

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

В. А. Ковалев¹, Е. В. Коваленко²

APPLICATION OF ASYMPTOTIC MODELS
IN THE PROBLEM OF ACOUSTIC WAVES
SCATTERING BY ELASTIC CYLINDRICAL SHELL

Kovalev V.A., Kovalenko E.V.

The problem of scattering of stationary acoustic waves by elastic cylindrical shell is considered. Beyond the vicinity of a zero frequency and blocking frequencies the model of a flat layer type is used, while in the neighborhood of a zero frequency the refined shell Kirchhof–Love theory is applied and in the neighborhood of blocking frequencies the use is made of the long-wave high-frequency approximation of the equations of the elasticity theory. On the basis of asymptotic approximations an approximate solution has been developed, which makes it possible to describe the scattering process in a wide range of frequencies. The numerical example has been considered, the comparison with the exact solution has been presented.

Асимптотические модели взаимодействия оболочки и жидкости базируются на асимптотических методах в динамике тонкостенных тел, подробно описанных в монографии [1]. В этой монографии, а также в работах [2–4] предложены модели, позволяющие с высокой точностью описать рассеянное давление и другие характеристики задачи рассеяния. Но области применения этих моделей ограничены. На примере сферической оболочки предложена процедура построения приближенного решения с помощью сращивания указанных разложений [5]. Цель настоящей работы — показать, что для цилиндрической оболочки путем сращивания этих моделей приближенное решение задачи может быть построено в достаточно представительном частотном диапазоне. Решение этой задачи представляет значительный интерес для технических приложений, например, для дефектоскопии.

Известно [6], что при рассеянии акустического давления тонкой оболочкой основной вклад в рассеянное давление вносят периферические волны типа Лэмба. В окрестности нулевой частоты существуют всего две таких волны — волна типа Лэмба S_0 и порожденная жидкостью волна A (начиная с так называемой частоты совпадения, она может сменяться волной типа Лэмба A_0). В работе [1] дано их описание теорией оболочек Кирхгофа–

Лява. Но в случае оболочки не слишком малой толщины области применения теории Кирхгофа–Лява может оказаться недостаточно для того, чтобы осуществить сращивание. В этом случае используется уточненная теория Кирхгофа–Лява [2, 7], которая учитывает поперечное обжатие оболочки и некоторые другие явления. Эта теория применима вплоть до частоты первого толщинного резонанса.

Длинноволновое высокочастотное приближение уравнений теории упругости [1, 3, 8] описывает резонансы малых номеров волн типа Лэмба высших порядков. Его можно применить в окрестности частот толщинных резонансов.

Вне окрестностей нулевой частоты и частот толщинных резонансов колебания оболочки являются коротковолновыми. В этом случае оболочка может быть приближенно заменена плоским слоем, поскольку влияние кривизны мало. Модель типа плоского слоя, описывающая взаимодействие оболочки с жидкостью, развита в работе [4]. Она описывает резонансы периферических волн больших номеров. Как показано далее, упомянутые три асимптотические модели имеют области согласования, т.е., сращивая их, можно найти резонансные компоненты и функцию формы рассеянного давления.

¹Ковалев Владимир Александрович, д-р физ.-мат. наук, профессор Московской государственной академии приборостроения и информатики. E-mail: vlad_koval@mail.ru

²Коваленко Евгений Вениаминович, д-р физ.-мат. наук, профессор Государственного университета — Высшей школы экономики.

1. Постановка задачи

Пусть плоская акустическая волна

$$p_i = p_0 \exp[-i(k\xi + \omega t)] \quad (1.1)$$

падает на круговую цилиндрическую оболочку и рассеивается ею. Введем следующие параметры, характеризующие процесс рассеяния:

$$\begin{aligned} \kappa &= \rho/\rho_1, & \beta_i &= c_i/c \quad (i = 1, 2), \\ \gamma &= c_2/c_1, & k &= \omega/c. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь p_i — давление в падающей волне; p_0 — постоянная, имеющая размерность давления; ρ — плотность жидкости; ρ_1 — плотность материала оболочки; c — скорость звука в жидкости; c_1 и c_2 — скорости волн расширения и сдвига в оболочке соответственно; ω — круговая частота.

