УДК 519.63:517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АТМОСФЕРНОЙ ДИФФУЗИИ

Е. А. Семенчин¹, В. Н. Кармазин², Н. Н. Калина³

ABOUT RESOLVABILITY OF SOME INVERSE PROBLEMS FOR AN EQUATION OF ATMOSPHERIC DIFFUSION

Semenchin E. A., Karmazin V. N., Kalina N. N.

The work shows resolvability of the problem dealing with the parallel renewal of a generalized solution and capacity of an impurity source for a semi-empirical equation of atmospheric diffusion with given initial and boundary conditions for two cases of redefinition considered separately (for a finite point of time, the admixture concentration in every point of the domain under consideration is defined or for the fixed time of the action of a source, the density of admixture sediment is defined for every point of the domain under study). We assume that an impurity source (point, linear, square) is either stationary or immediate-action source, and boundary conditions are conditions of the first kind.

1. Постановка задачи

1.1. Основные обозначения и термины

В данной работе будем придерживаться обозначений и терминов, принятых в [1–3]. R^n — n -мерное вещественное евклидово пространство, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — произвольная точка в нем; R_+^3 — верхнее полупространство пространства R^3 , $R_+^3 = \{(x, y, z) : x, y \in (-\infty, \infty), z \in [0, \infty)\}$; $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$; Ω — ограниченная область в R_+^3 ; $\partial\Omega$ — граница Ω , $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$; t — переменная, интерпретируемая как время, $t \in [0, T]$, $T = \text{const} > 0$; Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$, т. е. $Q = \{(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, T)\}$; $S = \partial\Omega \times [0, T]$ — боковая поверхность Q ; u_t, u_{x_i} — частные производные по переменным t, x_i ($i = 1, 2, 3$) функции $u(t, \mathbf{x})$.

Встречающиеся в работе пространства $C(Q), C(\bar{Q}), C([0, T]), C^l(\Omega), C^l(\bar{\Omega}), C^l([0, T])$,

$l \geq 1, C_q(\Omega), C_{q,r}(Q), L_q(Q), q \geq 1, r \geq 1; W_q^l(\Omega), l \geq 1, q \geq 1; W_q^{2l,l}(Q), l \geq 1, q \geq 1; H^l(\Omega), H^l(\bar{\Omega}), H^{l,l/2}(Q), H^{l,l/2}(\bar{Q}), l \geq 1$; поверхности классов $C^l, H^l, l > 1$, подробно описаны в [1]. Понятия обобщенной производной и обобщенного решения дифференциального уравнения с частными производными приведены, например, в [4].

1.2. Постановка исследуемых задач

Обратная задача 1. Найти пару функций (q, P) , определенных соответственно в $\bar{Q}, \bar{\Omega}$ из условий

$$q_t - (Lq)(t, \mathbf{x}) = f = h(\mathbf{x})P(\mathbf{x})\delta(t, \mathbf{x}), \quad (1.1)$$

$$q|_{t=0} = q_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$q|_S = \mu(t, \mathbf{x}), \quad (t, \mathbf{x}) \in S = [0, T] \times \partial\Omega, \quad (1.3)$$

$$q(T, \mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (1.4)$$

¹Семенчин Евгений Андреевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики Кубанского государственного университета.

²Кармазин Владимир Николаевич, канд. физ.-мат. наук, докторант, доцент кафедры прикладной математики Кубанского государственного университета.

