенный вектор коэффициентов, $\mathbf{Q}^* = \{Q, i\alpha T, 0, 0, 0\}$ — расширенный вектор нагрузок,

$$\mathbf{L} = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} & 0 \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} & l_{42} & 0 \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} & l_{43} & l_{53} \\ l_{14} & l_{24} & l_{34} & l_{44} & 0 \\ 0 & 0 & l_{35} & 0 & l_{55} \end{vmatrix}. \quad (3.4)$$

Участвующие в представлении матрицы (3.4) элементы l_{ij} определяются формулами ($m = 1, 2, 3, 4$)

$$\begin{aligned} l_{m1} &= (\lambda + 2\mu)y_{m1}(\alpha, R_0) + \\ &+ \lambda/R_0 y_{m3}(\alpha, R_0) - \lambda y_{m4}(\alpha, R_0), \end{aligned}$$

$$l_{m2} = b y_{m2}(\alpha, R_0) + \alpha^2 a y_{m3}(\alpha, R_0),$$

$$\begin{aligned} l_{m3} &= (\lambda + 2\mu)y_{m1}(\alpha, R_1) + \\ &+ \lambda/R_1 y_{m3}(\alpha, R_1) - \lambda y_{m4}(\alpha, R_1), \end{aligned}$$

$$l_{m4} = b y_{m2}(\alpha, R_1) + \alpha^2 a y_{m3}(\alpha, R_1),$$

$$l_{35} = -\omega, \quad l_{53} = \rho\omega I_0(\gamma R_0), \quad l_{55} = \gamma I_1(\gamma R_0).$$

Решение краевой задачи (2.7)–(2.10) представляется в виде [7–11]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \mathbf{k}(z - \xi, r, \omega) \mathbf{q}(\xi) d\xi, \\ \mathbf{k}(s, r, \omega) &= \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, r, \omega) e^{i\alpha s} d\alpha, \end{aligned} \quad (3.5)$$

с матрицей-функцией $\mathbf{K}(\alpha, r, \omega)$, элементы которой определяются соотношениями

$$K_{mn} = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{p=1}^4 \Delta_{pn} y_{m+2,p}, \quad m, n = 1, 2,$$

$\Delta_0 = \det \mathbf{L}$, Δ_{pn} — алгебраическое дополнение элемента l_{pn} матрицы $\mathbf{L}$.

Интегральное представление (3.5) описывает перемещение произвольной точки трубопровода, выполненного из неоднородного по

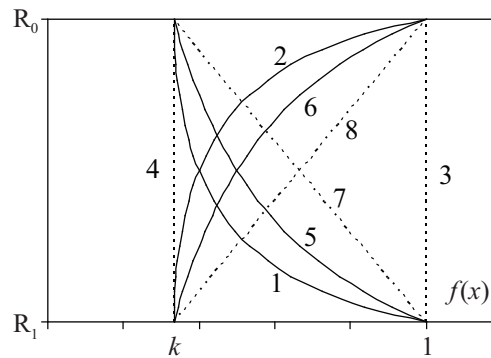


Рис. 1. Кривые, определяющие изменение свойств материала по радиусу

толщине материала, под действием распределенной на поверхности центрально симметричной нагрузки. В случае задачи о колебании бандажа на поверхности трубы, в формулах (3.5) необходимо положить $r = R_0$. В этом случае выражение (3.5) будет представлять собой интегральное уравнение относительно неизвестной функции распределения контактных напряжений в зоне контакта.

4. Динамика трубопровода в отсутствие жидкости

Рассмотрим радиальные колебания жесткого бандажа на поверхности пустого трубопровода, выполненного из неоднородного по толщине материала, трение в области контакта предполагается отсутствующим. Задача сводится к скалярному аналогу уравнения (3.5), в котором необходимо положить $r = R_0$. Полученное при этом выражение представляет собой интегральное уравнение с символом ядра $K_{11}(\alpha, R_0, \kappa_2)$, в котором учтено, что жидкость внутри трубопровода отсутствует. Эффективные методы решения подобных интегральных уравнений включают детальное исследование свойств символа интегрального оператора [1,2], особенностью которого является наличие конечного, зависящего от частоты множества нулей и полюсов. В качестве иллюстрации рассмотрим полый цилиндр, выполненный из материала, упругие модули которого изменяются по закону

$$\mu(r) = \mu_0 f(r), \quad \lambda(r) = \lambda_0 f(r),$$

где функция $f(r)$ представлена кривыми на рис. 1.

