УДК 539.375:534.1

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ СИМВОЛОВ ЯДЕР ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПРОСТЕЙШИМ «ВИРУСАМ» ВИБРОПРОЧНОСТИ[1]

О. Д. Пряхина[2], *А. В. Смирнова*[3]

PROPERTIES OF DETERMINANTS OF INTEGRAL EQUATIONS KERNEL SYMBOLS, WHICH CORRESPOND TO THE SIMPLEST VIBRATION STRENGTH "VIRUSES"

Pryakhina O. D., Smirnova A. V.

The new method of developing Green's matrix-symbols of multi-layered semi-bounded media with defects like inclusions and cracks on interfaces is applied to comparatively analyze the determinants of integral equations kernel symbols, which correspond to the simplest vibration strength "viruses".

Динамические процессы в полуограниченных средах, содержащих совокупность неоднородностей различной природы, несмотря на большое количество работ, посвященных их исследованию, на сегодняшний день далеки до полного описания. Вследствие зависимости напряженно-деформированного состояния механических систем подобного рода от многих параметров традиционные аналитические и численные методы их анализа становятся неэффективными даже при небольшом количестве дефектов, а с ростом частоты колебаний и в областях больших размеров многие из них неприменимы. Кроме того, неединственность решений динамических задач для сред с совокупностью неоднородностей при некоторых значениях параметров, делает эти задачи еще более сложными. В связи с этим актуальными становятся как исследования рассматриваемого класса задач в новой постановке, так и разработка новых численно-аналитических методов их решения. Особенно важным является создание методов, направленных на изучение резонансных свойств механических систем.

Созданная академиком РАН В. А. Бабешко теория «вирусов» вибропрочности определила новую стратегию исследования сред с дефектами. Она нацелена на выделение, классификацию и изучение свойств специальных механических объектов, находящихся в деформируемой среде, способных в условиях вибрации локализовать волновой процесс и вызвать резонансы. Фундаментальные результаты по теории «вирусов» вибропрочности, выявлению условий локализации и развитию принципиально новых подходов к их изучению получены В. А. Бабешко, О. М. Бабешко [1–12].

В настоящей работе рассматривается совокупность простейших типов дефектов — плоских трещин или жестких включений, расположенных в одной плоскости в однородных упругих средах — слое, полупространстве и пространстве. Основное внимание при этом уделено сравнительному анализу особых мно-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (04-01-96822, 05-01-00811), ФЦНТП (РИ-112/001/301).

[2]Пряхина Ольга Донатовна, д-р физ.-мат. наук, заведующая кафедрой высоких технологий, прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета.

[3]Смирнова Алла Васильевна, канд. физ.-мат. наук, докторант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета, доцент.

жеств определителей символов ядер систем интегральных уравнений, порождаемых краевыми задачами рассматриваемого класса. Постановка краевых задач и методы их сведения к системам интегральных уравнений (СИУ), а также эффективный метод вычисления определителей матриц-символов ядер этих систем приведены в [13–22].

1. Общие функционально-матричные соотношения

В [20, 22] для пакета N термоэлектроупругих слоев с жестко защемленной нижней гранью получены универсальные функционально-матричные соотношения, связывающие трансформанты Фурье расширенных векторов напряжений $\mathbf{T}_k$ и перемещений $\mathbf{W}_k$ в плоскостях раздела слоев со скачками расширенных векторов напряжений на границах включений $\boldsymbol{\eta}_k$ и скачков расширенных векторов перемещений $\mathbf{f}_k$ на берегах трещин

$$\mathbf{T} = \mathbf{L}\mathbf{Q}_1 + \mathbf{D}\mathbf{Q}_2, \quad \mathbf{W} = \mathbf{V}\mathbf{Q}_1 + \mathbf{M}\mathbf{Q}_2, \tag{1.1}$$

где

$$\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_{N-1}\},$$
$$\mathbf{W} = \{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \ldots, \mathbf{W}_{N-1}\},$$
$$\mathbf{Q}_1 = \{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \ldots, \boldsymbol{\eta}_{N-1}\},$$
$$\mathbf{Q}_2 = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{N-1}\}$$

являются многомерными векторами. Элементы блочных матриц

$$\mathbf{L} = \|\mathbf{L}_{ij}\|_{i,j=1}^{N-1}, \quad \mathbf{D} = \|\mathbf{D}_{ij}\|_{i,j=1}^{N-1},$$
$$\mathbf{V} = \|\mathbf{V}_{ij}\|_{i,j=1}^{N-1}, \quad \mathbf{M} = \|\mathbf{M}_{ij}\|_{i,j=1}^{N-1}$$