Срединную поверхность оболочки отнесем к цилиндрическим координатам (r, θ) , где r — радиальная координата, θ — полярный угол. Представим давление p_i и рассеянное давление p_s в следующем виде:

$$\begin{aligned} p_i &= p_0 \sum_{n=0}^{\infty} E_n (-i)^n J_n(kr) \cos n\theta, \\ p_s &= p_0 \sum_{n=0}^{\infty} E_n (-i)^n B_n H_n^{(1)}(kr) \cos n\theta, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $E_0 = 1$; $E_n = 2$ ($n \geq 1$); J_n — функция Бесселя; $H_n^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее опущен.

Представления (1.3) удовлетворяют уравнению Гельмгольца, кроме того, рассеянное давление p_s удовлетворяет условию излучения на бесконечности. Коэффициенты B_n определяются из контактной задачи для уравнений, описывающих движение оболочки. Решение, соответствующее трехмерным уравнениям теории упругости, получено в работе [9].

Рассмотрим три базовые асимптотические модели взаимодействия оболочки с жидкостью, вводя малый параметр тонкостенности $\eta = h/R$, где R — радиус срединной поверхности и h — полутолщина оболочки.

2. Модель типа плоского слоя

Этот подход основан на аналогии между периферическими волнами, возникающими в

оболочке при рассеянии акустического давления, и волнами Лэмба в слое. В работе [4] построена асимптотическая модель, являющаяся развитием модели плоского слоя и позволяющая описать взаимодействие оболочки с жидкостью, т.е. определить рассеянное давление и форму резонансных кривых.

В модели типа плоского слоя уравнения, описывающие движение оболочки, имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_p \varphi + \beta_1^{-2} k^2 R^2 \varphi &= 0, \\ \Delta_p \psi + \beta_2^{-2} k^2 R^2 \psi &= 0, \\ \Delta_p &= \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \zeta = \frac{r}{R} - 1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где φ и ψ — упругие потенциалы Ламе. Характеристики напряженно-деформируемого состояния оболочки выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right), \\ \sigma_r &= \rho_1 c^2 \frac{1}{R^2} \left[-k^2 R^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + 2\beta_2^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta \partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) \right], \\ u_\theta &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right), \\ \sigma_{r\theta} &= \rho_1 c^2 \frac{1}{R^2} \left[k^2 R^2 \psi + \right. \\ &\quad \left. + 2\beta_2^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta \partial \theta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Переход от уравнений теории упругости в цилиндрической системе координат к уравнениям (2.1)–(2.2) опирается на предположения

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \sim \eta^{-1}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \sim \eta^{-1}, \quad \frac{\omega R}{c_2} \sim \eta^{-1}, \quad (2.3)$$

которые определяют коротковолновые колебания оболочки. Они позволяют оставить в уравнениях теории упругости только старшие производные и заморозить радиус r на срединной поверхности. В работе [4] определены коэффициенты B_n в виде

$$B_n = -\frac{J'_n(x)d_1 - 2k^3 R^3 \kappa J_n(x)d_2}{H_n^{(1)'}(x)d_1 - 2k^3 R^3 \kappa H_n^{(1)}(x)d_2}, \quad (2.4)$$

где $x = ka$; a — внешний радиус оболочки; d_1 и d_2 — коэффициенты.

Вычисления показывают, что модель типа плоского слоя применима в широком частотном диапазоне, за исключением окрестностей нулевой частоты и частот толщинных резонансов.