Здесь k — коэффициент, определяющий диапазон изменения свойств материала стенки цилиндра, λ_0, μ_0 — заданные упругие модули. Рассматривается «нормальный» тип неоднородности (кривые 1, 5 и 7 — жесткость материала увеличивается по мере удаления от внешней поверхности), и «аномальный» тип неоднородности (кривые 2, 6 и 8 — жесткость уменьшается). Кривые 7 и 8 представляют линейную, 5 и 6 — квадратичную, 1 и 2 — кубическую зависимости. Цифрами 3 и 4 отмечены прямые, соответствующие однородной среде с предельными значениями модулей ($f(r) = 1$ — кривая 3, $f(r) = k$ — кривая 4).

Исследования [4,6] показали, что динамические свойства неоднородной среды зависят от характера изменения ее механических параметров, который можно классифицировать:

- по типу неоднородности: «нормальная» (жесткость увеличивается по глубине) или «аномальная» (жесткость уменьшается по глубине);
- по градиентности неоднородности и области ее локализации;
- по интегральному коэффициенту неоднородности

$$f_0 = \frac{1}{h} \int_{R_1}^{R_0} f(r) dr.$$

Из графиков на рис. 1. видно, что интегральные коэффициенты для зависимостей типа 1 и 2, 5 и 6, 7 и 8 попарно равны, так как это один и тот же неоднородный материал, который в одном случае (кривые 1, 5 и 7) расположен жесткой стороной вовнутрь, во втором (кривые 2, 6 и 8) — жесткой стороной наружу.

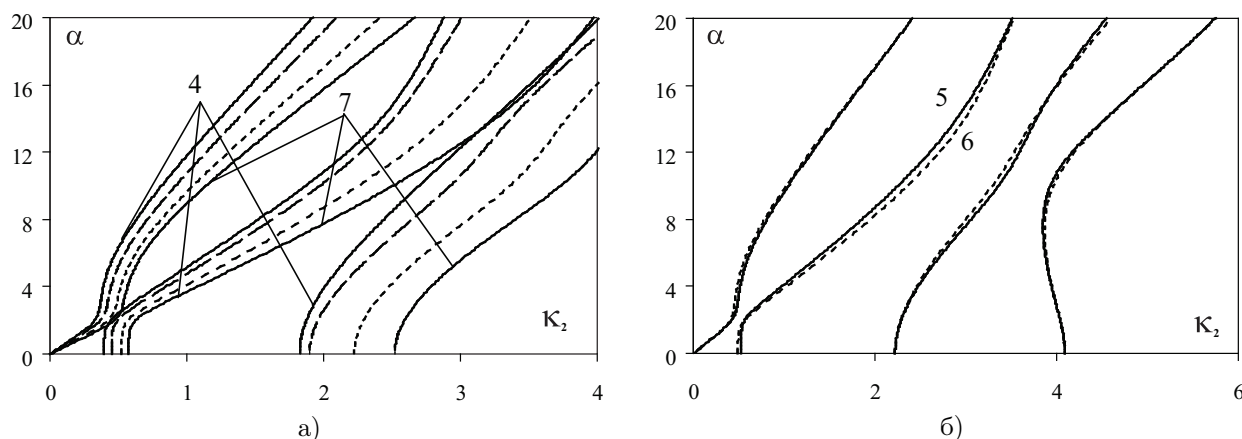


Рис. 2. Фрагменты дисперсионных диаграмм. *а)* — первые три моды для однородного (сплошные линии 4) и неоднородного (штрих, пунктир и сплошные линии 7) материалов; *б)* — сравнение первых мод для нормального (сплошные) и аномального (пунктир) типов среды