³Калина Наталья Николаевна, аспирант Ставропольского государственного университета.

$$Lq = \sum_{i,j=1}^3 (k_{ij}(\mathbf{x})q_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^3 u_i(\mathbf{x})q_{x_i} - c(\mathbf{x})q, \quad (1.5)$$

$$c(\mathbf{x}) \geq 0.$$

Предполагается, что все функции (кроме искомым (q , P)) заданы и выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} k_{ij}(\mathbf{x}) &\in H^{1+\alpha}(\bar{\Omega}), \\ u_i(\mathbf{x}) &\in H^{1+\alpha}(\bar{\Omega}), \\ c(\mathbf{x}) &\in H^\alpha(\bar{\Omega}), \\ i, j &= 1, 2, 3; \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\sum_{i=1}^3 (u_i(\mathbf{x}))_{x_i} = 0; \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \exists \nu_1 = \text{const}, \nu_2 = \text{const}, \\ 0 < \nu_1 < \nu_2 : \\ \nu_1 |\boldsymbol{\xi}|^2 &\leq k_{ij}\xi_i\xi_j \leq \nu_2 |\boldsymbol{\xi}|^2, \\ i, j &= 1, 2, 3, \quad \forall \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3); \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\partial\Omega \subset H^{2-\alpha}, \quad (1.9)$$

$$q_0(\mathbf{x}), \quad \chi(\mathbf{x}) \in H^{2+\alpha}(\bar{\Omega}), \quad (1.10)$$

$$\mu(t, \mathbf{x}) \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(S), \quad 0 < \alpha < 1; \quad (1.11)$$

$\delta(t, \mathbf{x})$ — δ -функция Дирака;

$$\mu(0, \mathbf{x}) = q_0(\mathbf{x}), \quad \mu(T, \mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega; \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \mu'(0, \mathbf{x}) &= (Lq_0)(0, \mathbf{x}) + \eta(\mathbf{x}), \\ &\mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ \eta(\mathbf{x}) &= \mu'(T, \mathbf{x}) - (L\chi)(T, \mathbf{x}), \\ &\mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Условие (1.7) называют условием неразрывности, условие (1.8) — условием равномерной эллиптичности оператора L , условия (1.12), (1.13) — условиями согласования.

Уравнение (1.1) описывает изменения концентрации q в $\bar{\Omega}$ с течением времени $t \in [0, T]$. Значения $u_i(\mathbf{x})$ совпадают со значениями скорости ветра соответственно вдоль осей $0x$, $0y$, $0z$. Функции $k_{ij}(\mathbf{x})$ называются коэффициентами турбулентной диффузии. Обычно считают [5, 6], что $k_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Однако в [7] отмечается, что такое допущение во многих случаях неоправдано. Коэффициент $c(\mathbf{x})$ характеризует скорость убывания примеси из атмосферы вследствие ее распада или вступления в химические реакции с атмосферным воздухом. Значения $q_0(\mathbf{x})$ совпадают в точках $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ со значениями фоновой концентрации примеси, значения $\mu(t, \mathbf{x})$ — со значениями концентрации q на границе $\partial\Omega$ области Ω в различные моменты времени t . При численных расчетах часто предполагают [6], что область Ω — цилиндр, нижнее основание которого расположено на подстилающей поверхности. При достаточно больших размерах Ω можно считать, что $\mu \equiv 0$ на боковой поверхности и верхнем основании цилиндра. Если подстилающая поверхность полностью поглощает или, наоборот, отражает осаждающуюся на нее примесь, то на нижнем основании Ω полагают соответственно $\mu = 0$ или $\mu = 1$ [5]. Например, полностью поглощающими являются влажная земля и водная поверхность.

При решении уравнения (1.1) конечное условие (1.4) обычно не задают. Однако при рассмотрении обратных задач для (1.1) его следует интерпретировать как результаты измерений концентрации примеси q в точках $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ в момент времени T .