вычисляются по формулам

$$\mathbf{L}_{ij} = \begin{cases} -\mathbf{S}_{Ni}^{-1}\mathbf{K}_{N-i}, & i = j, \\ -\mathbf{R}_{ij}^{-}\mathbf{S}_{Nj}^{-1}\mathbf{K}_{N-j}, & i < j, \\ -\mathbf{R}_{ij}\mathbf{S}_{Nj}^{-1}\mathbf{K}_{j}^{-}, & i > j, \end{cases}$$
$$\mathbf{D}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{S}_{Ni}^{-1}, & i = j, \\ \mathbf{R}_{ij}^{-}\mathbf{S}_{Nj}^{-1}, & i < j, \\ \mathbf{R}_{ij}\mathbf{S}_{Nj}^{-1}, & i > j, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\mathbf{V}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{G}_{Ni}^{-1}, & i = j, \\ -\mathbf{K}_{i}^{-}\mathbf{R}_{ij}^{-}\mathbf{S}_{Nj}^{-1}\mathbf{K}_{N-j}, & i < j, \\ -\mathbf{K}_{N-i}\mathbf{R}_{ij}\mathbf{S}_{Nj}^{-1}\mathbf{K}_{j}^{-}, & i > j, \end{cases} \tag{1.3}$$
$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{K}_{i}^{-}\mathbf{R}_{ij}^{-}\mathbf{S}_{Nj}^{-1}, & i < j, \\ \mathbf{K}_{N-i}\mathbf{R}_{ij}\mathbf{S}_{Nj}^{-1}, & i \geqslant j. \end{cases}$$

Матрицы $\mathbf{R}_{km}$ и $\mathbf{R}_{km}^{-}$ имеют вид

$$\mathbf{R}_{km} = \begin{cases} \mathbf{I}, \quad k = m, \\ (-1)^{(k-m)} \prod\limits_{i=k}^{m+1} \mathbf{F}_{N+1-i}^{-1}(h_i)\mathbf{B}_{+}(-h_i), \\ \qquad\qquad k \neq m, \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_{km}^{-} = \begin{cases} \mathbf{I}, \quad k = m, \\ \prod\limits_{i=k+1}^{m} \boldsymbol{\Phi}_{i}^{-1}(h_1, h_2, \ldots, h_i)\mathbf{B}_{-}(h_i), \\ \qquad\qquad k \neq m, \end{cases}$$

а $\mathbf{F}_m$, $\mathbf{K}_m$, $\boldsymbol{\Phi}_m$, $\mathbf{K}_m^{-}$ определяются из рекуррентных соотношений

$$\mathbf{F}_1(h_N) = \mathbf{B}_{-}(-h_N),$$

$$\mathbf{F}_{k+1}(h_{N-k}) = \mathbf{B}_{-}(-h_{N-k}) - \mathbf{K}_k(h_{N-k+1}),$$

$$\mathbf{K}_m(h_{N+1-m}, \ldots, h_N) = \mathbf{B}_{+}(h_{N+1-m}) - \\ - \mathbf{B}_{-}(h_{N+1-m})\mathbf{F}_m^{-1}\mathbf{B}_{+}(-h_{N+1-m}),$$

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = 0, \quad \boldsymbol{\Phi}_m = \mathbf{K}_{m-1}^{-}(h_1, \ldots, h_{m-1}) - \mathbf{B}_{+}(h_m),$$
$$\mathbf{K}_1^{-}(h_1) = \mathbf{B}_{-}(-h_1),$$

$$\mathbf{K}_m^{-}(h_1, \ldots, h_m) = \mathbf{B}_{-}(-h_m) + \\ + \mathbf{B}_{+}(-h_m)\boldsymbol{\Phi}_m^{-1}(h_1, \ldots, h_m)\mathbf{B}_{-}(h_m),$$

$$k = 1, 2, \ldots, N-1; \quad m = 2, 3, \ldots, N.$$

Вспомогательные матрицы $\mathbf{B}_{\pm}$ имеют размерность 5×5, структура их элементов приведена в [23].

Вывод соотношений (1.1)–(1.3) основан на специальном представлении решения для одного слоя [23], классификации и решении набора модельных краевых задач для системы дифференциальных уравнений движения термоэлектроупругой полуограниченной среды, содержащей совокупность неоднородностей различной природы, в соответствии с теорией «вирусов» вибропрочности [5, 6, 8].

Благодаря введению специальных матриц, характеризующих положение дефектов в среде

$$\mathbf{S}_{Np} = \mathbf{K}_p^{-}(h_1, h_2, \ldots, h_p) - \\ - \mathbf{K}_{N-p}(h_{p+1}, h_{p+2}, \ldots, h_N),$$

$$\mathbf{G}_{Np} = \left[\mathbf{K}_p^-\left(h_1, h_2, \ldots, h_p\right)\right]^{-1} - \\ - \left[\mathbf{K}_{N-p}\left(h_{p+1}, h_{p+2}, \ldots, h_N\right)\right]^{-1},$$

форма записи (1.1)–(1.3) допускает простую интерпретацию результатов и удобна для проведения дальнейшего анализа.

