Механика

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЕДНАПРЯЖЕННОГО УПРУГОГО СЛОЯ[1]

***Александров В. М.*[2], *Серов М. В.*[3]**

A TWO-DIMENSION CONTACT PROBLEM FOR A PRESTRESSED ELASTIC LAYER

Alexandrov V. M., Serov M. V.

The work considers a plane problem about indentation of a band stamp into an upper boundary of a preliminary stressed elastic layer. The linearized problem is reduced to an integral equation of the first kind with a difference logarithmic kernel relative to the contact pressure. Asymptotic solutions of the integral equations of the problem considered have been developed for different values of non-dimensional parameters, which characterize preliminary stress of the layer and its thickness.

Рассматривается плоская задача о вдавливании в верхнюю грань преднапряженного упругого слоя полосового штампа. Вначале слой подвергнут большой деформации в своей плоскости однородными усилиями. Затем нижняя грань слоя защемлена, а к штампу приложено погонное нормальное усилие. Предполагается, что материал слоя описывается упругим потенциалом гармонического типа. Считается, что дополнительные напряжения, вызываемые вдавливаемым штампом, малы по сравнению с основным нелинейным напряженным состоянием слоя. Это дает возможность линеаризовать задачу по определению дополнительных напряжений на фоне основного напряженного состояния. Линеаризованная задача сведена к интегральному уравнению первого рода с разностным логарифмическим ядром относительно контактного давления. Для различных значений безразмерного параметра, характеризующего преднапряжение слоя, построены асимптотические решения указанного интегрального уравнения при малых и больших значениях безразмерного параметра, характеризующего толщину слоя. Приведены конкретный пример.

Аналогичная задача для непреднапряженного упругого слоя рассматривалась в [1]. Сформулированная выше задача изучена впервые.

1. Постановка контактной задачи

Рассмотрим бесконечный слой и будем предполагать, что его материал можно описать упругим потенциалом гармонического типа. В начальном состоянии слой находится в условиях однородного в его плоскости поля нормальных напряжений. Начальные нормальные и касательные напряжения на площадках, параллельных граням слоя, отсутствуют. При сделанных предположениях перемещения и напряжения в начальном состоянии определяются формулами [2]

$$\begin{gathered} u_j^0 = (\lambda_j - 1)x_j = (\lambda_j - 1)\lambda_j^{-1} y_j, \\ \lambda_j = \text{const}, \quad j = 1, 2, 3, \\ \sigma_{jj}^0 = 2\mu\lambda_j^{-1}(\lambda_j - \lambda_2), \\ \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3) = -2\mu(\lambda_2 - 1). \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь x_j — лагранжевы координаты, y_j — декартовы координаты начального состояния (далее полагаем $y_1 = x, y_2 = y, y_3 = z$), λ и μ — упругие постоянные, λ_j — коэффициенты удлинений вдоль осей x_j, они всегда положительны. Область, занятая слоем в начальном

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (05-01-00002).

[2]Александров Виктор Михайлович, д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики РАН.

[3]Серов Михаил Витальевич, аспирант кафедры теории пластичности Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

состоянии, определяется условиями: $|x| < \infty$, $0 \le y \le h$, $|z| < \infty$.

Будем считать, что после предварительной большой деформации слоя нижняя грань его жестко защемлена, на верхнюю грань слоя действует жесткий полосовой штамп, и к штампу приложено погонное нормальное усилие P. Далее допускаем, что деформация слоя, вызванная вдавливаемым штампом, относительно мала и возмущения поля начальных напряжений также малы. В этом случае задачу определения дополнительных напряжений и перемещений можно линеаризовать на фоне основного нелинейного напряженно-деформированного состояния (1.1).

В результате имеем задачу о плоской деформации со следующими смешанными граничными условиями:

$$\begin{gathered} u(x,0) = v(x,0) = 0 \quad (|x| < \infty), \\ \tau_{xy}(x,h) = 0 \quad (|x| < \infty), \\ \sigma_y(x,h) = 0 \quad (|x| > a), \\ v(x,h) = -[\delta + \omega x - f(x)] \quad (|x| \le a). \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь u и v — дополнительные перемещения по осям x и y, τ_{xy} и σ_y — дополнительные касательное и нормальное напряжения, δ — поступательное перемещение штампа вдоль отрицательного направления оси y под действием нормального усилия P, ω — угол поворота штампа под действием момента Pe (e — эксцентриситет приложения усилия P, $e < a$), a — полуширина области контакта полосового штампа со слоем, $f(x)$ — функция, описывающая форму основания штампа. В условиях (1.2) предполагается, что силами трения в области контакта штампа со слоем можно пренебречь.