3. Уточненная теория Кирхгофа–Лява

Теория Кирхгофа–Лява и ее уточнения могут рассматриваться как низкочастотные приближения трехмерных уравнений теории упругости. Следовательно, эти теории можно применить для аппроксимации решения в окрестности нулевой частоты. Асимптотическая модель взаимодействия жидкости с тонкой оболочкой, являющаяся уточнением теории Кирхгофа–Лява, приведена в работах [2, 7].

Уравнения движения оболочки в перемещениях имеют вид

$$\left(1 + \frac{1}{3}\eta^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{3}\eta^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{1-\nu}{2} R^2 \frac{\omega_{\text{tg}}^2}{c_2^2} u + \frac{\nu(1+\nu)R}{2E} \frac{\partial m}{\partial \theta} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{3}\eta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} + w + \frac{1}{3}\eta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{1-\nu}{2} R^2 \frac{\omega_{\text{tr}}^2}{c_2^2} w + \frac{\nu(1+\nu)R}{E} m + \frac{(1-\nu^2)R^2}{2Eh} Z = 0,$$

$$\omega_{\text{tg}}^2 u = \omega^2 \left[u + \frac{\eta^2 (B_{00} + B_{01}z^2 + B_{02}z^4)}{c_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right], \quad z = \frac{\omega h}{c_2},$$

$$\omega_{\text{tr}}^2 w = \omega^2 \left[w + \frac{\eta^2 A_{00} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - z^2 (A_{01}w + \eta^2 A_{02} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2})}{c_2^2} \right],$$

$$Z = \left(1 - \frac{8-3\nu}{10(1-\nu)} \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (p_i + p_s) \Big|_{r=a}, \quad m = -(p_i + p_s) \Big|_{r=a}.$$

Здесь u — тангенциальное перемещение в направлении оси θ ; w — прогиб; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга; коэффициенты A_{0i} и B_{0i} приведены в работе [2].

К уравнениям (3.1) следует добавить условие непротекания:

$$w + \frac{\nu\eta^2}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\nu\eta}{(1-\nu)} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{\partial}{\partial r} (p_i + p_s) \Big|_{r=a}. \quad (3.2)$$

Подчеркнутые члены в уравнениях (3.1)–(3.2) учитывают поперечное обжатие оболочки и некоторые другие явления (см. [2, 7]). Опуская их, получаем уравнения классической теории Кирхгофа–Лява.

Коэффициенты B_n , найденные из задачи (3.1), (3.2) имеют вид

$$B_n = - \frac{d_1 J'_n(x) + F J_n(x)}{d_1 H_n^{(1)'}(x) + F H_n^{(1)}(x)}, \quad (3.3)$$

$$F = \frac{1}{4} \kappa R \beta_2^{-2} k (b_2 d_2 + b_1 d_3),$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix},$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$a_{11} = -n^2 \left(1 + \frac{1}{3}\eta^2 \right) + \frac{1-\nu}{2} R^2 \frac{\omega_{\text{tg}}^2}{c_2^2},$$

$$a_{12} = -n \left(1 + \frac{1}{3}\eta^2 n^2 \right),$$

$$a_{21} = -n \left(1 + \frac{1}{3}\eta^2 n^2 \right),$$

$$a_{22} = 1 + \frac{1}{3}\eta^2 n^4 - \frac{1-\nu}{2} R^2 \frac{\omega_{\text{tr}}^2}{c_2^2}, \quad b_1 = -\nu n,$$

$$a_{31} = -\frac{\nu}{1-\nu} \eta n, \quad a_{32} = 1 - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \eta^2 n^2,$$

$$b_2 = \nu - \frac{1-\nu}{\eta} \left(1 + \frac{8-3\nu}{10(1-\nu)} \eta^2 n^2 \right).$$

Отметим, что уточненная асимптотическая модель применима при $\omega R/c_2 \ll \eta^{-1}$, а классическая теория Кирхгофа–Лява — при $\omega R/c_2 \ll \eta^{-1/2}$. Эти теории описывают только резонансы волны типа Лэмба S_0 и волны А, порожденной жидкостью (или волны типа Лэмба A_0). Номера описываемых резонансов лежат в областях $n \ll \eta^{-1}$ и $n \ll \eta^{-1/2}$ для уточненной асимптотической модели и теории Кирхгофа–Лява соответственно.