Здесь $\mathbf{K}_p^-$ — матрица Грина пакета p слоев со свободной верхней гранью, $\mathbf{K}_{N-p}$ — матрица Грина пакета $(N-p)$ слоев на жестком основании. Элементы указанных матриц зависят от параметров преобразования Фурье α, β, частоты гармонических колебаний ω, а также физико-механических и геометрических параметров слоев, полутолщины которых приведены в качестве аргументов.

Матрицы $\mathbf{L}_{ij}$ и $\mathbf{D}_{ij}$ в (1.2) определяют напряжения, а матрицы $\mathbf{V}_{ij}$ и $\mathbf{M}_{ij}$ в (1.3) — перемещения в плоскости раздела i-го и $(i+1)$-го слоев, вызванные соответственно скачком напряжений на границах включения и скачком перемещений на берегах трещины, расположенных в плоскости раздела j-го и $(j+1)$-го слоев.

Соотношения (1.1)–(1.3) позволяют исследовать различные аспекты динамики деформируемых многослойных сред со сложными физико-механическими свойствами при произвольном количестве и сочетании дефектов типа плоских включений и трещин, имеющих многоуровневое расположение. Полагая в (1.1) $\mathbf{Q}_1 \equiv 0$ или $\mathbf{Q}_2 \equiv 0$, получим функционально-матричные соотношения, соответствующие задаче о колебаниях пакета слоев, вызванных только вибрацией берегов трещин или границ жестких включений соответственно. Осуществив в (1.2) и (1.3) предельный переход, устремляя толщину нижнего слоя пакета к бесконечности, приходим к задаче для многослойного полупространства с совокупностью неоднородностей. Если в дополнение к этому устремить к бесконечности толщину верхнего слоя, то получим соотношения, описывающие динамику слоистого пространства при наличии дефектов, расположенных в параллельных плоскостях. Для однородной среды, содержащей дефекты, следует принять физико-механические параметры всех слоев равными.

Построение ядер СИУ

$$\mathbf{KQ}(\alpha,\beta) = \int\limits_{\delta_1}\int\limits_{\delta_2} \mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)\mathbf{Q}(\alpha,\beta)\times \\ \times e^{-i(\alpha x+\beta y)}\,d\alpha\,d\beta = \mathbf{f}(x,y), \quad (x,y)\in\Omega \tag{1.4}$$

при произвольном расположении и сочетании дефектов основано на использовании (1.1)–(1.3) и не требует трудоемкой процедуры постановки и решения краевых задач [16, 17, 21, 22].

Размерность блочной матрицы-символа ядра $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ в (1.4) равна $n(M+P)\times n(M+P)$ и определяется размерностью n системы дифференциальных уравнений движения деформируемой среды, а также количеством уровней расположения трещин M и включений P. Ее элементы зависят от параметров преобразования Фурье, механических и геометрических параметров среды, частоты гармонических колебаний (общий множитель $e^{-i\omega t}$ везде далее опущен).

В качестве примера использования соотношений (1.1)–(1.3) приведем вид элементов и определителей матриц $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$, соответствующих простейшим «вирусам» вибропрочности — одноуровневым дефектам в однородных упругих средах типа слоя, полупространства и пространства. В этом случае $n=3$, а M и P принимают значения 0 или 1.

2. Колебания однородных сред, содержащих одноуровневые включения

2.1. Рассмотрим однородный упругий слой толщины $H = 2(h_1+h_2)$, занимающий объем $(-\infty < x,y < +\infty;\ -H \leqslant z \leqslant 0)$, с жестко защемленной нижней гранью и содержащий включение на глубине $z=-2h_1$. В соответствии с теорией «вирусов» вибропрочности это трехуровневый «вирус», имеющий структуру [5, 6]

$$V\big(1/-2h_1;\Omega_1/-2(h_1+h_2);\infty// \\ //\,2/0;\infty/-2h_1;\tilde{\Omega}_1\big), \tag{2.1}$$

где Ω_1 — область, занятая включением, $\tilde{\Omega}_1$ — дополнение Ω_1 до всей плоскости.

Функционально-матричные соотношения, соответствующие «вирусу» (2.1), получим из (1.1)–(1.3) при $N=2$ и $\mathbf{Q}_2\equiv 0$

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{L}_{11}\boldsymbol{\eta}_1, \quad \mathbf{L}_{11} = -\mathbf{S}_{21}^{-1}(h_1,h_2)\mathbf{K}_1(h_2),$$

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{G}_{21}^{-1}(h_1,h_2)\boldsymbol{\eta}_1,$$

$$\mathbf{G}_{21} = \left[\mathbf{K}_1^-(h_1)\right]^{-1} - \left[\mathbf{K}_1(h_2)\right]^{-1}.$$