Перемещения u и v точек слоя, вызванные вдавливаемым штампом, удовлетворяют следующим уравнениям Ламе [2]:

$$\alpha^2 b_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \tag{1.3}$$

$$b_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \alpha^2 b_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$b_1 = \frac{(1+\alpha)(\beta+2)}{(1+\alpha)\beta+2}, \quad b_2 = \frac{2\alpha}{(1+\alpha)\beta+2},$$

$$\alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \beta = \frac{\lambda}{\mu},$$

а напряжения τ_{xy} и σ_y связаны с перемещениями соотношениями [2]

$$\begin{gathered} \tau_{xy} = \frac{2\mu}{\lambda_3(1+\alpha)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \sigma_y = \frac{\mu}{\lambda_3 \alpha} \left[\alpha\beta \frac{\partial u}{\partial x} + (\beta+2) \frac{\partial v}{\partial y} \right]. \end{gathered} \tag{1.4}$$

2. Сведение задачи к интегральному уравнению

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу со следующими граничными условиями:

$$\begin{gathered} u(x,0) = v(x,0) = 0 \quad (|x| < \infty), \\ \tau_{xy}(x,h) = 0 \quad (|x| < \infty), \\ \sigma_y(x,h) = -\tilde{q}(x) \quad (|x| < \infty), \\ \tilde{q}(x) = q(x) \quad (|x| \le a), \\ \tilde{q}(x) = 0 \quad (|x| > a). \end{gathered} \tag{2.1}$$

Для ее исследования будем искать решение уравнений (1.3) в форме [2]

$$\begin{gathered} u = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \\ v = \left(b_1 \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{b_2}{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \chi. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в (1.3), убедимся, что первое уравнение (2.2) удовлетворяется тождественно, а второе приводит к следующему уравнению относительно функции χ [2]:

$$\left(\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \chi = 0. \tag{2.3}$$

Далее функцию χ будем искать в виде интеграла Фурье

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} X(\gamma, y) \mathrm{e}^{-i\gamma x} d\gamma. \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.3) после решения обыкновенного дифференциального уравнения, найдем для трансформанты Фурье $X(\gamma, y)$ выражение

$$\begin{aligned} X = {} & [C_1(\gamma) + C_2(\gamma)\alpha|\gamma|y]\, \mathrm{e}^{\alpha|\gamma|y} + \\ & + [C_3(\gamma) + C_4(\gamma)\alpha|\gamma|y]\, \mathrm{e}^{-\alpha|\gamma|y}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Теперь для определения величин $C_l(\gamma)$ ($l = 1, 2, 3, 4$) представим разрывную функцию $\tilde{q}(x)$ вида (2.1) в форме интеграла Фурье

$$\tilde{q}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(\gamma) \mathrm{e}^{-i\gamma x}\, d\gamma \qquad (2.6)$$

и перепишем с помощью формул (1.4), (2.2), (2.4) и (2.6) граничные условия (2.1) в трансформантах Фурье. В результате с учетом формулы (2.5) придем к системе четырех алгебраический уравнений относительно величин $C_l(\gamma)$. Решив эту систему, в частности, найдем

$$v(x,h) = \\ = -\frac{1}{2\pi\theta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(\gamma) \frac{L(\gamma H)}{\gamma} e^{-i\gamma x}\, d\gamma, \quad (2.7)$$

$$L(u) = \frac{\operatorname{sh} 2u - A_3 u}{\operatorname{ch} 2u + A_1 u^2 + A_2},$$

$$A_1 = 2(\alpha\beta + \beta + 2)^2 \Delta^{-1},$$

$$A_2 = (5\beta^2\alpha^2 + 16\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + \\ + 16\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha\beta + 4\beta + 4)\Delta^{-1},$$

$$A_3 = \frac{2(\alpha\beta + \beta + 2)}{\alpha\beta + 4\alpha + \beta + 2},$$

$$\Delta = (\alpha\beta + 4\alpha + \beta + 2)(3\alpha\beta + 4\alpha - \beta - 2),$$

$$H = \alpha h, \quad \theta = \frac{\mu(3\alpha\beta + 4\alpha - \beta - 2)}{\alpha\lambda_3(\beta + 2)}.$$