4. Длинноволновое высокочастотное приближение

В окрестностях частот толщинных резонансов волны Лэмба высших порядков соответствуют длинноволновым высокочастотным колебаниям. Существует два типа длинноволновых высокочастотных приближений [8]. Поперечное приближение применяется в окрестности частот толщинных резонансов растяжения–сжатия, т.е. при $|z - \Lambda_{st}| \ll 1$, где $\Lambda_{st} = \pi m / \gamma$ (для антисимметричных мод) и $\Lambda_{st} = \pi (m - 1/2) / \gamma$ (для симметричных мод), $m = 1, 2, \dots$. В окрестности частот толщинных резонансов сдвига применяется тангенциальное длинноволновое высокочастотное приближение. В этом случае разрешающее уравнение и условие непротекания принимают вид

$$\eta^2 \left(P \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + P_R^0 u \right) + (z^2 - \Lambda_{sh}^2) u = \frac{2(-1)^{m+1} h \gamma}{\Lambda_{sh} \rho_1 c_2^2} \eta G \frac{\partial (p_i + p_s)}{\partial \theta},$$

$$P_R^0 = -\frac{15}{4}, \quad (4.1)$$

$$\frac{2(-1)^m \gamma}{\Lambda_{sh}} \eta G \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{1}{\rho \omega^2} \frac{\partial}{\partial r} (p_i + p_s) \Big|_{r=a},$$

$$P = 1 \pm \frac{8\gamma}{\Lambda_{sh}} G, \quad G = \left\{ \begin{array}{l} \text{ctg}(\gamma \Lambda_{sh}) \\ \text{tg}(\gamma \Lambda_{sh}) \end{array} \right\}.$$

Здесь и далее верхний (нижний) знак и верхнее (нижнее) выражение в фигурных скобках соответствует антисимметричным (симметричным) модам, $\Lambda_{sh} = \pi (2m - 1) / 2$ для антисимметричных мод и $\Lambda_{sh} = \pi m$ для симметричных мод, $m = 1, 2, \dots$, $|z - \Lambda_{sh}| \ll 1$. Коэффициенты B_n определяются из систем (4.1), и для антисимметричного случая тангенциального приближения получаем

$$B_n = -\frac{S J_n'(x) - Q J_n(x)}{S H_n^{(1)'}(x) - Q H_n^{(1)}(x)},$$

$$S = -P n^2 + P_R^0 + \eta^{-2} (z^2 - \Lambda_{sh}^2), \quad (4.2)$$

$$Q = 4n^2 h \kappa \beta_1^{-2} \text{ctg}^2(\gamma \Lambda_{sh}) \Lambda_{sh}^{-2}.$$

Сформулированная модель применима только для малых значений параметра n ($n \ll \eta^{-1}$). Однако ряд (1.3) для p_s начинает сходиться при $n \sim x \sim \eta^{-1}$ (см. [5, 6]), т.е. решение содержит также коротковолновые составляющие. Следовательно, при вычислении рассеянного давления эта модель должна быть скомбинирована с моделью типа плоского слоя.