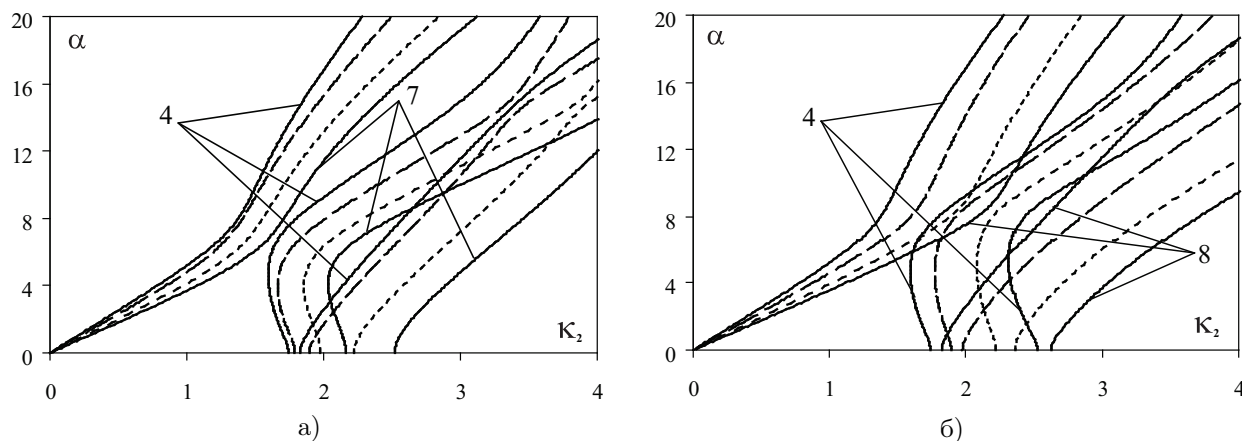


Рис. 3. Сравнение нулей для однородной (сплошные линии 4) и неоднородной (штриховые, пунктирные и сплошные линии 7 и 8) среды. *а)* — нормальная среда, *б)* — аномальная среда

На рис. 2а и 2б представлены фрагменты дисперсионных диаграмм для полого цилиндра, выполненного из однородного (сплошные линии 4) и различных видов неоднородного материала в отсутствие жидкости. На рис. 2а — приведены первые три моды для материалов 1, 5 и 7 (нормальный тип, соответственно штриховые, пунктирные и сплошные линии), которые сравниваются с модами для однородной среды. Здесь и ниже нумерация кривых соответствует нумерации на рис. 1. На рис. 2б приведены первые моды для материалов 5 и 6 (интегральный коэффициент один и тот же). Как следует из графиков, интегральный коэффициент для рассматриваемого класса задач является определяющим, различие между кривыми, соответствующими «нормальной» и «аномальной» неоднородностям, незначительно.

Необходимо учесть, что в отсутствие жидкости граничные условия на внутренней и внешней (вне зоны контакта) поверхности полого цилиндра совпадают. Именно это обстоятельство приводит к тому, что дисперсионные свойства полого цилиндра слабо зависят от ориентации неоднородного материала. Тем самым, поверхностное волновое поле будет изменяться лишь тогда, когда изменится интегральный коэффициент. В других случаях, например, в случае слоя с заземленным основанием, тип изменения свойств среды (аномальный или нормальный) играет такую же роль, как и интегральный коэффициент.