Величину θ назовем контактной жесткостью. Видно, что при некотором значении $\alpha = \alpha_{\text{кр}} = (\beta + 2)(3\beta + 4)^{-1} < 1$ величина θ обращается в нуль, а величины A_1 и A_2 обращаются в бесконечность. Далее будем считать, что $\alpha > \alpha_{\text{кр}}$.

Перейдем к основной задаче. Обращая соотношение (2.6), найдем

$$Q(\gamma) = \int\limits_{-a}^{a} q(\xi) \mathrm{e}^{i\gamma\xi}\, d\xi. \qquad (2.8)$$

Удовлетворяя с помощью соотношений (2.7) и (2.8) последнему граничному условию (1.2) (остальные условия (1.2) уже удовлетворены в ходе получения соотношения (2.7)), придем к интегральному уравнению относительно функции контактного давления $q(x)$

$$\int\limits_{-a}^{a} q(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{H}\right) d\xi = \\ = \pi\theta[\delta + \omega x - f(x)], \quad (2.9)$$

$$|x| \le a,$$

$$K(t) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos(ut)\, du.$$

3. Асимптотическое решение при большой относительной толщине слоя

Заметим, что для функции $L(u)$ вида (2.7) имеют место асимптотические соотношения

$$L(u) = 1 + O(e^{-2u}), \quad u \to \infty, \qquad (3.1)$$

$$L(u) = \frac{2 - A_3}{1 + A_2} u + O(u^3), \quad u \to 0.$$

На основании соотношений (3.1) ядро (2.9) интегрального уравнения ($K(t)$) может быть представлено в форме

$$K(t) = -\ln t - \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{2i}, \qquad (3.2)$$

$$a_0 = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1 - L(u) - \mathrm{e}^{-u}}{u}\, du,$$

$$a_i = \frac{(-1)^i}{(2i)!} \int\limits_{0}^{\infty} [1 - L(u)] u^{2i-1}\, du, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Переходя в уравнении (2.9) к безразмерным переменным и обозначениям по формулам

$$\xi' = \frac{\xi}{a}, \quad x' = \frac{x}{a}, \quad \varphi(x') = \frac{q(x)}{\theta}, \\ g(x') = \frac{\delta + \omega x - f(x)}{a}, \quad \varepsilon = \frac{H}{a} \qquad (3.3)$$

и подставляя в него выражение (3.2) для $K(t)$, получим

$$-\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\ln\left|\frac{\xi-x}{\varepsilon}\right|d\xi=$$

$$=\pi g(x)+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a_i}{\varepsilon^{2i}}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)(\xi-x)^{2i}\,d\xi, \quad (3.4)$$

$$|x|\le 1.$$

Здесь и далее штрихи у безразмерных переменных опускаем.

Ищем решение интегрального уравнения (3.4) в форме ряда

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)\varepsilon^{-2n}. \quad (3.5)$$

Подставляя выражение (3.5) в уравнение (3.4) и приравнивая в нем слева и справа члены при одинаковых степенях ε, придем к бесконечной системе последовательно решаемых интегральных уравнений относительно функций $\varphi_n(x)$ [1]. Приведем результат такого решения с точностью до членов порядка ε^{-8}

$$\varphi(x)=\frac{N_0}{\pi\sqrt{1-x^2}}\left[1-\frac{2a_1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)-\right.$$
$$-\frac{4a_2}{\varepsilon^4}\left(\frac{7}{8}-x^2-x^4\right)-\frac{3a_1a_2}{\varepsilon^6}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)-$$
$$\left.-\frac{6a_3}{\varepsilon^6}\left(\frac{13}{8}+\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x^4-x^6\right)\right]-$$
$$-\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}g'(t)\left\langle\frac{1}{t-x}+\frac{2a_1x}{\varepsilon^2}+\right.$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}[2a_2(6x^3-6x^2t+2xt^2-2x+3t)-2a_1^2x]+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^6}\left\{x[-a_1a_2(2+12x^2+4t^2)+2a_1^3]+\right.$$
$$+3a_3\left[10x^5-20x^4t+(5+20t^2)x^3+(5t-10t^3)x^2-\right.$$
$$\left.\left.\left.-\left(\frac{11}{2}+9t^2-2t^4\right)x+5t+5t^3\right]\right\}\right\rangle dt+$$
$$+O\left(\frac{1}{\varepsilon^8}\right). \quad (3.6)$$