5. Сращивание асимптотических приближений

Рассмотрим сращивание асимптотических приближений для описанных моделей. Начнем с изучения резонансных компонентов парциальных мод [6], используя для выделения резонансов жесткое основание:

$$\zeta_n = \frac{4}{\sqrt{\pi x}} \left| B_n + \frac{J_n'(x)}{H_n^{(1)'}(x)} \right|. \quad (5.1)$$

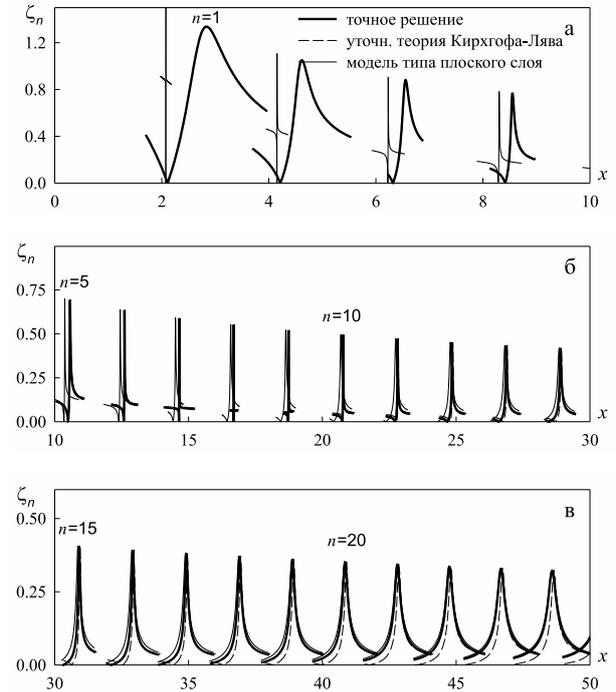


Рис. 1. Резонансные компоненты парциальных мод для волны S_0

На рис. 1 представлены резонансные компоненты для волны типа Лэмба S_0 , вычисленные по уточненной теории Кирхгофа–Лява и по модели типа плоского слоя. Коэффициенты B_n в формуле (5.1) определялись либо по формуле (3.3) (уточненная теория Кирхгофа–Лява), либо по формуле (2.4) (модель типа плоского слоя). Параметры задачи:

$$c_1 = 3807 \text{ м/с}, c_2 = 1687 \text{ м/с}, c = 1493 \text{ м/с},$$

$$\rho = 1000 \text{ кг/м}^3, \rho_1 = 11300 \text{ кг/м}^3, \eta = 1/39.$$

Точное решение [9] также приведено на рис. 1. Аналогичное сравнение для порожденной жидкостью волны A представлено на рис. 2. Отметим, что здесь волна A_0 появляется только на высоких частотах ($x > 109$),