Матрица $\mathbf{G}_{21}^{-1}$ является символом ядра СИУ (1.4) относительно скачка вектора напряжений на границах включения

$$\mathbf{G}_{21}^{-1} = \mathbf{K} = \|K_{ij}\|_{i,j=1}^{3}.$$

Здесь

$$K_{11} = \frac{\alpha^2}{\lambda^2\Delta_{22}}k_{11} + \frac{\beta^2}{\lambda^2\Delta_{12}}n_{11},$$
$$K_{22} = \frac{\beta^2}{\lambda^2\Delta_{22}}k_{11} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2\Delta_{12}}n_{11}, \qquad (2.2)$$
$$K_{33} = \frac{k_{22}}{\Delta_{22}},$$
$$K_{12} = K_{21} = \frac{\alpha\beta}{\lambda^2}\left(\frac{1}{\Delta_{22}}k_{11} - \frac{1}{\Delta_{12}}n_{11}\right),$$
$$K_{13} = -K_{31} = i\alpha\frac{k_{12}}{\Delta_{22}},$$
$$K_{23} = -K_{32} = i\beta\frac{k_{12}}{\Delta_{22}}.$$

Структура (2.2) элементов матриц $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ определяется свойствами материала, а вид функций k_{11}, k_{12}, k_{22}, n_{11} — моделью среды.

$$k_{11} = m_{10}^{+}(h_1)D_{21}(h_2) + \Delta_{21}(h_1)m_{11}^{+}(h_2), \qquad (2.3)$$
$$n_{11} = n_{10}^{+}(h_1)D_{11}(h_2),$$
$$k_{12} = m_{20}^{+}(h_1)D_{21}(h_2) + \Delta_{21}(h_1)m_{21}^{+}(h_2),$$
$$k_{22} = k_{20}^{+}(h_1)D_{21}(h_2) + \Delta_{21}(h_1)k_{21}^{+}(h_2),$$

$$m_{10}^{+}(h_1) = -\sigma_2\kappa_2^2\big[\gamma^2\operatorname{sh}(2\sigma_1h_1)\operatorname{ch}(2\sigma_2h_1) - \lambda^2\sigma_1\sigma_2\operatorname{ch}(2\sigma_1h_1)\operatorname{sh}(2\sigma_2h_1)\big],$$

$$m_{20}^{+}(h_1) = 2\sigma_1\sigma_2\gamma(\gamma+\lambda^2)\times\big[\operatorname{ch}(2\sigma_1h_1)\operatorname{ch}(2\sigma_2h_1) - 1\big] - 2(\gamma^3 + \lambda^2\sigma_1^2\sigma_2^2)\operatorname{sh}(2\sigma_1h_1)\operatorname{sh}(2\sigma_2h_1),$$

$$k_{20}^{+}(h_1) = -\sigma_1\kappa_2^2\big[\gamma^2\operatorname{ch}(2\sigma_1h_1)\operatorname{sh}(2\sigma_2h_1) - \lambda^2\sigma_1\sigma_2\operatorname{sh}(2\sigma_1h_1)\operatorname{ch}(2\sigma_2h_1)\big],$$
$$n_{10}^{+}(h_1) = \operatorname{ch}(2\sigma_2h_1),$$

$$m_{11}^{+} = -\frac{1}{4}\sigma_2\kappa_2^2\big[\sigma_1\sigma_2\operatorname{ch}(2\sigma_1h_2)\operatorname{sh}(2\sigma_2h_2) - \lambda^2\operatorname{sh}(2\sigma_1h_2)\operatorname{ch}(2\sigma_2h_2)\big],$$

$$m_{21}^{+} = \frac{1}{2}\big\{\sigma_1\sigma_2(\gamma+\lambda^2)\times[\operatorname{ch}(2\sigma_1h_2)\operatorname{ch}(2\sigma_2h_2) - 1] - (\gamma\lambda^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2)\operatorname{sh}(2\sigma_1h_2)\operatorname{sh}(2\sigma_2h_2)\big\},$$

$$k_{21}^{+} = -\frac{1}{4}\sigma_1\kappa_2^2\big[\sigma_1\sigma_2\operatorname{sh}(2\sigma_1h_2)\operatorname{ch}(2\sigma_2h_2) - \lambda^2\operatorname{ch}(2\sigma_1h_2)\operatorname{sh}(2\sigma_2h_2)\big],$$

$$D_{21}(h_2) = \frac{1}{4}(\lambda^4 + \sigma_1^2\sigma_2^2)\operatorname{sh}(2\sigma_1h_2)\operatorname{sh}(2\sigma_2h_2) - \frac{1}{2}\lambda^2\sigma_1\sigma_2\big[\operatorname{ch}(2\sigma_1h_2)\operatorname{ch}(2\sigma_2h_2) - 1\big],$$
$$D_{11}(h_2) = \frac{\operatorname{sh}(2\sigma_2h_2)}{\sigma_2},$$
$$\Delta_{22}(h_1,h_2) = \Delta_{21}(h_1+h_2),$$
$$\Delta_{12}(h_1,h_2) = \Delta_{11}(h_1+h_2),$$