Функция источника примеси f может быть представлена в виде

$$f(t, \mathbf{x}) = h(\mathbf{x})P(t, \mathbf{x})\delta(t, \mathbf{x}),$$

где $h(\mathbf{x})P(t, \mathbf{x})$ — мощность источника f , т. е. количество примеси, выбрасываемое в момент t точкой $\mathbf{x}$, принадлежащей области сосредоточения источника $\Omega_1 \subset \Omega$,

$$h(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_1. \end{cases} \quad (1.14)$$

При этом каждая переменная t , x_1 , x_2 , x_3 может присутствовать в произведении $P\delta$ только в одном из сомножителей. Если P зависит от t , то источник является источником непрерывного действия, если нет — либо стационарного, либо мгновенного действия. Например, если источник сосредоточен в точке $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, то

$$f = h(\mathbf{x}_0)P(t)\delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)\delta(x_3 - x_3^0)$$

описывает точечный источник непрерывного действия, а

$$f = h(\mathbf{x}_0)P\delta(t)\delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)\delta(x_3 - x_3^0),$$

$P = \text{const} > 0$ — мгновенного (момент его действия $t_0 = 0$). Аналогично описываются линейные и площадные источники [8]. В данной работе, согласно (1.1), рассматриваются только источники либо стационарного, либо мгновенного действия.

Обратная задача 2. Найти пару функций (q, P) , определенных соответственно в $\bar{Q}$ и $\bar{\Omega}$, из условий (1.1)–(1.3), (1.14) и

$$lq \equiv \int_0^T v_c(t)q(t, \mathbf{x}) dt = \chi(\mathbf{x}), \quad (1.15)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega,$$

$$Lq = \sum_{i,j=1}^3 (k_{ij}(\mathbf{x})q_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^3 u_i(\mathbf{x})q_{x_i} - c(t, \mathbf{x})q, \quad c(\mathbf{x}) \geq 0. \quad (1.16)$$

Всюду ниже при изучении обратной задачи 2 требуется выполнение следующих условий:

$$k_{ij} = k_{ji}, \quad k_{ij}(\mathbf{x}), u_i(\mathbf{x}) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad c(t, \mathbf{x}) \in C^2(\bar{Q}), \quad (1.17)$$

$$\mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad \partial\Omega \in C^2, \quad (1.18)$$

$$q_0(\mathbf{x}), \quad \chi(\mathbf{x}) \in W_2(\Omega), \quad (1.19)$$

$$v_c(t) \in L_2(0, T), v_c(t) > 0, \quad t \in (0, T), \quad (1.20)$$

$$\mu(t, \mathbf{x}), \mu_t(t, \mathbf{x}) \in W_2^{2,1}(Q), \quad \mu(t, \mathbf{x}) \in C([0, T]; W_2^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; W_2^1(\Omega)), \quad (1.21)$$

$$\mu(0, \mathbf{x}) = q_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (1.22)$$

$$l\mu = \chi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (1.23)$$

а так же условия неразрывности (1.7) и равномерной эллиптичности (1.8).

Все обозначения здесь имеют тот же смысл, что и в задаче 1. Исключение составляет равенство (1.15). Здесь $v_c(t)$ — скорость сухого осаждения примеси на подстилающую поверхность (чаще всего полагают, что $v_c = \text{const} > 0$), $\chi(\mathbf{x})$ — плотность осадка примеси в каждой точке Ω за время действия источника примеси T .

Условия (1.22), (1.23) называют условиями согласования [3].

При рассмотрении полуэмпирического уравнения (1.1) всегда неявно предполагается [5, 6], что решение этого уравнения следует

понимать в классическом смысле. В данной работе всюду ведется речь об обобщенном решении. Это существенно расширяет возможности применения в прикладных исследованиях математических моделей (1.1)–(1.5) и (1.1)–(1.3), (1.14)–(1.16).