На рис. 3а и 3б приведены кривые, иллюстрирующие распределение нулей символа ядра интегрального оператора, рассчитанные для всех, рассматриваемых в работе типов сред. Цифрой 4 на обоих рисунках обозначе-

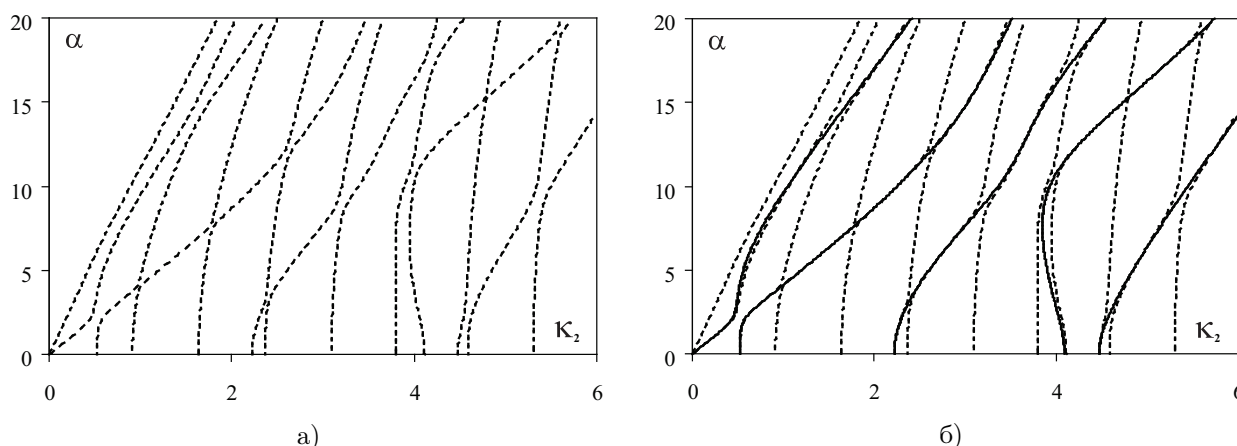


Рис. 4. Влияние наличия жидкости на дисперсионные свойства трубопровода

ны кривые для однородной среды (сплошные линии). На рис. 3а — для неоднородных материалов 1, 5 и 7 (соответственно штриховые, пунктирные и сплошные линии), на рис. 3б — для материалов 2, 6 и 8 (также штриховые, пунктирные и сплошные линии). Как следует из графиков, любое изменение свойств среды существенным образом сказывается на распределении нулей. Если учесть, что нули ответственны за структуру волнового поля напряжений в зоне контакта, то можно предположить, что изменение интегрального коэффициента неоднородности, равно как и изменение типа неоднородности (нормальный или аномальный) среды, будет влиять на динамическую жесткость полого цилиндра. Тем самым, динамическая жесткость является более информативной характеристикой изменения свойств, по сравнению с поверхностным волновым полем.

5. Динамика заполненного жидкостью трубопровода

Рассмотрим радиальные колебания жесткого банджа на поверхности заполненного нефтью трубопровода, выполненного из неоднородного по толщине материала. Трение в области контакта предполагается отсутствующим. Задача сводится к скалярному аналогу уравнения (3.5), в котором необходимо положить $r = R_0$. Полученное при этом уравнение представляет собой интегральное уравнение с символом ядра $K_{11}(\alpha, R_0, \kappa_2)$, в котором в полной мере учтено наличие в трубопроводе жидкости. Как и ранее, исследуем свой-

ства символа интегрального оператора [1,2]. В качестве иллюстрации рассмотрим цилиндр, выполненный из материала, упругие модули которого определяются представленными на рис. 1. кривыми.

На рис. 4а представлена дисперсионная диаграмма заполненного жидкостью трубопровода, выполненного из неоднородного материала 5. Видно, что дисперсионный характер системы резко изменился по сравнению с пустым трубопроводом: значительно увеличилось количество мод распространяющихся волн, появилась нулевая, обладающая слабой дисперсией мода, которая отсутствует в пустом трубопроводе. Распространяющиеся моды, за исключением нулевой, имеют сложный дисперсионный характер: диапазоны частот с сильной дисперсией чередуются с диапазонами частот со слабой дисперсией. Влияние жидкости на дисперсионные свойства трубопровода иллюстрируют графики, приведенные на рис. 4б: для пустого трубопровода — сплошные кривые, для заполненного жидкостью трубопровода — пунктир. Материал трубопровода один и тот же. Как следует из графиков, слабодисперсные участки определяются свойствами трубопровода, сильно дисперсные участки — заполняющей трубопровод жидкостью. Существуют диапазоны частот, на которых дисперсионные кривые для пустого и наполненного жидкостью трубопровода полностью совпадают, т.е. жидкость на таких частотах не участвует в формировании поверхностного волнового поля. Более детальное представление о структуре поверхностного волнового поля для наполненного трубопровода можно получить из графиков