$$\Delta_{21}(h_1) = \frac{1}{2}\sigma_1\sigma_2\left[\frac{1}{4}\kappa_2^4 - (\gamma+\lambda^2)^2 + \left(\frac{1}{4}\kappa_2^4 + (\gamma+\lambda^2)^2\right)\operatorname{ch}(2\sigma_1h_1)\operatorname{ch}(2\sigma_{2k}h_1)\right] - \lambda^2(\gamma^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2)\operatorname{sh}(2\sigma_1h_1)\operatorname{sh}(2\sigma_2h_1),$$
$$\Delta_{11}(h_1) = \operatorname{ch}(2\sigma_2h_1),$$
$$\gamma = \lambda^2 - 0{,}5\kappa_2^2, \quad \sigma_2^2 = \lambda^2 - \kappa_2^2,$$
$$\sigma_1^2 = \lambda^2 - \varepsilon\kappa_2^2, \quad \lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$
$$\kappa_2^2 = \rho\omega^2/\mu, \quad \varepsilon = (1-2\nu)/(2-2\nu).$$

Здесь μ, ν, ρ — модуль сдвига, коэффициент Пуассона и плотность материала соответственно

$$\det\mathbf{K} = \left[\frac{\Delta_{21}(h_1)\,D_{21}(h_2)}{\Delta_{21}(h_1+h_2)}\right]\times\left[\frac{\Delta_{11}(h_1)\,D_{11}(h_2)}{\Delta_{11}(h_1+h_2)}\right]. \qquad (2.4)$$

В (2.4) и далее в выражениях для определителей СИУ, соответствующих пространственной постановке краевых задач, в квадратные скобки заключены составляющие, равные определителям плоской (первый сомножитель) и антиплоской (второй сомножитель) задач.

Функция $\det \mathbf{K}(\lambda, \omega)$ является вещественной на вещественной оси $\operatorname{Im} \lambda = 0$ и мероморфной в комплексной плоскости λ. Полярное множество $\det \mathbf{K}(\lambda, \omega)$ совпадает с полярным множеством определителя матрицы Грина слоя толщины $2(h_1 + h_2)$ на жестком основании. Корневое множество $\det \mathbf{K}(\lambda, \omega)$ является объединением полярного множества определителя матрицы Грина слоя на жестком основании толщины $2h_1$ и корневого множества определителя матрицы Грина слоя на жестком основании толщины $2h_2$. Существует диапазон частот $0 < \omega < \omega_{\text{кр}} \neq 0$ запирания волноводных свойств слоя с включением, в котором $\det \mathbf{K}(\lambda, \omega)$ не имеет вещественных нулей и полюсов.

Используя (2.4), можно путем подбора глубины погружения включения $2h_1$ управлять динамическими свойствами механической системы. Например, при $2h_1 = \frac{1}{3}H$ часть полюсов, без нарушения чередования с нулями, оказывается заблокированной. При этом количество волн перемещений, распространяющихся от включений при фиксированном значении частоты $\omega > \omega_{\text{кр}}$ и уносящих энергию на бесконечность, уменьшается, что приводит к частичной локализации вибрационного процесса [6].

2.2. Двухуровневый «вирус»

$$V\left(1/-2h_1; \Omega_1//2/0; \infty/-2h_1; \tilde{\Omega}_1\right).$$

Матрицу-символ $\mathbf{K}_1$ СИУ, порождаемой задачей о колебаниях однородного полупространства ($-\infty < x, y < +\infty$; $z \leqslant 0$), вызванных вибрацией границ включения, расположенного в плоскости $z = -2h_1$, получим, переходя в (2.3) к пределу при $h_2 \to \infty$

$$\begin{gathered} k_{11}^1 = k^*(\sigma_1, \sigma_2) + k^0(\sigma_1, \sigma_2), \\ k^0(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2(\sigma_1\sigma_2 - \lambda^2)\Delta_{21}^0, \end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} &k^*(\sigma_1, \sigma_2) = \\ &= 4\sigma_2\left\{\sigma_1\sigma_2\left[\gamma e^{-2\sigma_2 h_1} - \lambda^2 e^{-2\sigma_1 h_1}\right]^2 + \right. \\ &\qquad \left. + \lambda^2\left[\gamma e^{-2\sigma_1 h_1} - \sigma_1\sigma_2 e^{-2\sigma_2 h_1}\right]^2\right\}, \end{aligned}$$

$$k_{22}^1 = k^*(\sigma_2, \sigma_1) + k^0(\sigma_2, \sigma_1),$$

$$n_{11}^1 = \frac{1}{\sigma_2} e^{-4\sigma_2 h_1} + n_{11}^0, \quad n_{11}^0 = \frac{1}{\sigma_2},$$