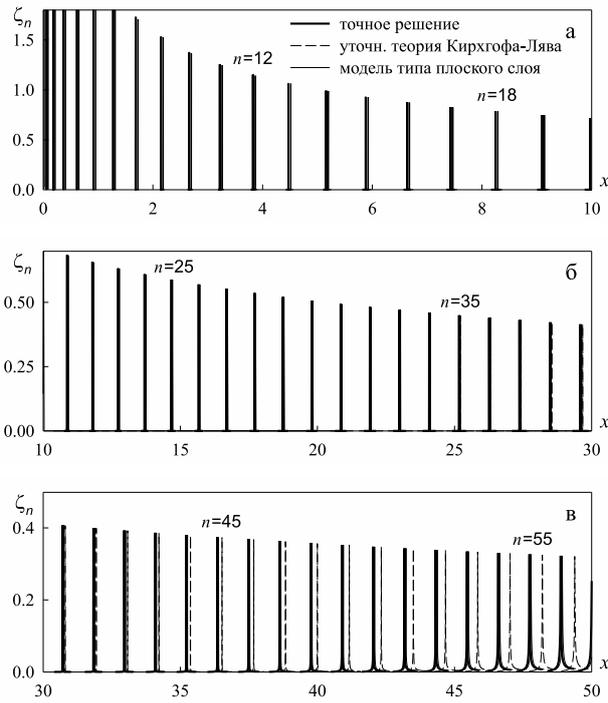


Рис. 2. Резонансные компоненты парциальных мод для волны A

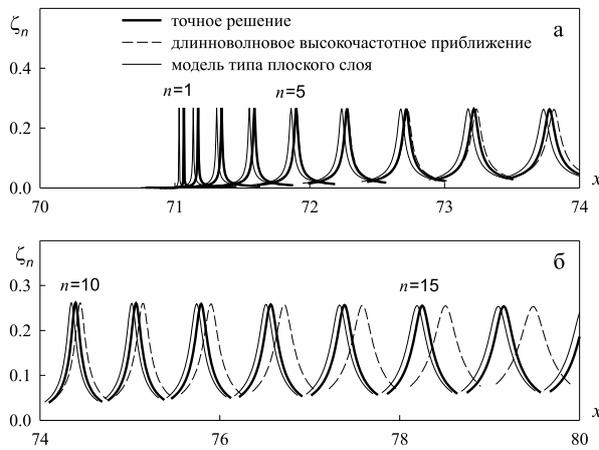


Рис. 3. Резонансные компоненты парциальных мод для волны A_1

значение которых значительно выше частоты первого толщинного резонанса. На рис. 3 сравниваются резонансные компоненты для волны типа Лэмба A_1 , найденные с использованием модели типа плоского слоя и длинноволнового высокочастотного приближения, а также с использованием точного решения. Для случая длинноволнового высокочастотного приближения коэффициенты B_n определяются формулой (4.2). Из рис. 1–3 следует, что данные асимптотические модели имеют

области согласования. Таким образом, синтез рассеянного давления и других характеристик задачи действительно возможен в достаточно широком частотном диапазоне.

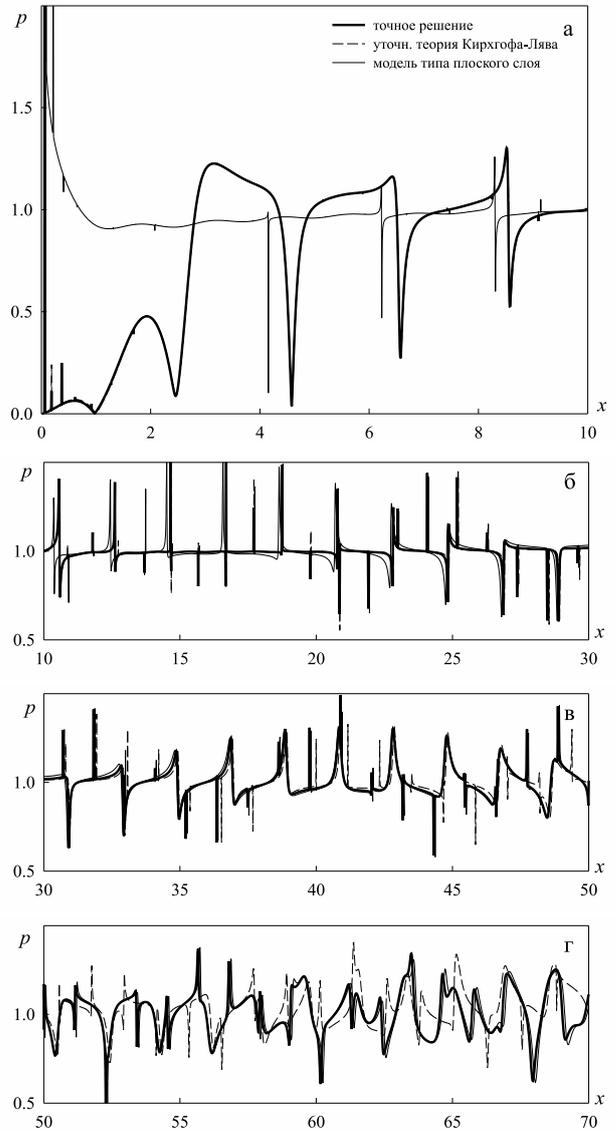


Рис. 4. Сравнение функций формы рассеянного давления

Результаты синтеза функции формы рассеянного давления в дальнем поле ($r \rightarrow \infty$) для рассеяния назад ($\theta = 0$) [6]

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi x}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} E_n B_n (-1)^n \right| \quad (5.2)$$

представлены на рис. 4, 5. Длинноволновое высокочастотное приближение применяется только начиная с частоты первого толщинно-

го резонанса и при $n < 10$. Остаток ряда (5.2) вычисляется по модели типа плоского слоя.