2. Основные результаты

С задачей (1.1)–(1.5) свяжем следующую: найти пару функций $(\tilde{q}, P)$, определенных соответственно в $\bar{Q}, \bar{\Omega}$, из условий

$$\tilde{q}_t - (L\tilde{q})(t, \mathbf{x}) = h(x)P(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

$$\tilde{q}|_{t=0} = q_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.2)$$

$$\tilde{q}|_S = \mu(t, \mathbf{x}), \quad (t, \mathbf{x}) \in S, \quad (2.3)$$

$$L\tilde{q} = \sum_{i,j=1}^3 (k_{ij}(\mathbf{x})\tilde{q}_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^3 u_i(\mathbf{x})\tilde{q}_{x_i} - c(\mathbf{x})\tilde{q}, \quad (2.4)$$

$$\tilde{q}(T, \mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (2.5)$$

Предполагаем, что для задачи (2.1)–(2.5) выполняются те же условия (1.6)–(1.13), что и для (1.1)–(1.5).

С задачей (1.1)–(1.3), (1.5), (1.14)–(1.16) свяжем такую: найти пару функций $(\tilde{q}, P)$, определенных соответственно в $\bar{Q}, \bar{\Omega}$, из условий

$$l\tilde{q} = \int_0^T v_c(t)\tilde{q}(t, x) dt = \chi(x) \quad (2.6)$$

(2.1)–(2.4), (1.14). Предполагаем, что для неё выполняются условия (1.17)–(1.23).

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1.6)–(1.13). Тогда существует единственное решение (q, P) задачи (1.1)–(1.5). Если, кроме этого, $k_{ij}, u_i, c \in H^{3+\alpha}(\bar{\Omega}), q_0(\mathbf{x}), \chi(\mathbf{x}) \in H^{4+\alpha}(\bar{\Omega}),$ то $(q, p) \in H^{2+\alpha, 1+2/\alpha}(\bar{Q}) \times H^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (1.7), (1.8), (1.17)–(1.23), $c(t, \mathbf{x}) \geq 0, c_t(t, \mathbf{x}) \leq 0$. Тогда существует единственное решение $(q, P), q \in W_2^{2,1}(Q), P \in L_2(\Omega)$, задачи (1.1)–(1.3), (1.14)–(1.16).

Теорема 3. Пусть выполнены условия (1.7), (1.8), (1.17)–(1.19), (1.21)–(1.23), $v_c(t) > 0, (v_c(t))_t \leq 0, t \in (0, T),$

$v_c(t) \in W_2^1(0, T)$, $c(t, \mathbf{x}) \geq 0$, $(t, \mathbf{x}) \in Q$. Тогда существует единственное решение (q, P) , $q \in W_2^{2,1}(Q)$, $P \in L_2(\Omega)$, задачи (1.1)–(1.3), (1.14)–(1.16).

Доказательство теоремы 1. Задача (2.1)–(2.5) в условиях теоремы 1 имеет единственное решение $(\tilde{q}, P) \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(S) \times H^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ [2] (обратим внимание, что функция $h(t, \mathbf{x})$ из [2] в нашем случае тождественно равна 1 при $(t, \mathbf{x}) \in \bar{Q}$), при этом согласно [1] $(\tilde{q}, P)$ связаны соотношением

$$\tilde{q}(t, \mathbf{x}) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega} G(t, \mathbf{x}, \tau, \mathbf{y}) h(\mathbf{y}) P(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\Omega} G(t, \mathbf{x}, \tau, \mathbf{y}) q_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (2.7)$$

где $G(t, \mathbf{x}, \tau, \mathbf{y})$ — функция Грина для задачи (2.1)–(2.4), определяемая равенством (16.7) гл. 4 из [1].

Равенство (2.7) на основании (1.14) свойств δ -функции и способа задания Ω_1 эквивалентно равенству

$$\tilde{q}(t, \mathbf{x}) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1} G(t, \mathbf{x}, \tau, \tilde{\mathbf{y}}) P(\tilde{\mathbf{y}}) d\tilde{\mathbf{y}} + \int_{\Omega} G(t, \mathbf{x}, \tau, \mathbf{y}) q_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (2.8)$$

где $\tilde{\mathbf{y}} \in \Omega_1$.