$$k_{12}^1 = 4\sigma_1\sigma_2(\gamma - \sigma_1\sigma_2)\left[k_2(\sigma_1, \sigma_2) + k_2(\sigma_2, \sigma_1)\right],$$

$$k_2(\sigma_1, \sigma_2) = \left(\gamma e^{-2\sigma_1 h_1} - \lambda^2 e^{-2\sigma_2 h_1}\right) e^{-2\sigma_1 h_1},$$

$$\Delta_{22}^1 = \sigma_1\sigma_2(2\kappa_2^2)4(\gamma^2 - \lambda^2\sigma_1\sigma_2) = \sigma_1\sigma_2(2\kappa_2^2)\Delta_{21}^0,$$

$$\Delta_{12}^1 = 2.$$

Определитель матрицы K_1 имеет вид

$$\begin{aligned} \det \mathbf{K}_1 = &\left[\frac{4(\sigma_1\sigma_2 - \lambda^2)\Delta_{21}(h_1)}{\sigma_1\sigma_2\kappa_2^4\Delta_{21}^0} \times \right. \\ &\left. \times \exp(-2\sigma_1 h_1)\exp(-2\sigma_2 h_1)\right] \times \\ &\times \left[\frac{\Delta_{11}(h_1)}{\sigma_2}\exp(-2\sigma_2 h_1)\right]. \end{aligned}$$

Функция $\det \mathbf{K}_1(\lambda, \omega)$ наряду с вещественными нулями и полюсами имеет точки ветвления $\lambda = \pm\kappa_i$ ($i = 1, 2$). Единственным вещественным полюсом определителя является рэлеевский полюс матрицы Грина однородного полупространства, расположенный в области $|\operatorname{Re} \lambda| \geqslant \kappa_2$. Вещественные нули $\det \mathbf{K}_1(\lambda, \omega)$ совпадают с полюсами определителя матрицы Грина слоя на жестком основании толщины $2h_1$, которые, как известно, расположены в области $|\operatorname{Re} \lambda| < \kappa_2$.

2.3. Одноуровневый «вирус»

$$V\left(1/0; \Omega_1//2/0; \tilde{\Omega}_1\right).$$

Элементы матрицы-символа $\mathbf{K}_0$ ядра системы (1.4) для включения в однородном пространстве получим, переходя в (2.5) к пределу при $h_1 \to \infty$

$$\begin{gathered} k_{11}^0 = \sigma_2(\sigma_1\sigma_2 - \lambda^2), \quad n_{11}^0 = \frac{1}{\sigma_2}, \\ k_{12}^0 = 0, \end{gathered} \tag{2.6}$$

$$k_{22}^0 = \sigma_1(\sigma_1\sigma_2 - \lambda^2),$$

$$\Delta_{22}^0 = \sigma_1\sigma_2(2\kappa_2^2), \quad \Delta_{12}^0 = 2,$$

$$\det \mathbf{K}_0 = \left[\frac{(\sigma_1\sigma_2 - \lambda^2)^2}{\sigma_1\sigma_2(4\kappa_2^4)}\right] \times \left[\frac{1}{2\sigma_2}\right].$$

Функция $\det \mathbf{K}_0(\lambda, \omega)$ не имеет вещественных нулей и полюсов, ее особыми точками являются точки ветвления $\lambda = \pm\kappa_i$.

Как следует из (2.5), (2.6), матрица $\mathbf{K}_1$ для включения в однородном полупространстве представима в виде суммы матрицы $\mathbf{K}_0$ для включения в однородном пространстве и матрицы $\mathbf{K}_h$, элементы которой зависят от глубины погружения включения $2h_1$ и экспоненциально убывают при $|\lambda| \to \infty$ $(h_1 \neq 0)$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_h + \mathbf{K}_0,$$

причем

$$k_{11}^h = k^*(\sigma_1, \sigma_2), \quad k_{22}^h = k^*(\sigma_2, \sigma_1),$$

$$k_{12}^h = k_{12}^1, \quad n_{11}^h = \frac{1}{\sigma_2} e^{-4\sigma_2 h_1}.$$

3. Колебания однородных сред, содержащих одноуровневые трещины

3.1. Рассмотрим однородный упругий слой толщины $H = 2\,(h_1 + h_2)$, занимающий объем $(-\infty < x, y < +\infty;\ -H \leqslant z \leqslant 0)$, с жестко защемленной нижней гранью и содержащий трещину на глубине $z = -2h_1$. Это трехуровневый «вирус», имеющий структуру [5]

$$V\Big(1/-2(h_1+h_2); \infty//2/0; \infty/ \\ /-2h_1; \tilde{\Omega}_1\Big), \quad (3.1)$$

где $\tilde{\Omega}_1$ — область, занимаемая трещиной.