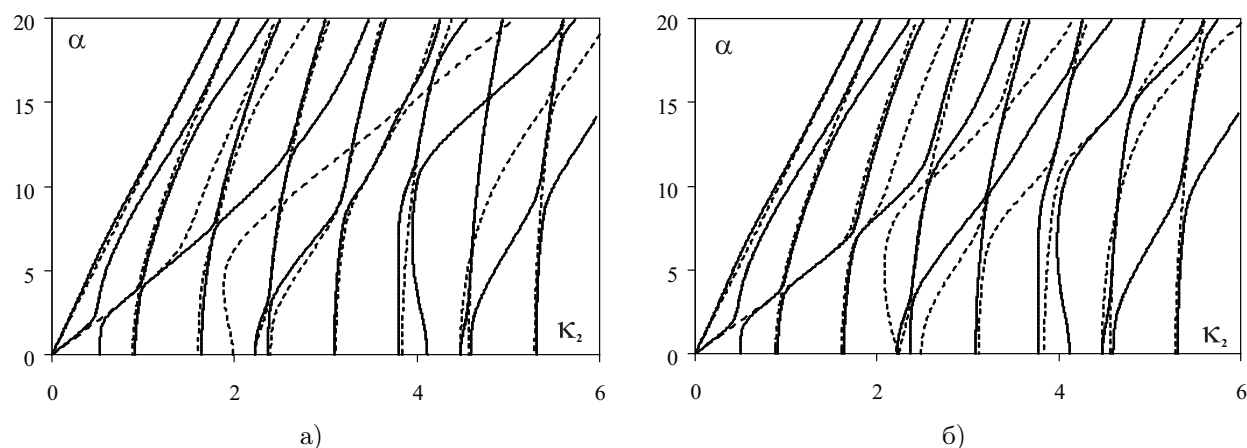


Рис. 5. Дисперсионные кривые для различных видов неоднородности

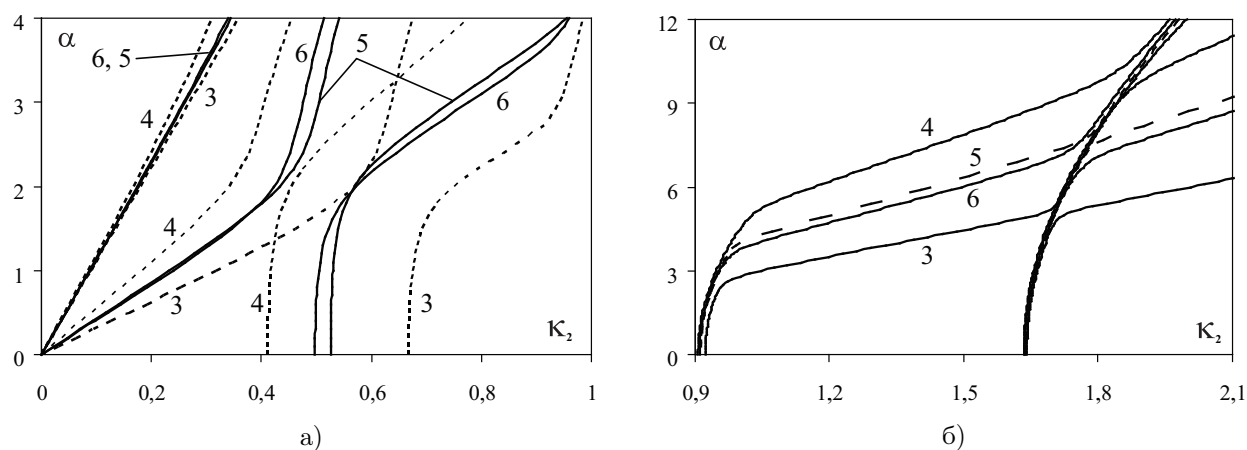


Рис. 6. Отдельные моды дисперсионных кривых

на рис. 5, на которых к дисперсионным кривым (сплошные линии) добавлены кривые нулей (штриховые линии) символа ядра интегрального оператора. Трубопровод, выполнен из неоднородного материала 5 — рис. 5а и из материала 6 — рис. 5б. Нетрудно заметить, что часть распространяющихся мод поверхностных волн, обусловленных наличием жидкости, подавляется нулями. Это относится как нулевой моде, так и к другим модам. Основную роль в структуре поверхностного волнового поля, как в зоне контакта, так и вне ее, играют определяемые самим трубопроводом моды. Наличие жидкости приводит к некоторому усилению влияния характера неоднородности на структуру поверхностного волнового поля, поскольку в этом случае имеет место различие граничных условий на внешней и внутренней поверхности запол-

ненного цилиндра. Для иллюстрации влияния свойств материала на динамику заполненного нефтью трубопровода на рис. 6а и 6б приведены графики отдельных мод дисперсионных кривых, рассчитанных для рассматриваемых видов неоднородности. На рис. 6а представлены первые три, на рис. 6б — третьи и четвертые моды дисперсионных кривых.

Нетрудно видеть, что нулевая мода, существование которой определено наличием жидкости, от свойств материала трубопровода не зависит. Интерес представляет первая мода. На ее низкочастотной части основную роль играет интегральный коэффициент — в рассматриваемом случае для зависимостей 5 и 6 никакого различия нет. На высокочастотной части проявляется определенное различие в поведении кривых, соответствующих различным видам неоднородности. Однако эти мо-

ды обусловлены наличием жидкости, в пустом трубопроводе они отсутствуют. Тем самым граничные условия также начинают играть определенную роль — наличие жидкости определяет существование напряжений на внутренней поверхности цилиндра.

Учитывая сложный характер дисперсионных свойств символа ядра интегрального уравнения, для его решения целесообразно применить обобщенный метод фиктивного поглощения [4, 12], при использовании которого в полной мере учитываются динамические свойства среды.