Величина N_0, участвующая в этом решении

$$N_0=\frac{P}{\theta a}=\frac{1}{\theta a}\int_{-a}^{a}q(\xi)\,d\xi=\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,d\xi, \quad (3.7)$$

должна быть определена из соотношения [1]

$$N_0\ln 2\varepsilon=\int_{-1}^{1}\frac{g(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a_i}{\varepsilon^{2i}}\times$$
$$\times\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)(\xi-t)^{2i}\,d\xi. \quad (3.8)$$

Подставляя выражение (3.6) в (3.8), получим для безразмерной вдавливающей силы N_0 с точностью до членов порядка ε^{-8} следующее представление:

$$N_0=\left[\ln 2\varepsilon-a_0-\frac{a_1}{\varepsilon^2}-\frac{a_1^2}{4\varepsilon^4}-\frac{9a_2}{4\varepsilon^4}-\right.$$
$$\left.-\frac{2a_1a_2}{\varepsilon^6}-\frac{25a_3}{4\varepsilon^6}+O\left(\frac{1}{\varepsilon^8}\right)\right]^{-1}\times$$
$$\times\left\{\int_{-1}^{1}\frac{g(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}g'(t)t\times\right.$$
$$\times\left[\frac{a_1}{\varepsilon^2}+\frac{a_2}{\varepsilon^4}\left(t^2+\frac{7}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{a_3}{\varepsilon^6}\left(t^4+8t^2+\frac{39}{4}\right)\right]dt+$$
$$\left.+O\left(\frac{1}{\varepsilon^8}\right)\right\}. \quad (3.9)$$

Найдем еще выражение для момента Pe, действующего на штамп. Введем безразмерный момент соотношением

$$N_1=\frac{Pe}{\theta a^2}=\frac{1}{\theta a^2}\int_{-a}^{a}\xi q(\xi)\,d\xi=$$
$$=\int_{-1}^{1}\xi\varphi(\xi)\,d\xi. \quad (3.10)$$

Подставляя выражение (3.6) в (3.10), получим для величины N_1 с точностью до членов порядка ε^{-8} представление

$$N_1 = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} g'(t) \times \\ \times \left[1 - \frac{a_1}{\varepsilon^2} + \frac{a_1^2}{\varepsilon^4} - \frac{a_2}{\varepsilon^4}\left(\frac{5}{2} + 2t^2\right) - \right. \\ - \frac{a_1^3}{\varepsilon^6} + \frac{a_1 a_2}{\varepsilon^6}\left(\frac{11}{2} + 2t^2\right) - \\ \left. - \frac{3a_3}{\varepsilon^6}\left(\frac{9}{4} + 3t^2 + t^4\right)\right] dt + \\ + O\left(\frac{1}{\varepsilon^8}\right). \quad (3.11)$$

4. Асимптотическое решение при малой относительной толщине слоя

Ограничимся построением главного члена асимптотики решения уравнения (2.9). Как показано в [1]

$$\varphi(x) = \varphi^{(1)}\left(\frac{1+x}{\varepsilon}\right) + \\ + \varphi^{(2)}\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right) - \varphi^{(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (4.1)$$

где функции $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$ и $\varphi^{(0)}$ должны быть найдены из интегральных уравнений

$$\int\limits_0^\infty \varphi^{(1)}(\tau) K(\tau - t)\, d\tau = \frac{\pi}{\varepsilon} g(\varepsilon t - 1) \\ (0 \le t < \infty),$$

$$\int\limits_0^\infty \varphi^{(2)}(\tau) K(\tau - t)\, d\tau = \frac{\pi}{\varepsilon} g(1 - \varepsilon t) \\ (0 \le t < \infty), \quad (4.2)$$

$$\int\limits_0^\infty \varphi^{(0)}(\tau) K(\tau - t)\, d\tau = \frac{\pi}{\varepsilon} g(\varepsilon t) \\ (-\infty \le t < \infty).$$

Здесь по-прежнему приняты безразмерные переменные и обозначения (3.3).