Функционально-матричные соотношения, соответствующие (3.1), получим из (1.1)–(1.3) при $N = 2$ и $\mathbf{Q}_1 \equiv 0$

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{S}_{21}^{-1}\mathbf{f}_1, \quad \mathbf{W}_1 = \mathbf{M}_{11}\mathbf{f}_1,$$

$$\mathbf{M}_{11} = \mathbf{K}_1(h_2)\mathbf{S}_{21}^{-1}(h_1, h_2),$$

$$\mathbf{S}_{21} = \mathbf{K}_1^-(h_1) - \mathbf{K}_1(h_2).$$

Матрица $\mathbf{S}_{21}^{-1}$ является символом ядра СИУ (1.4) относительно скачка вектора перемещений на берегах трещины

$$\mathbf{S}_{21}^{-1} = \mathbf{K} = \|K_{ij}\|_{i,j=1}^3. \quad (3.2)$$

Общая структура (2.2) элементов K_{ij} матрицы $\mathbf{K}$ не изменяется, а функции k_{11}, k_{12}, k_{22}, n_{11} имеют вид

$$k_{11} = k_{20}^+(h_1)\Delta_{21}(h_2) + \Delta_{20}(h_1)k_{21}^+(h_2),$$

$$n_{11} = \Delta_{10}(h_1)n_{10}^+(h_2),$$

$$k_{12} = m_{20}^+(h_1)\Delta_{21}(h_2) + \Delta_{20}(h_1)m_{21}^+(h_2),$$

$$k_{22} = m_{10}^+(h_1)\Delta_{21}(h_2) + \Delta_{20}(h_1)m_{11}^+(h_2),$$

$$\Delta_{20}(h_1) = 4(\gamma^4 + \lambda^4\sigma_1^2\sigma_2^2)\,\mathrm{sh}(2\sigma_1 h_1)\,\mathrm{sh}(2\sigma_2 h_1) - \\ - 8\sigma_1\sigma_2\gamma^2\lambda^2\,[\mathrm{ch}(2\sigma_1 h_1)\,\mathrm{ch}(2\sigma_{21} h_1) - 1]\,,$$

$$\Delta_{10}(h_1) = \sigma_2\,\mathrm{sh}(2\sigma_2 h_1).$$

Определителем матрицы (3.2) является

$$\det\mathbf{K} = \left[\frac{\Delta_{20}(h_1)\Delta_{21}(h_2)}{\Delta_{21}(h_1+h_2)}\right] \times \\ \times \left[\frac{\Delta_{10}(h_1)\Delta_{11}(h_2)}{\Delta_{11}(h_1+h_2)}\right].$$

В отличие от (2.4) $\det\mathbf{K}(\lambda, \omega)$ за счет функций $\Delta_{i0}(h_1)$, $i = 1, 2$ имеет вещественные нули во всем диапазоне частот $\omega \geqslant 0$.

3.2. Двухуровневый «вирус»

$$V\Big(2/0; \infty/-2h_1; \tilde{\Omega}_1\Big)$$

(трещина в полупространстве)

$$k_{11}^1 = k^*(\sigma_1, \sigma_2) + k^0(\sigma_1, \sigma_2),$$

$$k^0(\sigma_1, \sigma_2) = 8\sigma_1[\Delta_{21}^0]^2,$$

$$k^*(\sigma_1, \sigma_2) = \\ = 8\sigma_1\left\{-\left[\gamma^2 e^{-2\sigma_2 h_1} - \lambda^2\sigma_1\sigma_2 e^{-2\sigma_1 h_1}\right]^2 - \right. \\ \left. - \lambda^2\gamma^2\sigma_1\sigma_2\left[e^{-2\sigma_1 h_1} - e^{-2\sigma_2 h_1}\right]^2\right\},$$

$$k_{22}^1 = k^*(\sigma_2, \sigma_1) + k^0(\sigma_2, \sigma_1),$$

$$n_{11}^1 = -\sigma_2 e^{-4\sigma_2 h_1} + n_{11}^0, \quad n_{11}^0 = \sigma_2,$$

$$k_{12}^1 = 8\sigma_1\sigma_2\gamma(\gamma^2 + \lambda^2\sigma_1\sigma_2)\times \\ \times [e^{-2\sigma_1 h_1} - e^{-2\sigma_2 h_1}]^2,$$

$$\det\mathbf{K}_1 = \\ = \left[\frac{\Delta_{20}(h_1)}{\sigma_1\sigma_2(4\kappa_2^4)}\exp(-2\sigma_1 h_1)\exp(-2\sigma_2 h_1)\right] \times \\ \times [\Delta_{10}(h_1)\exp(-2\sigma_2 h_1)]\,. \quad (3.3)$$

Согласно (3.3), функция $\det\mathbf{K}_1(\lambda, \omega)$ не имеет вещественных полюсов, ее вещественные нули, совпадающие с полюсами матрицы Грина слоя со свободной верхней гранью, расположены в области $|\mathrm{Re}\,\lambda| < \kappa_2$. Кроме нулей особое множество определителя включает в себя точки ветвления $\lambda = \pm\kappa_i$.