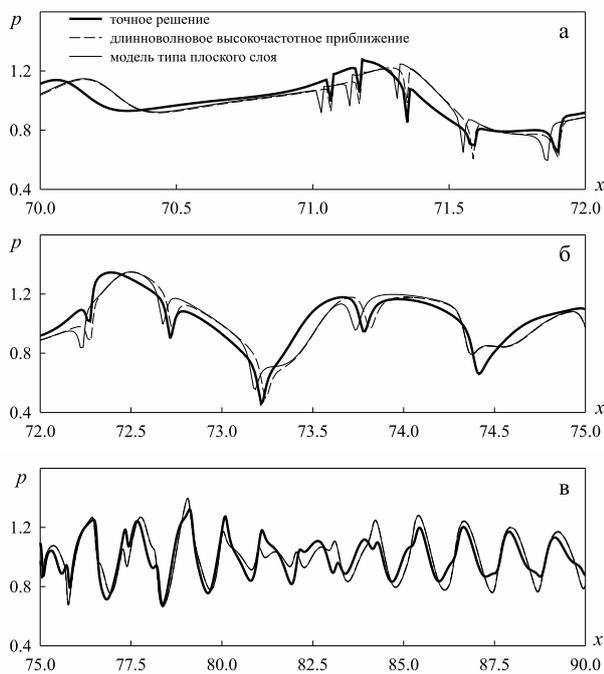


Рис. 5. Сравнение функций формы рассеянного давления

Данные, представленные на рис. 1–5, показывают, что описанный подход сращивания асимптотических моделей позволяет аппроксимировать решение задачи рассеяния в широком частотном диапазоне.

Литература

1. *Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V.* Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. N. Y.: Acad. Press, 1998. 226 p.
2. *Belov A.V., Kaplunov J.D., Nolde E.V.* A refined asymptotic model of fluid-structure interaction in scattering by elastic shells // *Flow, Turbulence and Combustion*. 1999. Vol. 61. № 1–4. P. 255–267.
3. *Каплунов Ю.Д.* Высокочастотные напряженно-деформируемые состояния малой изменчивости в оболочках, погруженных в жидкость // *ПММ*. 1991. Т. 55. № 3. С. 478–485.
4. *Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Ковалев В.А.* Развитие приближения типа плоского слоя в задаче рассеяния акустических волн цилиндрической оболочкой // *Изв. РАН. МТТ*. 2002. № 3. С. 180–186.
5. *Ковалев В.А.* Сращивание асимптотических приближений в задачах рассеяния акустических волн упругой сферической оболочкой // *ПММ*. 2002. Т. 66. № 4. С. 596–606.
6. *Векслер Н.Д.* Акустическая спектроскопия. Таллинн: Валгус, 1989. 324 с.
7. *Ковалев В.А.* Применение уточненной асимптотической модели в задаче рассеяния плоской акустической волны сферической оболочкой // *Изв. РАН. МТТ*. 2002. № 2. С. 155–162.
8. *Каплунов Ю.Д.* Высокочастотные напряженно-деформированные состояния малой изменчивости в упругих тонких оболочках // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1990. № 5. С. 147–157.
9. *Doolittle R.D., Bberall H.* Sound scattering by elastic cylindrical shells // *J. Acoust. Soc. America*. 1966. Vol. 39. № 2. P. 272–275.

Статья поступила 14 июня 2003 г.

Московская государственная академия приборостроения и информатики,
Государственный университет — Высшая школа экономики
© 2003 Ковалев В. А., Коваленко Е. В.