Решения первых двух уравнений (4.2) могут быть найдены методом Винера-Хопфа [3]. Решение третьего уравнения (4.2) может быть построено с помощью теоремы о свертке для интегрального преобразования Фурье [4].

Отметим, что в представлении (4.1) решения типа погранслоя $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ автоматически сращиваются с проникающим решением $\varphi^{(0)}$.

5. Числовой пример

Ограничимся рассмотрением случая плоского наклонного штампа, т. е. случая, когда $f(x) \equiv 0$. При этом

$$g(x) = \delta' + \omega x, \qquad \delta' = \delta/a \quad (5.1)$$

(штрих у δ' далее опускаем). Подставляя выражение (5.1) в формулы (3.9) и (3.11), найдем

$$N_0 = \pi\delta \left[\ln 2\varepsilon - a_0 - \frac{a_1}{\varepsilon^2} - \frac{a_1^2}{4\varepsilon^4} - \frac{9a_2}{4\varepsilon^4} - \right. \\ \left. - \frac{2a_1 a_2}{\varepsilon^6} - \frac{25a_3}{4\varepsilon^6} + O\left(\frac{1}{\varepsilon^8}\right)\right]^{-1}, \quad (5.2)$$

$$N_1 = \frac{\pi\omega}{2}\left[1 - \frac{a_1}{\varepsilon^2} + \frac{a_1^2}{\varepsilon^4} - \frac{3a_2}{\varepsilon^4} - \frac{a_1^3}{\varepsilon^6} + \right. \\ \left. + \frac{6a_1 a_2}{\varepsilon^6} - \frac{75a_3}{8\varepsilon^6} + O\left(\frac{1}{\varepsilon^8}\right)\right]. \quad (5.3)$$

Решение третьего интегрального уравнения (4.2) для случая (5.1) находится несложно и равно

$$\varphi^{(0)}(t) = \frac{\delta + \omega\varepsilon t}{\varepsilon l}, \quad l = \frac{2 - A_3}{1 + A_2}. \quad (5.4)$$

Для построения решений первых двух интегральных уравнений (4.2) в аналитическом виде аппроксимируем функцию $L(u)$ выражением

$$L^*(u) = \frac{u\sqrt{u^2 + B^2}}{u^2 + A^2}, \quad (5.5)$$

где постоянные A и B подберем таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$L^*(u) = 1 + O\left(\frac{1}{u^2}\right), \quad u \to \infty; \\ L^*(u) = lu + O(u^3), \quad u \to 0. \quad (5.6)$$

(сравни с (3.1)).

1	ε	1/2	1	2	4
2	N_0/δ	–	–	3.227	2.020
3	N_0/δ	10.716	5.604	3.230	–
4	N_1/ω	–	2.480	1.844	1.643
5	N_1/ω	3.918	2.425	–	–

С учетом аппроксимации (5.5) и выражения (5.1) решения первых двух уравнений (4.2) могут быть построены методом Винера-Хопфа и имеют вид

$$\varphi^{(1)}(t) = \frac{1}{\varepsilon}(\delta - \omega)\psi^{(0)}(t) + \omega\psi^{(1)}(t),$$

$$\varphi^{(1)}(t) = \frac{1}{\varepsilon}(\delta + \omega)\psi^{(0)}(t) - \omega\psi^{(1)}(t),$$

$$\psi^{(0)}(t) = \frac{1}{l}\ \mathrm{erf}(\sqrt{Bt}) + \frac{\mathrm{e}^{-Bt}}{\sqrt{\pi l t}}, \qquad (5.7)$$

$$\psi^{(1)}(t) = \frac{t}{l}\ \mathrm{erf}(\sqrt{Bt}) - \frac{\mathrm{e}^{-Bt}}{\sqrt{\pi B t}}\left(1 - \frac{t}{l} - \frac{A}{2B}\right).$$

где $\mathrm{erf}(x)$ — интеграл вероятности [5].