3.3. Одноуровневый «вирус» $V\left(2/0;\tilde{\Omega}_1\right)$.

Если источником колебаний в пространстве является трещина, то

$$k_{11}^0=\sigma_1\Delta_{21}^0,\quad n_{11}^0=\sigma_2,\quad k_{12}^0=0,$$

$$k_{22}^0=\sigma_2\Delta_{21}^0,$$

$$\det\mathbf{K}_0=\left[\frac{4(\gamma^2-\lambda^2\sigma_1\sigma_2)^2}{\sigma_1\sigma_2(\kappa_2^4)}\right]\times\left[\frac{\sigma_2}{2}\right].$$

Функция $\det\mathbf{K}_0(\lambda,\omega)$ имеет точки ветвления, ее вещественный нуль определяется из уравнения Рэлея для однородного полупространства, причем на любой частоте $\omega\geqslant 0$ нуль будет двукратным.

Заметим, что для однородного пространства, содержащего в одной плоскости и трещину, и включение, вещественный нуль определителя СИУ

$$\det\mathbf{K}_0=\frac{(\gamma^2-\lambda^2\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1\sigma_2-\lambda^2)}{\sigma_1\sigma_2(4\kappa_2^4)}$$

также находится из уравнения Рэлея для однородного полупространства, но является однократным.

Аналогично предыдущему, матрица $\mathbf{K}_1$ для трещины в однородном полупространстве представима в виде суммы матрицы $\mathbf{K}_0$ для трещины в однородном пространстве и матрицы $\mathbf{K}_h$, элементы которой зависят от глубины залегания трещины и экспоненциально убывают при $|\lambda|\to\infty$.

Авторы благодарят академика РАН В. А. Бабешко за постановку и выбор методов исследования рассмотренных в данной работе задач.

Литература

1. *Бабешко В. А.* Динамика сред при наличии совокупности неоднородностей или дефектов и теория вирусов вибропрочности // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 1998. №1. С. 24–26.
2. *Бабешко В. А.* К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел // ДАН СССР. 1989. Т. 307. №2. С. 324–327.
3. *Бабешко В. А.* К проблеме исследования динамических свойств трещиноватых тел // ДАН СССР. 1989. Т. 304. №2. С. 318–321.
4. *Бабешко В. А.* К расчету параметров высокочастотного резонанса в трехмерном случае // ДАН. 1994. Т. 335. №1. С. 55–58.
5. *Бабешко В. А.* Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ. 2000. №3. С. 5–9.
6. *Бабешко В. А.* Теория «вирусов» вибропрочности для совокупностей включений // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2000. №3. С. 21–23.
7. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации в краевых задачах в неограниченных областях // ДАН. 2003. Т. 392. №6. С. 1–4.
8. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации в теории вирусов вибропрочности // ДАН. 2003. Т. 393. №4. С. 1–5.
9. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации решения некоторых краевых задач // ДАН. 2003. Т. 389. №2. С. 1–5.
10. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Обобщенная факторизация в краевых задачах в многосвязных областях // ДАН. 2003. Т. 392. №2. С. 1–5.
11. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* О представлении решений в методе факторизации // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. №1. С.5–9.
12. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* К исследованию связанных краевых задач механики сплошных сред и математической физики // ДАН. 2005. Т. 400. №2. С. 192–196.
13. *Бабешко В. А., Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Динамические задачи для сред с нарушением сплошности // Прикладная механика. 2004. №2. С. 3–10.
14. *Бабешко В. А., Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Постановка и решение динамических задач о взаимодействии массивных объектов со слоистым основанием // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. Математическое моделирование, вычислительная механика и геофизика: Материалы II школы-семинара молодых ученых Юга России. Краснодар, 2004. С. 5–21.
15. *Бабешко В. А., Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Решение динамических задач для многослойных сред с разрывными граничными условиями // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2002. Юбилейный выпуск. С. 80–82.
16. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Аналитический метод решения динамических задач для слоистых сред с включениями // Изв. РАН. МТТ. 2005. №2. С. 87–97.
17. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Интегральные уравнения динамических задач для многослойных сред, содержащих систему трещин // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 2. С. 345–351.
18. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Интегральные уравнения динамических задач для слоистого полупространства, содержащего систему трещин // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического

сотрудничества. 2005. № 1. С. 37–42.
19. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* К постановке динамических смешанных задач для слоистых сред с дефектами // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2003. № 2. С. 29–31.
20. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Решение динамических задач для слоистых термоэлектроупругих сред с дефектами // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2003. № 1. С. 68–77.
21. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 499–506.
22. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* К исследованию резонансных свойств сред с неоднородностями различной природы // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. № 3. С. 34–41.
23. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.

Статья поступила 25 октября 2005 г.
Кубанский государственный университет