Заключение

Построена математическая модель динамических процессов в трубопроводе, выполненном из неоднородного по толщине материала и заполненного жидкостью, находящейся под большим давлением. Проведен детальный анализ структуры волнового поля как на свободной поверхности цилиндра, так и в зоне контакта. Показано, что более информативной характеристикой, определяющей изменение свойств среды является динамическая жесткость, поверхностное волновое поле определяется в основном интегральным коэффициентом неоднородности.

Литература

1. *Ананьев И. В., Бабешко В. А.* Колебания штампа на слое с переменными по глубине характеристиками // МТТ. 1978. № 1. С. 64–69.
2. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
3. *Ананьев И. В., Калинин В. В., Полякова И. Б.* О возбуждении волн вибрирующим штампом в среде с неоднородными начальными напряжениями // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 483–489.
4. *Калинчук В. В., Белянкова Т. И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М.: Физматлит, 2002. 240 с.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 735 с.
6. *Калинчук В. В., Белянкова Т. И.* Об одном подходе к исследованию динамики преднапряженного цилиндра, заполненного жидкостью // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2003. Спецвыпуск. С. 227–230.
7. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
8. *Зубов Л. М.* Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1982. 143 с.
9. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
10. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
11. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Прякина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
12. *Бабешко В. А., Белянкова Т. И., Калинин В. В.* Метод фиктивного поглощения в задачах теории упругости для неоднородного полупространства // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 276–284.

Статья поступила 10 ноября 2005 г.

Южный научный центр РАН

НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича Ростовского государственного университета

© Калинин В. В., Белянкова Т. И., Лыжов В. А., 2005