Непосредственным вычислением легко убедиться, что

$$q(t, \mathbf{x}) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega} G(t, \mathbf{x}, \tau, \mathbf{y}) h(\mathbf{y}) P(\mathbf{y}) \delta(\tau, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\Omega} G(t, \mathbf{x}, \tau, \mathbf{y}) q_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (2.9)$$

при каждом фиксированном

$$f(t, \mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}) \delta(t, \mathbf{x})$$

удовлетворяет уравнению (1.1). Равенство (2.9) эквивалентно

$$q(t, \mathbf{x}) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1} G(t, \mathbf{x}, \tau, \tilde{\mathbf{y}}) P(\tilde{\mathbf{y}}) d\tilde{\mathbf{y}} + \int_{\Omega} G(t, \mathbf{x}, \tau, \mathbf{y}) q_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (2.10)$$

$\tilde{\mathbf{y}} \in \Omega_1$.

Правые части равенств (2.8) и (2.10) совпадают. Поэтому

$$q(t, \mathbf{x}) = \tilde{q}(t, \mathbf{x}).$$

$\tilde{q}(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет условиям (2.2), (2.3), (2.5). Значит, этим же условиям удовлетворяет и $q(t, \mathbf{x})$. Отсюда заключаем, что (q, P) , связанные соотношением (2.9), являются решением задачи (1.1)–(1.5).

Наоборот, пусть (q, P) , удовлетворяющие (2.9) — решение (1.1)–(1.5). Докажем, что $(\tilde{q}, P)$, связанные соотношением (2.7) (которое эквивалентно (2.8)) будут решением задачи (2.1)–(2.5). Непосредственным вычислением убеждаемся, что (q, P) удовлетворяет уравнению (2.1). Как отмечалось выше, (2.9) эквивалентно (2.10). Правые части (2.10), (2.8) совпадают, значит,

$$\tilde{q}(t, \mathbf{x}) = q(t, \mathbf{x}).$$

По предположению $q(t, \mathbf{x})$ удовлетворяют условиям (1.2)–(1.5). Значит, этим же условиям удовлетворяет и $\tilde{q}(t, \mathbf{x})$. Следовательно, $(\tilde{q}, P)$ действительно являются решением (2.1)–(2.5).

Таким образом, (q, P) является решением (1.1)–(1.5) тогда и только тогда, когда $(\tilde{q}, P)$ — решение (2.1)–(2.5). В условиях нашей теоремы решение $(\tilde{q}, P)$ задачи (2.1)–(2.5) существует и единственно, поэтому решение (q, p) задачи (1.1)–(1.5) также существует и единственно. На основании следствия теоремы 1 из [2] заключаем, что справедлива и вторая часть нашей теоремы. Теорема доказана.

Совершенно аналогично доказываются теоремы 2 и 3.

Замечание 1. Приближенное решение задачи (2.1)–(2.5) можно найти методом Рунге. Подробное описание этого метода приведено в [1], его обоснование для задач, аналогичных (2.1)–(2.5), приведено в [2].

Замечание 2. Решение (1.1)–(1.3), (1.14)–(1.16) можно свести к решению некоторого операторного уравнения Фредгольма II рода [3]).

Литература

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
2. *Прилепко А. И., Соловьев В. В.* Теорема разрешимости и метод Рунге в обратных задачах для уравнения параболического типа // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 11. С. 1971–1980.
3. *Прилепко А. И., Ткаченко Д. С.* Фредгольмовость и корректная разрешимость обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. № 9. С. 1392–1401.
4. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 436 с.
5. *Берлянд М. Е.* Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 448 с.
6. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.
7. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 640 с.
8. *Семенчин Е. А.* Аналитические решения краевых задач в математической модели атмосферной диффузии. Ставрополь: Изд-во СКИУУ, 1993. 142 с.

Статья поступила 4 августа 2005 г.

Кубанский государственный университет

Ставропольский государственный университет

© Семенчин Е. А., Кармазин В. Н., Калина Н. Н., 2005