Найдем теперь по формулам (3.7) и (3.10) величины N_0 и N_1

$$N_0 = 2\delta \int\limits_0^{2/\varepsilon} \psi^{(0)}(\tau)\, d\tau - \frac{2\delta}{\varepsilon l},$$

$$N_1 = -2\omega \int\limits_0^{2/\varepsilon} \psi^{(0)}(\tau)(\varepsilon\tau - 1)\, d\tau + \\ + 2\omega\varepsilon \int\limits_0^{2/\varepsilon} \psi^{(1)}(\tau)(\varepsilon\tau - 1)\, d\tau - \frac{2\omega}{3\varepsilon l}. \qquad (5.8)$$

Подставляя в соотношения (5.8) выражения (5.7) функций $\psi^{(0)}(t)$ и $\psi^{(1)}(t)$ и вычисляя интегралы, получим

$$N_0 = \delta\left\{\frac{2}{l\varepsilon}\left[2\,\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{2B}{\varepsilon}}\right) - 1\right] + \right. \\ + \frac{1}{\sqrt{lB}}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{lB}}\right)\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{2B}{\varepsilon}}\right) + \\ \left. + \frac{2}{l}\sqrt{\frac{2}{\pi B\varepsilon}}\exp\left(-\frac{2B}{\varepsilon}\right)\right\}, \qquad (5.9)$$

$$N_1 = \omega\left\{\frac{2}{3\varepsilon l}\left[2\,\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{2B}{\varepsilon}}\right) - 1\right] + \right. \\ + \left[\frac{1}{\sqrt{Bl}}\left(-\frac{1}{\sqrt{Bl}} + 2\right) + \right. \\ + \frac{1}{B}\left(\frac{1}{2Bl} - \frac{A}{B} - \frac{1}{\sqrt{Bl}} + 2\right)\varepsilon + \\ \left. + \frac{1}{B^2}\left(\frac{1}{4Bl} + \frac{A}{2B} - 1\right)\varepsilon\right] \times \mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{2B}{\varepsilon}}\right) + \\ + \left[\frac{2\sqrt{2}}{3l\sqrt{\pi B\varepsilon}} + \frac{\sqrt{2}}{B\sqrt{\pi l}}\left(-\frac{5}{3\sqrt{Cl}} + 2\right)\sqrt{\varepsilon} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{2}}{B^{3/2}\sqrt{\pi}}\left(-\frac{A}{B} - \frac{1}{2Bl} + 2\right)\varepsilon^{3/2}\right] \times \\ \left. \times \exp\left(-\frac{2B}{\varepsilon}\right)\right\}. \qquad (5.10)$$

Рассмотрим случай, когда $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Полагая $A = 1,327$, $B = 0,660$ добиваемся, чтобы погрешность аппроксимации (5.5) не превосходила $8,5\%$. Для коэффициентов a_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ имеем

$$a_0 = 0,569, \quad a_1 = -0,747,$$

$$a_2 = 0,260, \quad a_3 = -0,856.$$

В таблице для различных ε (первая строка) даны значения величин N_0/δ и N_1/ω, посчитанных по формулам (5.2), (5.3) (вторая и четвертая строки) и формулам (5.9), (5.10) (третья и пятая строки). Видно, что смыкание между асимптотическими решениями для больших и малых ε наступает примерно при $\varepsilon = 2$ для N_0/δ и $\varepsilon = 1$ для N_1/ω.

Недавно авторам стала известна работа [6], где ранее была рассмотрена аналогичная плоская контактная задача для преднапряженного упругого слоя.

Литература

1. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Гузь А. Н.* Комплексные потенциалы плоской линеаризованной задачи теории упругости (сжимаемые тела) // Прикладная механика. 1980. Т. 16. № 5. С. 72–83.
3. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: ИЛ, 1962. 280 с.
4. *Bochner S.* Lectures on Fourier integrals. P.: Princeton University Press, 1959. (Имеется перевод: *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье: Пер с англ. М.: Физматлит, 1962. 360 с.)
5. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 467 с.
6. *Зеленцов В. Б., Филиппова Л. М.* Контактные задачи для предварительно напряженных полуплоскости и полосы // Изв. РАН. МТТ. 1989. № 2. С. 73–76.

Статья поступила 1 августа 2005 г.
Институт проблем механики РАН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
© Александров В. М., Серов М. В., 2006